

직렬연결 파이프계의 내부유체유발진동

⁰김주홍*, 이우식**

Internal Flow-Induced Vibrations of Piping Systems with Series Junctions

⁰Joo Hong Kim*, Usik Lee**

1. 서론

높은 압력을 갖는 유체를 고속으로 전송하는데 사용되는 파이프계는 내부의 유체특성이 펌프나 밸브의 작동에 의해 시간에 따라 변화할 수 있으므로 이로 인해 심각한 유체유발진동이 발생하여 파이프나 지지부들이 피로파괴되거나 파단되어 위험할 수 있다. 이러한 문제가 발생할 수 있는 예로서 지상에 설치된 각종 산업시설내의 파이프계의 유체유발진동, 증기터빈 내부의 튜브, 및 대형 액체추진로켓트의 파이프계 등이다.

그러나, 이러한 파이프계의 설계에 사용되어온 해석과정은 일반적으로 극히 단순화된 것들이다. 전통적으로 구조물의 강성, 관성 그리고 완전히 연계된 유체와 구조간의 상호작용 메커니즘들을 무시한 파이프와 유체의 운동방정식을 풀었다. 최근의 연구들에서는 유체에 의해 파이프의 벽에 가해지는 동적인 힘들이 파이프에 운동을 일으키고, 그런 운동이 유체의 과도양상을 상당히 변화시킬 수 있음을 보여주고 있다[11-14]. 따라서, 파이프계에서 구조물의 진동과 유체의 거동을 정확하게 해석하기 위해서는 유체-파이프간의 상호작용에 대한 연계메커니즘이 더욱 엄격하게 모델링되어야 한다.

파이프의 유체유발진동에서 괄목할 만한 연구는 Ashley와 Haviland[1]에 의해 Trans-Arabian 파이프라인의 진동을 규명하기 위해 맨 처음으로 행하여졌다. 이후에, Housner[2]는 해밀톤원리에 의해 코리올리력의 영향을 포함한 좀더 정확한 식을 개발하였고 유속의 한계 값을 초과할 때 좌굴이 일어날 수 있음을 밝혔다. Long[3]은 맨 처음으로 유체를 포함하고있는 외팔보형태의 파이프를 연구했고, 실험적으로 단순지지된 파이프와는 반대로 외팔보형태의 파이프는 어떤 유속에서는 내부유동에 의해 감쇠되어진다는 것을 보였다. 유압의 영향은 가장 먼저 Heinrich[4]에 의해 고려되었다.

Gregory와 Paidoussis[5]는 외팔보형태의 파이프가 좌굴(발산)보다는 플러터(flutter)에 영향을 받음을 밝혔다. Benjamin[6]은 분절된 외팔보에서는 플러터가 존재함을 증명했다. Chen[7]은 처음으로 정상진동유동에 의해 단순지지보의 안정성을 연구했다. Skalak[8], Williamms[9] Walker과 Phillips[10], 그리고 Wiggert등[11]들은 유체와 파이프의 벽 사이의 연계된 Poisson의 영향을 고려하였다. Wiggert등[13] 와 Lesmez등[12]은 이전에 개발되었던 운동방정식에 횡방향진동에 대한 영향을 추가하였다. 따라서, 이제까지 완전히 연계된 유체-구조 상호작용 메커니즘은 특히 횡방향진동에 대해서는 고려되어진 적이 없었다. 이러한 완전히 연계된 유체-구조 상호작용 메커니즘을 포함한 운동방정식은 Lee등[14]에 의해 유도되었다.

따라서, 이 논문의 목적은 : (1)완전히 연계된 유체-구조간의 연계메커니즘을 가지는 운동방정식을 다루기 위한 수치해석 알고리즘을 제시하고 (2)몇몇 예제를 통해 본 연구에서 사용한 수학적 모델과 수치해석기법을 검토한 후 유체-구조간의 연계메커니즘의 영향에 대해 고찰하고자 한다.

2. 운동방정식

그림 1에 나타난 것처럼 α 만큼 기울어진 파이프가 미소의 변형을 했다고 하자. 파이프는 횡방향으로 w 만큼, 축방향으로 u 만큼의 변형을 정적 평형상태로부터 갖는다. 내부유체를 포함한 파이프요소를 그림 2와 같이 검사체적으로 표현된 유체요소와 유체를 제거한 파이프 구조요소로 나눈다. 여기서, T 는 파이프요소에 가해지는 인장력이고, M 은 굽힘 모멘트, Q 는 전단력을 나타낸다. c 는 유속을 나타내고 p 는 유체의 압력을 말한다. 운동방정식을 유도하기 위해 다음과 같은 가정을 하였다. 파이프내의 유동은 비정상 일차원 점성유동으로 가정하고, 유체의 유동에 의해 발생하는 파이프의 변형과 진동의 크기는 작다고 한다. 뉴턴의 운동법칙을 이용하여 운동방정식을 유도하면 다음과 같다.

* 인하대학교 기계공학과 대학원
** 인하대학교 기계공학과, 정회원

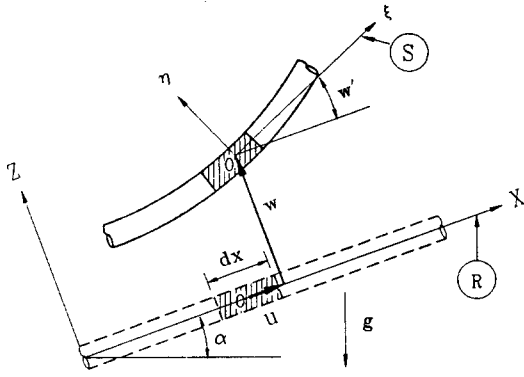


그림 1. 파이프의 미소요소

$$T - Qw' - Qw'' + Nw' + \gamma S - m_p g_x = m_p \ddot{u} \quad (1)$$

$$Q + Tw' + T'w - N + \gamma Sw' - m_p g_z = m_p \ddot{w} \quad (2)$$

여기서, m_p 는 파이프의 단위길이당의 질량, g_x 와 g_z 는 중력가속도의 x 와 z 방향성분이다. 유체의 연속방정식과 운동량방정식의 유도에는 파이프의 탄성변형을 고려하여 이동변형검사체적(deformable moving control volume)[21]을 이용한다. 그림 2로부터 유체의 연속방정식과 운동량방정식을 나타내면 다음과 같다.

$$\frac{d}{dt} \int_{CV} \rho_w dv + \int_{CS} \rho_w {}^C S V dA = 0 \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \sum \mathbf{F} = & \frac{d}{dt} \int_{CV} {}^S V \rho_w dv + \int_{CS} {}^S V \rho_w {}^C S V dA \\ & + \int_{CV} ({}^R \mathbf{a}^C + 2 {}^R \boldsymbol{\omega}^S \times {}^S \mathbf{V}_o) \rho_w dv \end{aligned} \quad (4)$$

여기서, ρ_w 는 단위체적당 유체의 질량이고, dv 는 미소검사체적, dA 는 검사체적표면(CS)에 대해 바깥쪽으로 나가는 면적벡터이다. 아래첨자 (o)는 검사체적의 중심에서의 값을 의미한다. 식(3), (4)에 나타난 각 항을 유도하면 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} {}^R \mathbf{a}^C &= \ddot{u} \mathbf{n}_x + \ddot{w} \mathbf{n}_y \\ {}^R \boldsymbol{\omega}^S &= -\dot{w}' \mathbf{n}_z \\ {}^S \mathbf{V}_o &= c \mathbf{n}_x + cw' \mathbf{n}_y \\ {}^S \mathbf{V} &= (c \mp \frac{1}{2} c' dx \mp \frac{1}{2} u' dx) \mathbf{n}_x + \\ & \quad (cw' \mp \frac{1}{2} c' w' dx \mp \frac{1}{2} cw'' dx) \mathbf{n}_y \\ {}^C S \mathbf{V} &= (c \mp \frac{1}{2} c' dx) \mathbf{n}_x + \\ & \quad (cw' \mp \frac{1}{2} c' w' dx \mp \frac{1}{2} cw'' dx) \mathbf{n}_y \end{aligned} \quad (5)$$

여기서, $\mathbf{n}_x, \mathbf{n}_y, \mathbf{n}_z$ 는 x, y, z 방향의 단위벡터이다. 식(5)와 검사체적에 대한 힘의 평형을 고려하면,

한개의 연속방정식과 두개의 운동량방정식을 얻게 된다.

$$\frac{\check{\rho}_w}{\rho_w} + \frac{\check{A}}{A} + c' = 0 \quad (6)$$

$$\begin{aligned} (pA)' + Nw' + \gamma S + \\ m_w(g_x + \ddot{u} + c + cc' + cu') = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} (pAw')' - N + \gamma Sw' + m_w(g_z + \\ \ddot{w} + cw' + 2cw'' + c^2 w''' + cc'w') = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

여기서, ($\check{\quad}$)는 $\partial/\partial t + c \partial/\partial x$ 이다. 위에서 유도된 식들을 변환시키기 위해서 다음의 관계식들을 이용한다.

$$Q = -EI_p w'''' \quad (9)$$

$$T = EA_p u' + 2\nu pA \quad (10)$$

$$\frac{\check{\rho}_w}{\rho_w} = \frac{\check{p}}{E\nu} \quad (11)$$

$$\frac{\check{A}}{A} = \frac{D}{Et} (\check{p} - \frac{\nu}{2A} \check{T}) \quad (12)$$

여기서, E 는 파이프의 탄성계수이고, I_p 와 A_p 는

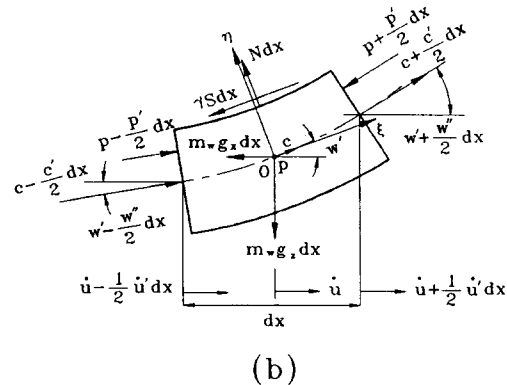
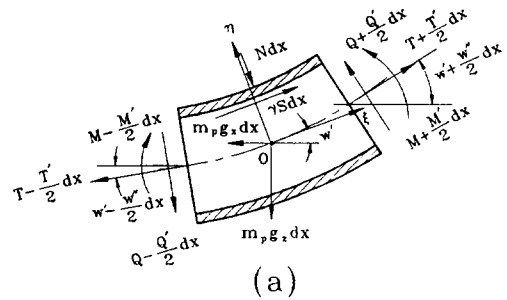


그림 2. 자유물체도 (a)파이프요소, (b)이동변형검사체적

파이프의 단면에 대한 관성모멘트와 단면적, E_v 는 유체의 체적탄성계수이다. D 는 파이프의 내경이며, t 는 파이프의 두께, ν 는 포아송비이다.

식(7), (8)를 식(1)에 대입하고 식(9-12)을 식(2)에 대입하면, 파이프의 축방향, 횡방향진동에 대한 운동방정식이 다음과 같이 유도된다.

$$m_p \ddot{u} = EA_p u'' - (1-2\nu)(pA)' - m_w(\dot{c} + cc') - mg_x \quad (13)$$

$$m\ddot{w} = EI_p w'''' + \{(pA - 2\nu pA - EA_p u')w'\}' + mg_z + m_w(\dot{c}w' + 2cw' + c^2 w'' + cc' w') \quad (14)$$

다시, 식(11)과 (12)를 식(9)에 대입하면, 유체의 연속방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$(\overline{pA}) + m_w a^2 (c' - 2\nu u') = 0 \quad (15)$$

여기서,

$$a^2 \equiv \frac{E_v / \rho_w}{1 + E_v D / E t} \quad (16)$$

$$m = m_p + \rho_w A$$

식(7)과 (8)로부터 고차 항을 무시하고 유체의 점성마찰에 의한 γS 항을 Darch-Weisbach의 마찰계수식[20]을 이용하여 표현하면, 운동량방정식은 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$(pA)' + m_w(g_z w' + g_x + \dot{c} + cc' + \frac{f_s}{2D} |c|c) = 0 \quad (17)$$

3. 유한요소모델링

여기서는, 앞에서 유도된 네개의 파이프계의 유체유발 운동방정식을 해석하기 위한 유한요소모델을 개발하고자 한다. 이를 위해서, 하나의 유한요소내에서는 파이프의 단면이나, 내경, 유체의 밀도 등이 일정하다고 가정한다. 식(17)을 이용하여 식(13)과 (14)에 나타나는 유속에 대한 미분항들을 제거하면 이들 식은 다음과 같이 표현된다.

$$m_p \ddot{u} - EA_p u'' = 2\nu A p' + m_w g + z w' - m_p g_x + m_w \frac{f_s}{2D} |c|c \quad (18)$$

$$m\ddot{w} + EI_p w'''' = EA_p u' w'' + 2\nu A p' w' + (2\nu - 1) A p w'' - m_w c w' + m_w g_x w' + m_w \frac{f_s}{2D} |c|c w' + m_w g_z w'^2 - m_w c^2 w'' - mg_z \quad (19)$$

$$\dot{p} + \rho_w a^2 c' = 2\rho_w a^2 \nu u' - cp' \quad (20)$$

$$\rho_w \dot{c} + p' = -\rho_w g_z w' - \rho_w g_x - \rho_w \frac{f_s}{2D} |c|c - \rho_w cc' \quad (21)$$

이 식들을 Galerkin법에 의해 정리하면 다음의 형태로 표현된다.

$$m_p \int_0^l \overline{u} \ddot{u} dx + EA_p \int_0^l \overline{u}' u' dx = m_w \frac{f_s}{2D} \int_0^l \overline{u} |c|c dx - 2\nu A \int_0^l \overline{u}' p dx + m_p g_x \int_0^l \overline{u} dx - m_w g_z \int_0^l \overline{u}' w' dx \quad (22)$$

$$m \int_0^l \overline{w} \ddot{w} dx + EI_p \int_0^l \overline{w}'' w'' dx = EA_p \int_0^l \overline{w} u' w' dx + m_w g_z \int_0^l \overline{w} w'^2 dx + A \int_0^l \overline{w} p' w' dx - m_w \int_0^l \overline{w} c w' dx + m_w \frac{f_s}{2D} \int_0^l \overline{w} |c|c w' dx - m g_z \int_0^l \overline{w} dx - m_w \int_0^l \overline{w} c c w' dx - m_w g_x \int_0^l \overline{w}' w dx + (1-2\nu) A \int_0^l \overline{w}' p w' dx \quad (23)$$

$$\int_0^l \overline{p} \dot{p} dx + \rho_w a^2 \int_0^l \overline{p} c' dx = -2\rho_w a^2 \nu \int_0^l \overline{p}' c dx - \int_0^l \overline{p} c p' dx \quad (24)$$

$$\rho_w \int_0^l \overline{c} \dot{c} dx + \int_0^l \overline{c} p' dx = \rho_w g_z \int_0^l \overline{c}' w dx - \rho_w g_x \int_0^l \overline{c} dx + \frac{\rho_w}{2} \int_0^l \overline{c}' c^2 dx - \rho_w \frac{f_s}{2D} \int_0^l \overline{c} |c|c dx \quad (25)$$

여기서, l 은 유한요소의 길이이고, $(\overline{\quad})$ 는 가상변위를 의미하며, u, w, c, p 는 각각 다음과 같이 표현한다.

$$\begin{aligned} u(x, t) &= N_1^T(x) \tilde{u}(t) \\ w(x, t) &= N_2^T(x) \tilde{w}(t) \\ c(x, t) &= N_3^T(x) \tilde{c}(t) \\ p(x, t) &= N_4^T(x) \tilde{p}(t) \end{aligned} \quad (26)$$

여기서, N_1, N_3, N_4 는 선형의 형상함수로 된 벡터이고, N_2 는 3차다항식으로 된 형상함수벡터이다. 식(22-25)를 행렬의 형태로 나타내면 다음과

같이 연립 행렬방정식으로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} M_s \dot{q} + K_s q &= F_s \\ C_f \dot{r} + K_f r &= F_f \end{aligned} \quad (27)$$

여기서,

$$\begin{aligned} M_s &= \begin{bmatrix} M_u & 0 \\ 0 & M_w \end{bmatrix}, & K_s &= \begin{bmatrix} K_u & 0 \\ 0 & K_w \end{bmatrix}, \\ F_s &= \begin{bmatrix} f_u \\ f_w \end{bmatrix}, & q &= \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} \\ C_f &= \begin{bmatrix} C_c & 0 \\ 0 & C_p \end{bmatrix}, & K_f &= \begin{bmatrix} 0 & K_c \\ K_p & 0 \end{bmatrix}, \\ F_f &= \begin{bmatrix} f_c \\ f_p \end{bmatrix}, & r &= \begin{bmatrix} c \\ p \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (28)$$

식(27)에서 $M_u, M_w, K_u, K_w, C_c, C_p, K_c, K_p$ 들은 각각 축방향과 횡방향의 변위, 유속, 압력에 대한 질량, 강성을 나타내는 행렬식이고, f_u, f_w, f_c, f_p 들은 각각 비선형 및 연계된 항들을 나타내는 벡터들이다.

4. 수치해석

앞에서 유도한 유한요소모델을 일반적인 파이프계의 진동문제에 적용하기 전에 구조의 영향을 무시한 유체만의 비정상 관내 유동문제에 적용시켜서 여기에서 이용하는 유체방정식들의 타당성을 검증하고자 한다. Wylie등[16]이 다룬 바 있는 예제를 통해서 이를 확인하고자 한다.

그림 3에 나타난 것과 같은 저수조와 직관 밸브 등으로 이루어진 파이프라인에서 밸브의 급격한 동작에 의해서 수격현상이 일어난다. 이때의 유동의 동적거동을 시뮬레이션 하였다. 저수조의 수두(H_R)는 150m이고, 직관의 길이는 600m이다. 밸브가 2.1초만에 완전히 닫힌다고 할 때, 이때 나타나는 밸브에서의 수두변화와 저수조 입구에서의 유속의 변화를 그림 4에 나타내었다. ○는 압력, □는 유속의 변화를 Characteristics법을 이용해 Wylie[16]가 계산한 값이고, 실선들은 여기에서 개발된 유한요소법에 의해 계산된 값들이다. 그림 4에서 알 수 있는 것처럼 파이프라인에 대한 기존의 해석결과가 본 연구의 유한요소법에 의한 결과

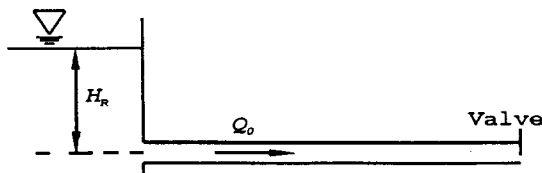


그림 3. 수격현상 모델

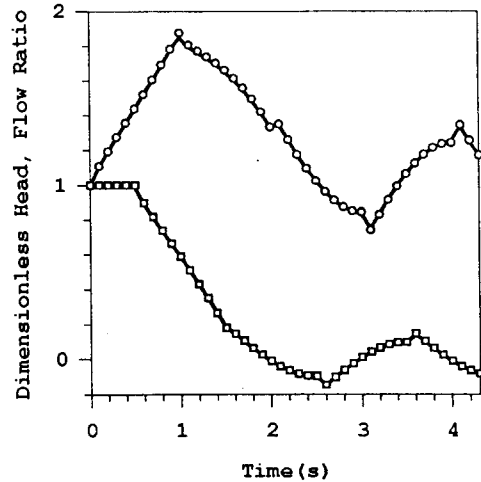


그림 4. 유한요소법에 의한 결과와 Wylie[16]의 수치해석 결과와의 비교

와 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. 따라서, 앞에서 유도한 유체에 관련된 식들이 타당함을 증명하였다.

이제, 파이프와 유체가 완전히 연계된 일반적인 유체유발진동문제에 앞에서 유도한 유한요소모델을 적용하기 위한 수치해석 알고리즘을 개발하고자 한다.

그림 5에 나타난 것처럼 본 연구에서 개발된 전산프로그램은 유동이 정상상태로 흐르는 상태에서의 파이프구조의 정적 변형, 고유진동수, 동적 응답을 계산할 수 있다. 특히, 동적 응답을 계산하기 위해서 비선형항과 연계된 미분방정식들을 4차 Runge-Kutta 알고리즘을 이용하여 풀었다. 이차 미분방정식을 풀기 위해서는 다음과 같이 일차의 상태변수의 형태로 변환해야만 한다.

$$C \dot{s} + Ds = F \quad (29)$$

여기서,

$$\begin{aligned} C &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & C_f \end{bmatrix}, & D &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & K_f \end{bmatrix}, & F &= \begin{bmatrix} B \\ F_f \end{bmatrix} \\ A &= \begin{bmatrix} 0 & -I \\ M_s^{-1}K_s & 0 \end{bmatrix}, & B &= \begin{bmatrix} 0 \\ M_s^{-1}F_s \end{bmatrix} \\ s &= \{q, \dot{q}, r\}^T \end{aligned} \quad (30)$$

식(27)로부터 식(29)으로 변환된 식은 구조관련 식은 크기가 1.5배 커진다. 더욱이, C, D 와 같이 행렬의 형태로 표현될 경우 전체의 크기는 더욱 커지게 된다. 특히, F 의 경우 복잡하게 연계된 비선형항들을 많이 포함하기 때문에 수치해석을 할

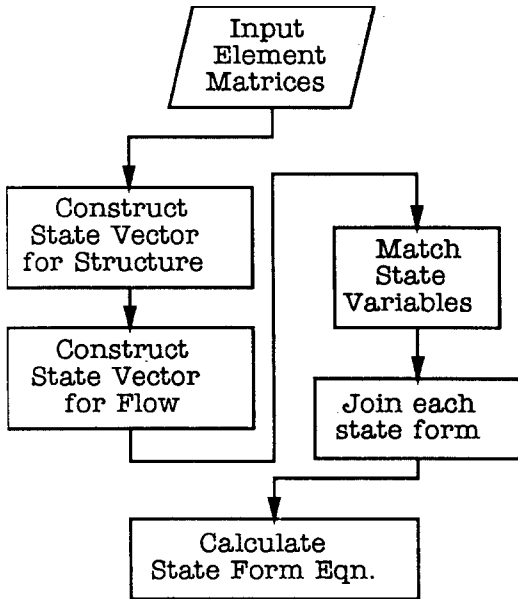


그림 5. 연계된 유체-파이프문제에 위한 흐름도

때에 많은 시간이 소요된다. 따라서, 상태변수의 형태로 완전히 바꾸어 계산하는 데 좀 더 적은 시간과 컴퓨터 용량을 사용하기 위해 식(27)에서 구조식들을 먼저 상태변수의 형태로 나타내고, 유체식들도 역시 같은 형태로 나타낸다. 그리고, 이 두 상태벡터를 식(29)의 형태로 변환하면 최종적인 식은 다음과 같다.

$$\dot{s} = \begin{Bmatrix} -A Q + B \\ -C_f^{-1} K_f r + C_f^{-1} F_f \end{Bmatrix} \quad (31)$$

$$Q = \{ q, \dot{q} \}^T$$

파이프와 유체가 완전히 연계된 문제를 다루기

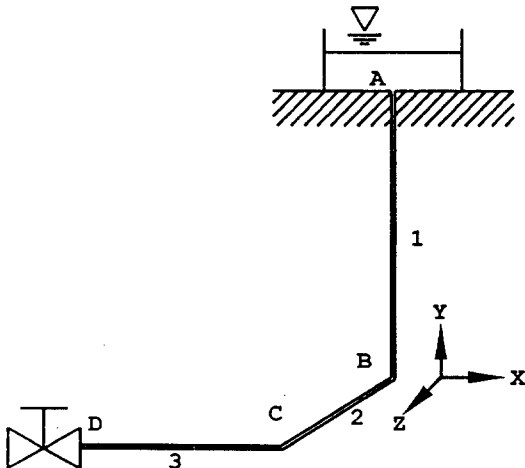


그림 6. 구조와 유체가 연계된 파이프라인 모델

위해 그림 6과 같은 Wiggert등[13]이 다룬 바 있는 모델을 본 연구에서도 다루고자 한다. A점은 저수조, B점과 C점은 엘보우이며, D점은 밸브의 바로 앞점이다. 파이프의 재질은 구리이고, 파이프 요소 1의 길이는 28m, 2는 7.6m, 3은 12.25m이다. 밸브가 닫히는 데 걸리는 시간은 4ms이고, 초기 유속은 1m/s이다. 밸브의 동작에 의해 발생한 파동이 파이프라인을 따라 전파될 때에 유동의 특성과 파이프의 진동상태가 변화한다. 파이프라인의 경계조건은 파이프요소1은 완전히 고정되어 있고, 요소2와 3은 Y축방향의 변위만이 고정되어 있고 X-Z평면에 대해서는 자유로이 움직일 수 있다. 이때, 밸브의 바로 앞에서의 압력과 C점에서의 X축방향으로의 파이프의 속도를 그림 7과 8에 나타내었다.

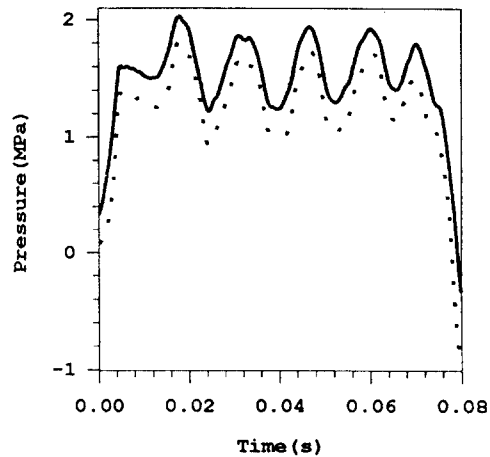


그림 7. D점에서의 유체압력의 변화

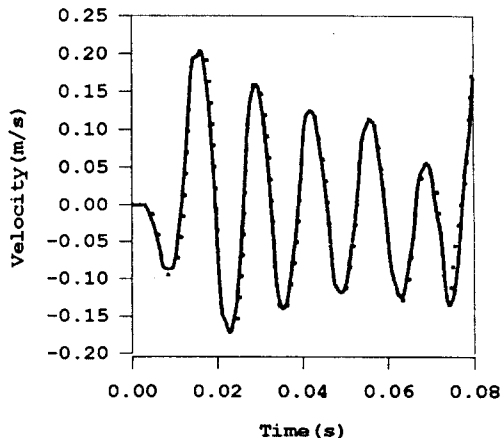


그림 8. C점에서의 파이프의 X축방향의 속도

그림 7에서 실선은 본 연구에서 사용한 전산프로그램에 의한 결과이고, 점선은 Wiggert[13]가 사용한 식을 본 프로그램에 적용하여 얻은 결과이다. 두 그래프의 값이 차이가 나는 것은 Wiggert[13]의 식에서는 중력의 영향을 무시하고 있기 때문이다. 그림 8에서는 초기 유속이 1m/s로 고정되어 있기 때문에 거의 일치하는 곡선을 보이고 있다.

5. 결론 및 고찰

본 연구에서는 유체와 파이프간의 완전 연계성을 포함하는 유한요소모델을 유도하고 Runge-Kutta 알고리즘을 적용하기 위한 수치해석 기법을 개발하였다. 기존의 연구자들이 다룬 바 있는 문제들을 다루어 봄으로써 본 연구결과의 신빙성을 점검하였으며, 다른 연구자들이 사용해 온 파이프의 진동방정식에서는 무시해 온 유체에 의해 발생하는 힘들의 영향을 고찰하였다. 그 결과, 유체가 고속으로 흐를 때 이들의 영향을 무시할 수 없음을 알았다. 앞으로, 더 다양한 경계조건에 대한 연구와 좀 더 효율이 높은 수치해석 기법의 개발이 요구된다.

참고도서

1. Ashley, H. and Haviland, G., 1950, Bending vibrations of a pipe line containing flowing fluid, *ASME Journal of Applied Mechanics*, 72, 229-232.
2. Housner, G. W., 1952, Bending vibrations of a pipe line containing flowing fluid, *ASME Journal of Applied Mechanics*, 19, 205-209.
3. Long, R. H., Jr., 1955, Experimental and theoretical study of transverse vibration of a tube containing flowing fluid, *ASME Journal of Applied Mechanics*, 22(1), 65-68.
4. Heinrich, G., 1956, Vibrations of tuber with flow, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, 36(11/12), 417-429.
5. Gregory, R. W. and Paidoussis, M. P., 1966, Unstable oscillation of tubular cantilevers conveying fluid - I. Theory and II. Experiments, *Proceedings of the Royal Society*, 293(A), 512-542.
6. Benjamin, T. B., 1961, Dynamics of a system of articulated pipes conveying fluid -I. Theory and II. Experiments, *Proceedings of the Royal Society*, 261(A), 457-499.
7. Chen, S. S. and Rosenberg, G. S., 1971, Argonne National laboratory, Argonne, IL,

Vibration and stability of a tube conveying fluid, *USAEC Report ANL-7762*.

8. Skalak, R., 1956, An extension of the theory of water hammer, *Transactions of ASME*, 78(1), 105-116.
9. Williams, D. J., 1977, Water hammer in non-rigid pipes : Precursor waves and mechanical damping, *Journal of Mechanical Engineering Science*, 19(6), 237-242.
10. Walker, J. S. and Phillips, J. W., 1977, Pulse propagation in fluid tubes, *ASME Journal of Applied Mechanics*, 31-35.
11. Wiggert, D. C., Otwell, R. S., and Hatfield, F. J., 1985, The effect of elbow restraint on pressure transients, *ASME Journal of Fluids Engineering*, 107(3), 402-406.
12. Lesmez, M. W., Wiggert, D. C., and Hatfield, F. J., 1990, Modal analysis of vibrations in liquid-filled piping systems, *ASME Journal of Fluids Engineering*, 109(3), 311-318.
13. Wiggert, D. C., Hatfield, F. J., and Stuckenbruck, S., 1987, Analysis of liquid and structural transients in piping by the method of characteristics, *ASME Journal of Fluids Engineering*, 109(2), 161-165.
14. Lee, U., Pak, C. H. and Hong, S. C., 1994, Dynamics of Piping system with Internal Unsteady Flow (in Press), *Journal of Sound and Vibration*.
15. Hansen, A. G., 1967, *Fluid Mechanics*, John Wiley & Sons, Inc., New York
16. Wylie, E. B., Streeter, V. L., Suo, L., 1993, *Fluid Transients in Systems*. Prentice Hall
17. Blevins, R. D., 1990, *Flow-Induced Vibration*. 2nd Van Nostrand Reinhold, New York
18. Craig, R. R. Jr, 1981, *Structural Dynamics: An Introduction to Computer Methods*, John Wiley & Sons, New York
19. Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L., 1991, *The Finite Element Method*, 4th ed., Volume 2., McGraw-Hill Book Company
20. White, Frank M., 1986, *Fluid Mechanics*, McGraw-Hill Book Company