

구조물-유체 상호작용을 고려한 두꺼운 원통형 셸의 유한요소 진동 해석

배수룡, 신구균*, 함일배*, 이헌곤*

(Finite Element Vibration Analysis of Thick Cylindrical Shell with Structure-Fluid Interaction)

(Soo-Ryong Bae, Ku-Kyun Shin, Il-Bae Ham, Hun-Gon Lee)

1. 서론

두꺼운 원통형 셸은 공학적인 문제에서 많이 사용된다. 셸 내부에 임피던스가 큰 유체와 구조물이 있을 때 셸을 포함한 진동해석은 이론적인 해석이 매우 어렵다.

셸 내부에 있는 유체의 임피던스가 공기에 비하여 매우 클 경우 셸과 유체, 내부의 구조물과 유체사이의 구조물-유체 상호작용(structure-fluid interaction)이 고려⁽¹⁾되어야 한다. 얇은 원통형 셸에 대해서는 상용 유한요소 코드를 이용하여 구조물-유체 상호작용을 고려한 진동해석이 많이 수행되었으나 축대칭 두꺼운 원통형 셸에 대해서는 연구가 수행되지 않고 있다.

본 연구에서는 NASTRAN, ANSYS 같은 상용 유한요소 코드에서 지원되지 않는 축대칭 두꺼운 원통형 셸 내부에 유체와 강제요소가 있을 경우 이에 대한 유한요소 코드를 개발하고, 구조물-유체 상호작용을 고려하여 진동해석을 하였다.

2. 축대칭 두꺼운 원통형 셸의 유한요소

두꺼운 원통형 셸의 정식화를 위한 절대좌표계는 그림 1.에서 보이는 바와 같이 원점을 원통형 셸의 중심에 두고 길이방향을 x , 반경방향을 r , 원주방향을 θ 로 한다. 축대칭 요소는 2차원 문제로 취급할 수 있으므로 셸의 임의 단면 내에서 탄성거동만을 고려하여도 충분하다. 따라서 그림 2.와 같이 셸을 적당한 길이 l 인 3절점 2차 유한요소로 분할하고 유한요소에 대하여 길이

방향을 ξ , 두께방향을 η 축, 원점은 요소의 중심과 일치하는 특성좌표계(natural coordinate)를 도입한다.

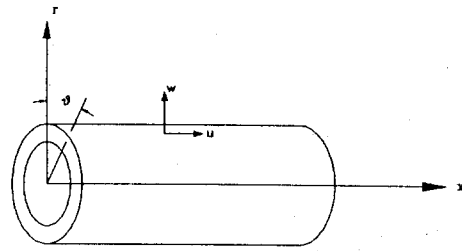


그림 1. 두꺼운 원통형 셸의 좌표계

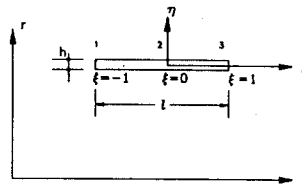


그림 2. 축대칭 두꺼운 원통형 셸의 유한요소와 특성좌표계

셸의 변형율-변위 관계식은 다음과 같다.^{(2),(3)}

* 국방과학연구소

$$\{\varepsilon\} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{xz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial r} \\ 0 & \frac{1}{r} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} \quad (1)$$

여기서 u, w 는 요소 내의 임의의 점에서 x 축, r 축 방향으로의 변위를 나타내며 r 은 좌표 반지름이다.

Hook의 법칙에 의해 응력-변형률의 관계식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\} \quad (2)$$

여기서 $[D]$ 는 응력과 변형률의 관계를 나타내는 탄성 행렬이다.

셀의 유한요소 임의의 위치 및 변위는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} x \\ r \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^3 N_i \begin{Bmatrix} x_i \\ r_i \end{Bmatrix} + \sum_{i=1}^3 N_i \eta \frac{h_i}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^3 N_i \begin{Bmatrix} u_i \\ w_i \end{Bmatrix} + \sum_{i=1}^3 N_i \frac{h_i}{2} \eta \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \alpha_i$$

$$= \sum_{i=1}^3 \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_i \frac{h_i}{2} \eta \\ 0 & N_i & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ w_i \\ \alpha_i \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^3 [M]_i \{q\}_i \quad (4)$$

여기서 형상함수 N_i 는 특성좌표계 ξ 의 2차 함수로 다음과 같이 표시되며^{(2),(3),(4)}

$$N_1 = \frac{\xi^2 - \xi}{2}, \quad N_2 = 1 - \xi^2, \quad N_3 = \frac{\xi^2 + \xi}{2} \quad (5)$$

α_i 는 굽힘각을 나타낸다.

단면내 임의의 점에서의 변형률은 절점에서의 변위로 나타낼 수 있다.

$$\{\varepsilon\} = \sum_{i=1}^3 [B]_i \{q\}_i = [B] \{q\} \quad (6)$$

여기서

$$[B]_i = \begin{bmatrix} \frac{2}{l} N_{i,\xi} & 0 & \eta \frac{h_i}{2} N_{i,\xi} \frac{2}{l} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{N_i}{r} & 0 \\ 0 & \frac{2}{l} N_{i,\xi} & N_i \end{bmatrix}$$

$$\{q\}_i^T = [u_i \ w_i \ \alpha_i]$$

절대좌표계와 특성좌표계와의 관계를 나타내는 Jacobian J 를 이용하여 강성행렬과 질량행렬은 다음과

같이 구할 수 있다.

$$[K]_e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_0^{2x} [B]^T [D] [B] |J| r d\xi d\eta d\theta \quad (7)$$

$$[M]_e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_0^{2x} [M]^T [M] |J| r d\xi d\eta d\theta \quad (8)$$

셀의 감쇠는 손실계수(loss factor) η 를 이용하여 나타낼 수 있다.

3. 내부유체의 유한요소

내부유체는 비점성 압축성 유체로 가정하고 구조물-유체 상호작용을 해석하기 위하여 유한요소로 모델링할 수 있다. 그림 3.과 같은 체적 V 로 구성된 유체체는 Helmholtz 방정식을 만족한다.

$$\nabla^2 p + \frac{\omega^2}{c^2} p = 0 \quad (9)$$

여기서 c 는 음속이며, $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 으로 표시되고 Laplacian 이라 한다.

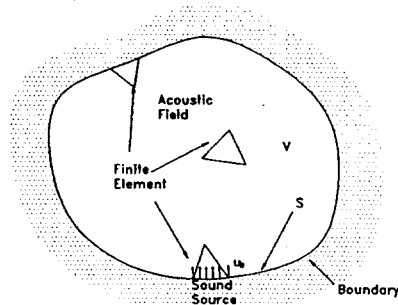


그림 3. 유체계

유체와 구조물의 접합면 S 에서는 다음과 같은 경계조건식을 만족한다.

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\omega^2 \rho_a w_n \quad (10)$$

여기서 n : 바깥 방향으로 향하는 법선방향

ρ_a : 유체의 밀도

w_n : 고체 표면의 법선방향 변위

이다.

경계조건을 고려한 Helmholtz 방정식의 해는 변분원리에 의하여 다음과 같이 주어진다.

$$\delta \left[\frac{1}{2} \int_V \{ (\nabla p)^2 - (\omega^2/c^2) p^2 \} dV + \int_S \omega^2 \rho_a w_n b dS \right] = 0 \quad (11)$$

변분원리 식(11)은 유한요소법을 이용하여 근사해를 구할 수 있다.

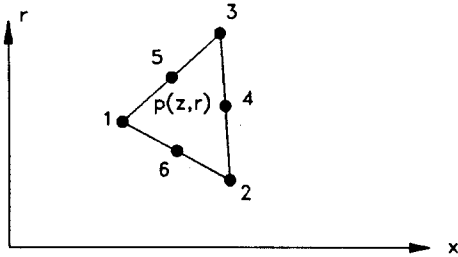


그림 4. 6개의 절점을 가진 축대칭 삼각형 유체요소

축대칭의 경우 음압은 2차 다항식으로 표현할 수 있으므로^{(5),(6)}

$$p(x, r) = a_1 + a_2 x + a_3 r + a_4 x^2 + a_5 x r + a_6 r^2 \quad (12)$$

와 같이 나타낼 수 있다. 그림 4.와 같이 6개의 절점을 가진 삼각형 유체요소로 모델링하면 요소내 임의의 점에서의 음압 p 는 일반좌표계 보다 면적좌표계를 사용하는 것이 편리하다. 음압 p 는 면적좌표계 ζ 를 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.⁽⁷⁾

$$p(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = [\zeta_1^2 \ \zeta_2^2 \ \zeta_3^2 \ \zeta_2 \zeta_3 \ \zeta_1 \zeta_3 \ \zeta_1 \zeta_2] [D]_a (P)_a \\ = [N_a] (P)_a \quad (14)$$

여기서

$$[D]_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

그리고

$$(P)_a^T = [P_1 \ P_2 \ P_3 \ P_4 \ P_5 \ P_6]$$

이다.

유체요소의 강성행렬 $[K]_a$ 는 다음과 같은 관계식으로부터 구할 수 있다.

$$\int_V \frac{1}{2} (\nabla p)^2 dV = \frac{1}{2} (P)_a^T [K]_a (P)_a \quad (14)$$

여기서

$$[K]_a = \int_V [B]_a^T [B]_a dV \quad (15)$$

$$\text{그리고 } [B]_a = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial r} \end{bmatrix} [N]_a$$

이다.

유체요소의 질량행렬 $[M]_a$ 는 다음과 같은 관계식으로 구할 수 있다.

$$\int_V \frac{1}{2} (b^2/c^2) dV = \frac{1}{2} (P)_a^T [M]_a (P)_a \quad (16)$$

유체요소가 그림 5.와 같이 축방향으로 일정 변위 w_0 로 가진되고 다른 경계조건이 없을 경우에 운동방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$[M]_a (\dot{P}) + [K]_a (P) = (W)_a \quad (17)$$

여기서

$$(W)_a = -\omega^2 \rho u_0 \frac{\pi L_a}{3} \begin{bmatrix} r_1 \\ 0 \\ r_3 \\ 0 \\ 2(r_1 + r_3) \\ 0 \end{bmatrix}$$

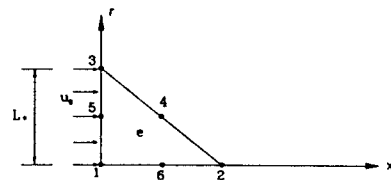


그림 5. 유체요소에 대한 축방향 변위가진

4. 구조계와 유체계의 결합

구조물과 유체가 접하고 있을 경우 공기중과 달리 구조물의 고유 진동수가 변화하며⁽⁸⁾, 공기중이라도 구조물내의 음향문제를 해석할 경우에는 구조물-유체의 상호작용을 고려⁽⁹⁾하여야 한다. 구조요소와 유체요소와 결합할 때 구조물-유체 상호작용을 고려한 운동방정식

은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} M_s & 0 \\ -[S] & M_a \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} K_s & \frac{1}{\rho_a} [S]^T \\ 0 & K_a \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_m \\ \dot{p}_a \end{pmatrix}$$

여기서 [S]는 구조물과 유체계를 결합시키는 결합행렬 (coupling matrix) 이다.

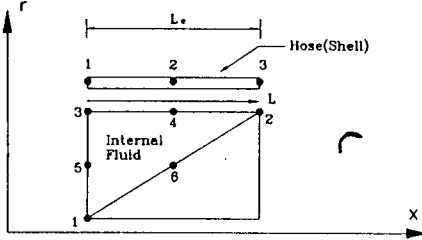


그림 6. 셸 요소와 유체요소의 결합

결합행렬 [S]는 축대칭 두꺼운 원통형 셸의 유한요소와 축대칭 유체요소가 그림 6.과 같이 결합되면 요소간의 결합행렬은 다음과 같이 구해진다.

$$[s] = 2\pi \int \rho_a r [N]_a^T [N]_s dL$$

5. 결과 및 고찰

5.1 축대칭 두꺼운 원통형 셸의 유한요소 해석

본 연구의 고유진동 해석결과는 Signal⁽⁹⁾의 해석결과와 비교하였으며, 또한 ANSYS의 축대칭 얇은 셸(thin shell)에 대한 해석결과와도 비교하여 표 1.에 수록되어 있다.

본 연구의 유한요소 해석결과는 Signal의 실험결과와 비교하여 잘 일치하고 있음을 표 1.로부터 알 수 있다. 그러나 얇은 셸 이론을 사용한 ANSYS의 해석결과는 m=4에서부터 실험결과와 큰 차이를 보이고 있음을 알 수 있다. ANSYS의 해석결과로부터 두꺼운 원통형 셸의 동특성을 해석할 때 얇은 셸 이론을 사용한 유한요소 해석결과는 저차의 몇개 모드는 일치하지만 그 이상의 모드에서는 신뢰성이 없음을 알 수 있다.

표 1. 해석결과의 고유진동수 비교
(m = 축방향 모드 번호, 단위 : Hz)

m	Signal ⁽⁹⁾ 이론치	Signal ⁽⁹⁾ 실험치	ANSYS (thin shell)	Present
0	8109	8149	8138.35	8138.02
1	8550	8615	8465.56	8464.97
2	8817	8886	8774.7	8782.51
3	10719	10874	11400.1	11067.64
*	11268	-	11406.1	11391.21
4	15036	15030	17106.279	15515.29

5.2 축대칭 유체계의 유한요소법 검증

그림 7.과 같은 길이 2.31m, 반지름 0.38m의 원통형 공동(cylindrical cavity)을 총 절점 55개, 요소수는 20개로 분할하였다. 표 2.에는 원통형 공동에 대하여 본 연구의 유체계에 대한 유한요소 해석결과와 이론적 해석결과, Petyt⁽⁶⁾의 유한요소 해석결과를 비교하여 수록하였다.

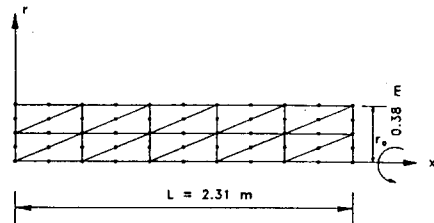


그림 7. 원통형 공동의 유한요소 분할

표 2. 원통형 공동의 음향 고유진동수(n=0, s=0)
(단위 : Hz)

m	Theory	Petyt ⁽⁶⁾ FEM	Present
1	73.6	73.2	75.48
2	147.2	146.7	150.92
3	220.8	221.4	222.11
4	294.4	299.0	306.75
5	368.0	403.9	409.98
6	441.6	485.3	482.70
7	515.2	563.0	525.23

m = number of axial waves
 n = number of circumferential waves
 s = number of radial waves

5.3 구조물-유체 결합계의 해석

그림 8.과 같이 한쪽에 강체가 부착된 외팔보형 원통형 셀 모델에 대하여 원통형 셀은 축대칭 두꺼운 원통형 셀의 유한요소로 모델링하고 내부의 유체는 유체 유한요소로 모델링한 후 셀과 유체의 상호작용을 고려하여 리셉턴스를 계산하였다. 비교를 위하여 이 모델에 대한 이론적 해석을 수행하였으며 원통형 셀을 보(Beam)로 간주하고 끝에 집중질량이 부착된 것으로 하여 리셉턴스(Receptance)를 계산하였다. 두 해석결과는 그림 9.에 비교되어 있으며 두 해석 결과는 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

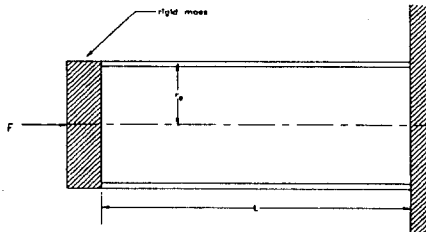


그림 8. 끝에 강체요소가 부착된 외팔보형 원통형 셀

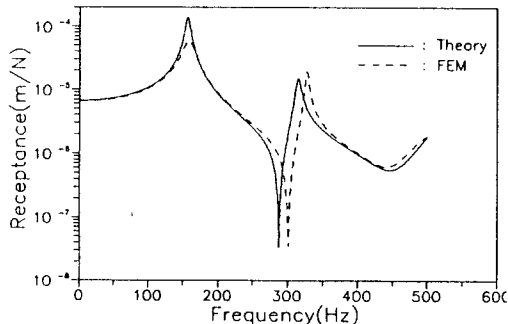


그림 9. 유한요소 해석결과와 이론결과의 비교

6. 결 론

본 연구에서는 두꺼운 원통형 셀 내부에 임피던스가 큰 유체가 있을 경우 셀과 유체의 상호작용을 고려하

여 진동해석을 하였다. 두꺼운 원통형 셀에 대하여 얇은 셀 이론을 이용한 유한요소 해석결과는 고차모드에서 오차가 많이 발생하였다.

축대칭 두꺼운 원통형 셀은 상용유한요소 코드에서 지원되지 않는 코드이므로 본 연구를 이용하여 유한요소 해석이 가능하며 셀 내부에 있는 유체의 상호작용도 고려할 수 있으므로 셀 내부의 음향문제도 해석할 수 있다.

참고문헌

- O.C. Zienkiewicz, R.E. Newton, "Coupled Vibrations of a Structure Submerged in a Compressible Fluid", Proc. Int. Sym. Finite Element Techniques, 1969, pp. 360-379
- C.T.F. Ross, "Finite Element Programs for Axisymmetric Problems in Engineering", JOHN WILEY & SONS, 1984
- William Weaver, Jr. and Paul R. Johnston, "Structural Dynamics by Finite Element", Prentice-Hall, 1987
- K.R. Sivasdas, N. Ganesan, "Axisymmetric Vibration Analysis of Thick Cylindrical Shell with Variable Thickness", J. of Sound and Vibration, 1993, 160(3), pp. 387-400
- Y. Kagawa, T. Yamabuchi, A. Mori, "Finite Element Simulation on as Axisymmetric Acoustic Transmission System with a Sound Absorbing Wall", J. of Sound and Vibration, 1977, 53(3), pp. 357-374.
- 加川幸雄, "有限要素法による振動音響工学/基礎と應用", 1980
- 加川幸雄, 村山健一, "BASICによる電氣・電子有限要素法", 1986
- M. Petyt, S.P. Lim, "Finite Element Analysis of the Noise Inside a Mechanically Excited Cylinder", Int. J. for Num. Methods in Eng., 1978, Vol. 13, pp. 109-122
- R.K. Signal, K. Willams, "A Theoretical and Experimental Study of Vibrations of Thick Circular Cylindrical Shells and Rigns", J. of Vib., Acoust., Str., and Reliability in Design, 1988, Vol. 110, pp. 533-537