한국소음진동공학회 '94 추계학술대회논문집 pp. 244-249

볼트 결합부의 동적 파라미터 해석

0백 성 남*, 지 태 한**, 박 영 필***

(Dynamic Parameter Analysis of Bolted Joint)

(Sung-Nam Back, Tae-Han Jee, Young-Pil Park)

Abstract : The dynamic characteristics of mechanical structure are strongly affected by the properties of joint parameters. In this study, the test structures are constructed with two beam structures which are clamped by bolts, and a bolted joint which is modelled as a lumped stiffness element. To identify the dynamic joint parameters with variance of clamping torque of bolts, the sensitivity analysis and the mode energy analysis methods are investigated experimentally. As a result of these two methods, stiffnesses of bolted joint are experimentally found to increase as the clamping torque increases. These stiffnesses identified from the sensitivity analysis and the mode energy analysis method have some difference.

1. 서론

기계구조물의 동특성을 해석하기 위하여 유한요소법에 의한 수치해석 방법과 실험적 해석 방법이 개발되고 널리 사용되고 있다. 일반적으로 기계구조물의 경우에 있어서 결합부의 존재는 유한요소 모델의 오차를 크게하며 이 같은 결합부의 정확하고 유용한 유한요소 모델링은 유한요소해석의 정확도를 높이는데 필요하다.

결합부의 동적 파라미터를 규명하기 위하여 孫國—[1],[2] 등은 감도해석법(sensitivity analysis method)을 이용하여, 비감쇠계인 구조물의 유한요소 해석에서 얻은 모우드 특성과 실험에서 얻은 결과와 비교하여, 기존의 유한요소 모델을 수정하는 방법을 시도하였다.

한편 大熊[3]등은 대상 구조물을 몇 개의 부분구조로 분할하고 통상의 진동실험으로부터 얻은 전달함수를 이용하여 저차의 공진주파수 부근에서 대상 구조물 내부의 파워 흐름을 이용하여, 각 부분구조의 내부손실계수(internal loss factor)를 구하는 방법인 모우드에너지해석법(mode energy analysis method)을 제시하였다.

따라서 본 연구에서는 볼트로 결합된 보 구조물에서, 볼트에 가해지는 체결토오크의 변화에 따라서 집중강성요소로 모델링된 결합부의 동적 파라미터인 결합부 강성을 감도해석법과 모우드에너지해석법을 적용하여 동정하고, 이 두 방법으로 구한 결합부 강성값을 비교하는 연구를 수행하였다.

2. 이론해석

2.1 감도해석법

일반적으로 비감쇠계에 대한 고유치문제는 다음과 같이 표시된다.

$$\{\lambda_r[M]-[K]\}\{\phi_r\}=\{0\} \tag{1}$$

설계변수 γ가 γ_o에서 미소량 ε만큼 변화됨에 따라서 테일러 급수로 전개하면 $[M]$, $[K]$는 다음과 같이 바뀌게 된다.

$$[M]=[M_o]+[M']\varepsilon+[M'']\varepsilon^2+\cdots$$
$$[K]=[K_o]+[K']\varepsilon+[K'']\varepsilon^2+\cdots$$
$$[M']=\frac{\partial[M]}{\partial\gamma},\quad [M'']=\frac{\partial^2[M]}{2\partial\gamma^2},\quad \cdots$$
$$[K']=\frac{\partial[K]}{\partial\gamma},\quad [K'']=\frac{\partial^2[K]}{2\partial\gamma^2},\quad \cdots \tag{2}$$

여기서 ε^2이상의 항을 무시할 경우 고유치가 λ_{or}에서 λ_r로, 고유벡터가 $\{\phi_{or}\}$에서 $\{\phi_r\}$로 변한다고 보면 다음과 같이 표시된다.

$$\lambda_r=\lambda_{or}+\left(\frac{\partial\lambda_r}{\partial\gamma}\right)\varepsilon=\lambda_{or}+\lambda_r'\varepsilon \tag{3}$$

$$\{\phi_r\}=\{\phi_{or}\}+\left(\frac{\partial\{\phi_r\}}{\partial\gamma}\right)\varepsilon=\{\phi_{or}\}+\{\phi_r'\}\varepsilon \tag{4}$$

여기서 $\lambda_r=\Omega_r^2$ 이므로 고유진동수의 1차 감도는 다음이 된다.

$$\Omega_r'=\frac{\partial\Omega_r}{\partial\gamma}=\frac{\lambda_r'}{2\Omega_{or}} \tag{5}$$

위와 같은 정의에서 고유치의 1차 감도 λ_r'과 고유벡터의 1차 감도 $\{\phi_r'\}$를 구해보면 다음과 같다.

$$\lambda_r'=\{\phi_{or}\}^T([K']-\lambda_{or}[M'])\{\phi_{or}\} \tag{6}$$

또한 고유진동수의 1차 감도는 식(5)에 의해 다음이 성립한다.

$$\Omega_r'=\frac{\{\phi_{or}\}^T([K']-\Omega_{or}^2[M'])\{\phi_{or}\}}{2\Omega_{or}} \tag{7}$$

한편 고유벡터의 1차 감도 $\{\phi_r'\}$은 N차원의 벡터이므로 N개의 고유벡터 $\{\phi_{ol}\}$ $(l=1\sim N)$의 1차 결합으로 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\{\phi_r'\}=\sum_{l=1}^{N}a_{rl}\{\phi_{ol}\} \tag{8}$$

* 현대자동차 마북리연구소
** 연세대 대학원 기계공학과
*** 연세대학교 기계공학과

$$a_{ri} = \frac{\{\phi_{oi}\}^T(\lambda_{or}[M'] - [K'])\{\phi_{or}\}}{(\lambda_{oi} - \lambda_{or})}, \quad (i \neq r) \qquad (9)$$

$$a_{rr} = -\frac{\{\phi_{or}\}^T[M']\{\phi_{or}\}}{2} \qquad (10)$$

식(9)와 식(10)을 식(8)에 대입하면 고유벡터의 1차 감도 $\{\phi_r'\}$을 구할 수 있다.

2.2 모우드에너지해석법

전체 구조물을 Fig.1에서와 같이 두개의 분계와 탄성결합부로 분할한 경우, 에너지 평형방정식은 다음의 두 경우에 대하여 구성할 수 있다[4].

① 분계 1을 가진할 경우

$$\begin{aligned} \mu_{11}E_{11} + W_{11} &= P_1 \\ \mu_{22}E_{12} - W_{11} &= 0 \end{aligned} \qquad (11)$$

여기서, μ_{11} : 분계 1의 내부손실계수 (1/sec)
μ_{22} : 분계 2의 내부손실계수 (1/sec)
E_{11} : 분계 1의 진동에너지의 시간평균값 (Nm)
E_{12} : 분계 2의 진동에너지의 시간평균값 (Nm)
W_{11} : 분계 1에서 분계 2로 전달되는 파워의 시간평균값 (Nm/sec)
P_1 : 분계 1에 주어지는 입력 파워의 시간평균값 (Nm/sec)

② 분계 2를 가진할 경우

$$\begin{aligned} \mu_{11}E_{21} - W_{22} &= 0 \\ \mu_{22}E_{22} + W_{22} &= P_2 \end{aligned} \qquad (12)$$

여기서 E_{21} : 분계 1의 진동에너지의 시간평균값
E_{22} : 분계 2의 진동에너지의 시간평균값
W_{22} : 분계 2에서 분계 1로 전달되는 파워의 시간평균값
P_2 : 분계 2에 주어지는 입력 파워의 시간평균값

구성된 에너지 평형방정식중 우선 분계 1을 $f(t) = Fe^{j\omega t}$로 가진할 경우, 가진력과 같은 방향의 가진점 f의 속도는 아래 식과 같다. 여기서 $H_f(\omega)$는 가진점의 모빌리티(mobility)이다.

$$v_f(t) = V_f e^{j\omega t} = H_f(\omega) F e^{j\omega t} \qquad (13)$$

입력 파워의 시간평균값은 다음과 같다[5].

$$P_1 = \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{Re}\{f(t)\}\,\mathrm{Re}\{v_f(t)\}\,dt, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad (14)$$

$$P_1 = \frac{1}{2}F^2\,\mathrm{Re}\{H_f(\omega)\} = \frac{1}{4}F(V_f + V_f^*) \qquad (15)$$

분계 1을 공진주파수로 가진할 경우 분계 1과 분계 2의 진동에너지의 시간평균값은 다음과 같다.

$$E_{11} = \frac{1}{4}(\{V_1\}^T[M_1]\{V_1\}^* + \{V_1^*\}^T[M_1]\{V_1\})$$

$$E_{12} = \frac{1}{4}(\{V_2\}^T[M_2]\{V_2\}^* + \{V_2^*\}^T[M_2]\{V_2\}) \qquad (16)$$

여기서 $[M_1]$, $[M_2]$는 분계 1과 분계 2의 질량행렬이고, $\{V_1\}$, $\{V_2\}$는 분계 1과 분계 2의 속도 크기 벡터이다. 한편 분계 1에서 분계 2로 전달되는 파워의 시간평균값 W_{11}은 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$W_{11} = \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{Re}\{v_{1j}(t)\}^T[K_j]\,\mathrm{Re}\{x_{1j}(t) - x_{2j}(t)\}\,dt$$

$$= K_y Q_{1y} + K_\theta Q_{1\theta}, \quad (T = \frac{2T}{\omega}) \qquad (17)$$

여기서 $[K_j]$는 탄성결합 요소의 강성행렬을 나타내며 다음 식이 성립한다.

$$Q_{1y} = \frac{1}{4}(\dot{y}_1(y_1^* - y_2^*) + \dot{y}_1^*(y_1 - y_2)) \qquad (18)$$

$$Q_{1\theta} = \frac{1}{4}(\dot{\theta}_1(\theta_1^* - \theta_2^*) + \dot{\theta}_1^*(\theta_1 - \theta_2)) \qquad (19)$$

분계 2를 가진할 경우에도 각 분계 내의 변위와 속도 응답을 이용하여 P_2, E_{21}, E_{22}, W_{22}를 계산할 수 있으며 $W_{22} = K_y Q_{2y} + K_\theta Q_{2\theta}$라 정의하면 에너지 평형방정식은 다음과 같이 새롭게 구성할 수 있다.

$$\begin{aligned} \mu_{11}E_{11} + K_y Q_{1y} + K_\theta Q_{1\theta} &= P_1 \\ \mu_{22}E_{12} - K_y Q_{1y} - K_\theta Q_{1\theta} &= 0 \\ \mu_{11}E_{21} - K_y Q_{2y} - K_\theta Q_{2\theta} &= 0 \\ \mu_{22}E_{22} + K_y Q_{2y} + K_\theta Q_{2\theta} &= P_2 \end{aligned} \qquad (20)$$

윗식에서 미지수 μ_{11}, μ_{22}, K_y, K_θ를 제외한 항들은 가진주파수에 의해 결정된다. 따라서 각 분계를 공진 주파수로 가진할 경우 분계의 변위 및 속도 응답으로 부터 에너지 평형방정식인 식(20)을 구성하여 μ_{11}, μ_{22}, K_y, K_θ를 구할 수 있다.

3. 실험장치 및 방법

결합부의 강성을 동정하기 위해 Fig.2와 같이 양 끝단이 자유상태인 5개의 원형 보 모델을 구성한다. 각 모델들은 2개의 분계인 보로 구성되어 있으며 플랜지 부분이 볼트로 결합된다. 각 모델의 재질은 SM45C이며 결합부는 6개의 렌치 볼트로 결합된다.

요소수의 차이에 의한 유한요소해석 결과의 차이가 나타나지 않도록 각 모델을 양 분계의 플랜지 부분과 결합부분을 포함하여 총 15개의 요소로 분할하였다. 결합부 요소는 결합영역의 병진과 회전 자유도에 관련된 두 개의 집중강성 즉 병진방향의 선형강성(linear stiffness) K_y와 회전방향의 회전강성(rotational stiffness) K_θ로 모델링하였다.

실험에 사용된 볼트 결합부를 가진 보 구조물은 양단이 자유상태가 되도록, Fig.3에 나타낸 바와같이 약한 스프링으로 지지하였으며, 충격 가진점의 수는 앞 절 유한요소 모델의 절점의 수와 같이 16 지점이고 충격 가진 방향은 각 절점의 병진방향과 같다. 가속도의 측정점은 Fig.3의 A점에 위치한다.

또, 모달파라미터의 추정은 LMS사의 CADA-X[6]를 이용하였다.

4. 실험결과

4.1 감도해석법

본 해석법의 적용을 위해 먼저 모델 #1과 모델 #2에 충격가진실험을 수행하여, 최소자승 복소지수법[6]에 의해 얻은 체결토오크에 따른 고유진동수와 감쇠비는 Table 1, Table 2와 같으며, 결합부가 강결합(rigid joint)인 경우의 고유진동수와 비교하였다. 볼트의 체결토오크가 증가할수록 고유진동수는 증가하며 감쇠비는 약간 감소하는 경향을 나타낸다. 그러나 Table 1에 보인 바와같이 모델

#1은 2차 공진 모우드에서 결합부의 병진방향 변위가 0이므로 고유진동수와 감쇠비는 체결토오크에 관계없이 일정한 경향을 보인다. 따라서 모델 #1에서는 볼트의 체결토오크의 변화는 결합부의 병진방향 성분에 관계없이 회전방향 성분의 변화로 나타난다.

Table 1 Natural frequency and damping ratio of model #1 by experiment

Mode No.		10kgf·cm	20kgf·cm	30kgf·cm	40kgf·cm	Rigid
1	Ω(Hz)	211.86	215.02	216.38	216.87	225.99
	ζ(%)	0.271	0.246	0.225	0.218	-
2	Ω(Hz)	651.51	651.53	651.56	651.50	654.80
	ζ(%)	0.060	0.058	0.058	0.060	-
3	Ω(Hz)	1128.22	1143.83	1151.05	1153.52	1205.00
	ζ(%)	0.084	0.063	0.052	0.054	-

Table 2 Natural frequency and damping ratio of model #2 by experiment

Mode No.		10kgf·cm	20kgf·cm	30kgf·cm	40kgf·cm	Rigid
1	Ω(Hz)	213.31	217.74	219.94	221.09	233.03
	ζ(%)	0.368	0.249	0.212	0.209	-
2	Ω(Hz)	624.46	628.83	631.06	632.16	651.74
	ζ(%)	0.072	0.063	0.062	0.060	-
3	Ω(Hz)	1196.00	1207.92	1214.43	1217.52	1272.94
	ζ(%)	0.079	0.074	0.074	0.070	-

볼트의 체결토오크 증가에 따라서 Table 1과 Table 2에 보인 바와같이 감쇠비의 감소량이 비교적 작고, 감쇠비의 크기도 매우 작으므로 비감쇠계로 가정한다. 먼저 모델 #1의 실험 모우드 해석 결과인 1차와 3차 고유진동수를 이용하여, 볼트의 체결토오크 증가에 따른 설계변수인 결합부의 회전강성 K_θ를 감도해석으로 동정한다. 다음으로 모델 #2의 실험 모우드 해석 결과인 1차, 2차, 3차 고유진동수를 이용하여, 앞에서 구한 결합부의 회전강성 K_θ를 알고있는 값으로 대입하고, 설계변수인 결합부의 선형강성 K_y를 감도해석으로 동정한다.

감도해석법에 의해 동정된 결합부 강성값은 Table 3에서보여주는 바와 같이 볼트의 체결토오크가 커짐에 따라 증가함을 알 수 있다. 감도해석을 수행한 후의 고유진동수는 Table 4와 Table 5에 나타나 있듯이 실험모우드 해석 결과와의 오차가 최대 약 ±3% 정도이며, Fig.4는 동정된 결합부의 강성치를 모델 #3, #4 ,#5에 대입하여 구한 고유진동수의 추정값과 실험값의 비를 나타낸다.

Table 3 Identified joint stiffness with the clamping torque by sensitivity analysis

Clamping Torque (kgf·cm)	K_θ (1×10^4 Nm/rad)	K_y (1×10^7 N/m)
10	5.8076	2.0290
20	7.6054	2.2516
30	8.7553	2.4375
40	9.2431	2.6690

Table 4 Comparison of natural frequency of model #1 by sensitivity analysis(SA)

Mode No.		10 kgf·cm	20 kgf·cm	30 kgf·cm	40 kgf·cm
1	Exp. (Hz)	211.86	215.02	216.38	216.87
	SA (Hz)	211.72	214.89	216.28	216.77
	Error (%)	-0.07	-0.06	-0.05	-0.05
3	Exp. (Hz)	1128.22	1143.83	1151.05	1153.52
	SA (Hz)	1129.04	1144.55	1151.60	1154.09
	Error (%)	+0.07	+0.06	+0.05	+0.05

Table 5 Comparison of natural frequency of model #2 by sensitivity analysis(SA)

Mode No.		10 kgf·cm	20 kgf·cm	30 kgf·cm	40 kgf·cm
1	Exp. (Hz)	213.31	217.74	219.94	221.09
	SA (Hz)	218.78	222.94	223.33	223.34
	Error (%)	+2.56	+2.39	+1.54	+1.02
2	Exp. (Hz)	624.46	628.83	631.06	632.16
	SA (Hz)	626.93	631.02	633.11	633.87
	Error (%)	+0.40	+0.35	+0.32	+0.32
3	Exp. (Hz)	1196.00	1207.92	1214.43	1217.52
	SA (Hz)	1193.58	1205.78	1212.44	1215.88
	Error (%)	-0.20	-0.18	-0.16	-0.13

4.2 모우드에너지해석법

4.2.1 모의실험

모의실험 대상 구조물은 Fig.2중에서 모델 #3으로 선정하고 분계 1의 감쇠가 증가하는 경우와 분계 1과 분계 2의 감쇠가 함께 증가하는 경우에 대하여 모의실험을 수행하였다. 결합부를 제외한 각 분계의 감쇠행렬은 $[C_1] = \alpha_1[M_1]+\beta_1[K_1]$, $[C_2] = \alpha_2[M_2]+\beta_2[K_2]$ 인 비례감쇠로 가정하고 초기 결합부 강성값은 $K_\theta = 6\times10^4$ (Nm/rad) , $K_y = 2\times10^7$ (N/m) 와 같이 선정하여 다음의 두가지 경우에 대하여 내부손실계수와 결합부의 회전강성과 선형강성을 동정한다.

① $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ 이고 $\beta_2 = 10^{-7}$ 으로 가정하고

$\beta_1 = 10^{-7} \sim 10^{-6}$으로 10단계 변화시켰을 경우

② $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ 이고 $\beta_1 = \beta_2 = 10^{-7} \sim 10^{-6}$으로 10단계 변화시키는 경우

회전방향의 변위는 Fig.5에서 보인 바와같이 2개의 요소로 구성된 보 구조물에서와 같이 병진방향의 변위차를 이용하여 회전방향의 변위를 구하는 방법을 사용한다[7].

모의실험결과, Fig.6에 보인 바와같이 분계 1의 감쇠가 커지는 경우에는 μ_{11}은 β_1에 비례적으로 증가하나, μ_{22}는 일정한 경향을 나타낸다. 한편 분계 1과 분계 2의 감쇠가 함께 증가하는 경우에는 μ_{11}과 μ_{22} 또한 증가하는 것을 Fig.8에 나타내었다. Fig.7과 Fig.9는 각 분계내 감쇠의 변화에 따른 모우드 에너지해석 결과인 결합부의 강성값을 나타내며 초기 선정값과 거의 일치함을 나타내었다. 단 분계내 감쇠가 커질수록 결합부 강성값과 초기 선정값과의 차이가 미소하게 증가하는 것을 알 수 있었다. 단순화된 회전방향의 변위와 속도를 이용하면 내부손실계수와 결합부 회전강성값이 약 1% 작아진다.

4.2.2 실험결과 검토

실험 대상 구조물을 모델 #2와 모델 #3로 선정하여 모우드 에너지해석을 수행하여 구한 분계 1과 분계 2의 내부손실계수는 Fig.10에 나타내었으며 결합부의 회전강성

과 선형강성을 구한 결과는 Table 6과 Table 7에 정리하였다. 볼트의 체결토오크의 증가에 비례하여 감쇠비가 감소한다는 것은 볼트 결합부를 가진 모델 내부의 감쇠가 감소한다고 볼 수 있으므로 본 해석법으로 구한 양 분계의 내부손실계수는 감소하는 현상을 나타낸다. 볼트의 체결토오크 증가에 따라서 감도해석법과 모우드에너지해석법을 이용하여 구한 결합부 강성값은 증가하는 경향을 나타내며 이를 Fig.11에 도시하였다. 결합부 강성의 정량적인 값은 감도해석법으로 구한 강성값 주위에 모우드 에너지 해석법으로 구한 결합부의 강성값이 분포함을 알 수 있다.

Table 6 Identified joint stiffness of model #2 by MEA

Clamping Torque (kgf·cm)	K_θ (1×10^4 Nm/rad)	K_y (1×10^7 N/m)
10	5.0775	1.2376
20	10.6360	1.1958
30	9.8365	1.7115
40	19.1020	2.7697

Table 7 Identified joint stiffness of model #3 by MEA

Clamping Torque (kgf·cm)	K_θ (1×10^4 Nm/rad)	K_y (1×10^7 N/m)
10	2.9171	1.2422
20	5.7149	1.2718
30	6.6395	3.3349
40	10.0620	5.2905

5. 결론

볼트로 결합된 보 구조물에 대하여 감도해석법과 모우드에너지해석법을 적용하여 모의실험과 실험을 수행함으로써 다음과 같은 결론을 얻었다.

1) 결합부를 갖는 보 구조물의 실험결과인 고유진동수를 이용하여 볼트의 체결토오크에 따른 결합부 강성을 감도해석법으로 규명하고 이의 타당성을 제시하였다.

2) 모우드에너지해석법의 이론적 타당성을 모의실험으로 검증하였으며 볼트에 가해지는 체결토오크에 따른 결합부 강성의 정량적인 값은 감도해석법으로 구한 강성값 주위에 모우드 에너지 해석법으로 구한 결합부의 강성값이 분포함을 알 수 있다.

6. 참고문헌

[1] 孫國一, 大熊政明, 長松昭男, "實驗デ-タ參照による有限要素モデルの改良," 日本機械學會論文集, C編, 57卷, 537號, pp.173-177., 1991.

[2] 孫國一, 大熊政明, 長松昭男, "實驗デ-タ參照による有限要素モデルの改良," 日本機械學會論文集, C編, 58卷, 554號, pp.94-101., 1991.

[3] 大熊政明, 長松昭男, 中村正信, "モ-ドエネルギ-解析法による振動解析," 日本機械學會論文集, C編, 57卷, 543號, pp.37-44., 1991.

[4] R. H. Lyon, Statistical Energy Analysis of Dynamical Systems, The MIT Press, 1975.

[5] D. E. Newland, Mechanical Vibration Analysis and Computation, Longman Scientific & Technical, 1984.

[6] "LMS CADA Modal/Analysis User Manual," Leuren Measurement & Systems, Rev.2.6.

[7] D. J. Ewins, Modal Testing Theory and Practice, John Wiley & Sons, 1984.

[8] 長松昭男, モ-ド解析, 培風館, 1985.

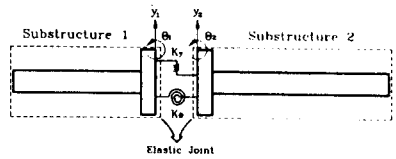


Fig.1 Analtical model for MEA

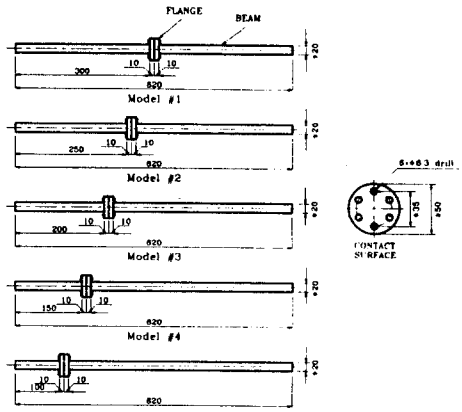


Fig.2 Models of test structure

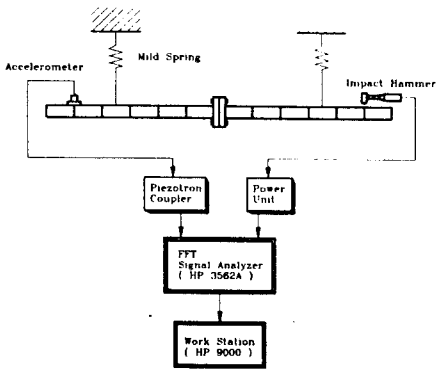
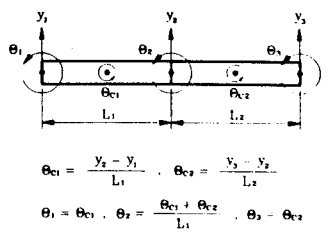


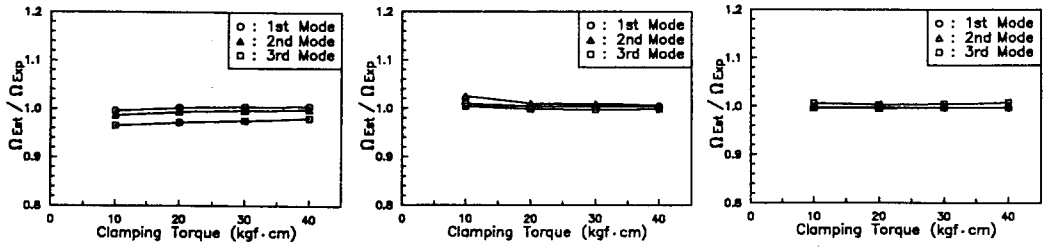
Fig.3 Schematic diagram of the experimental set-up



$$\theta_{c1} = \frac{y_2 - y_1}{L_1}, \quad \theta_{c2} = \frac{y_3 - y_2}{L_2}$$

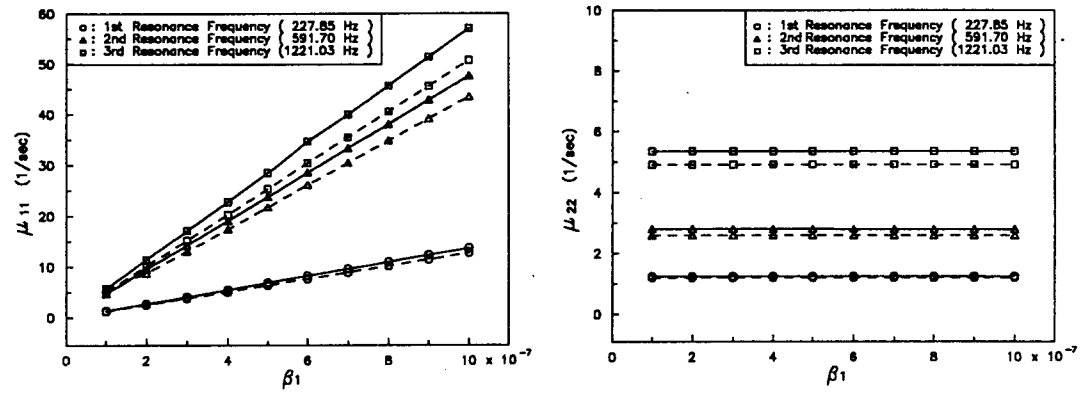
$$\theta_1 = \theta_{c1}, \quad \theta_2 = \frac{\theta_{c1} + \theta_{c2}}{L_1}, \quad \theta_3 = \theta_{c2}$$

Fig.5 Schematic representation of the approximate slope



(a) Model #3 (b) Model #4 (c) Model #5

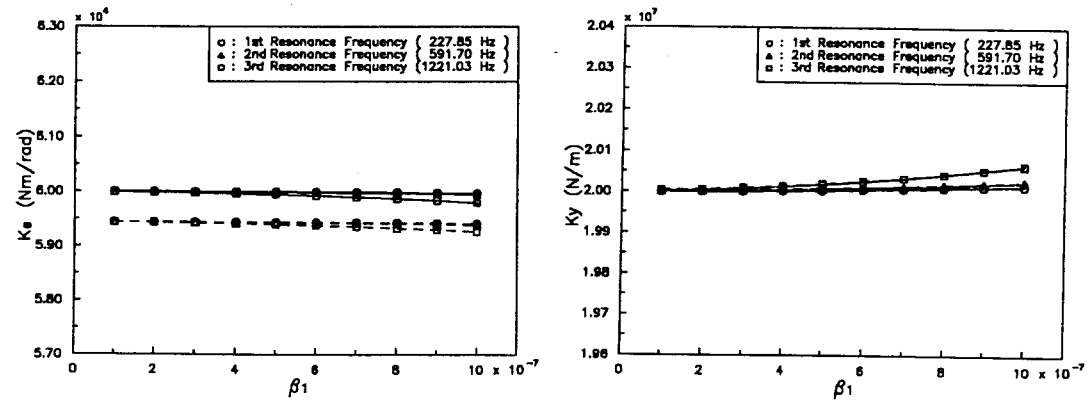
Fig.4 Natural frequency ratio according to the clamping torque



(a) Substructure 1 (b) Substructure 2

Fig.6 Internal loss factor with β_1 when $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $\beta_2 = 10^{7}$

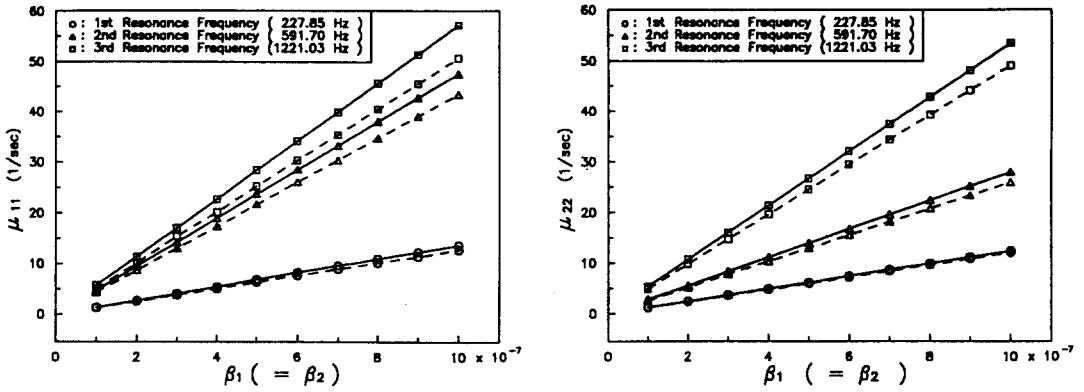
(——— : Exact slope, - - - - : Approximate slope)



(a) Rotational stiffness (b) Linear stiffness

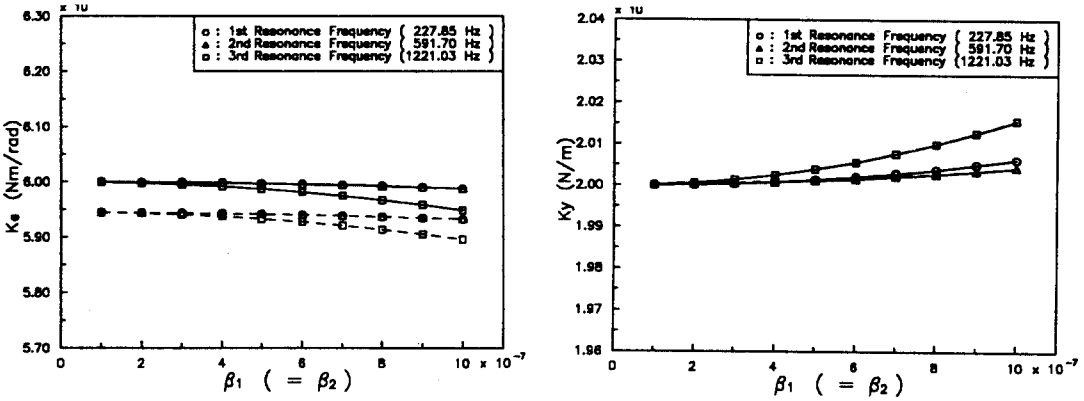
Fig.7 Joint stiffness with β_1 when $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $\beta_2 = 10^{7}$

(——— : Exact slope, - - - - : Approximate slope)



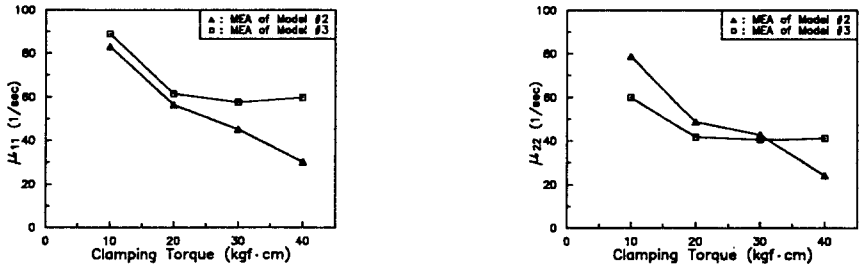
(a) Substructure 1 (b) Substructure 2

Fig.8 Internal loss factor with β_1 ($=\beta_2$) when $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$
(——— : Exact slope, - - - - : Approximate slope)



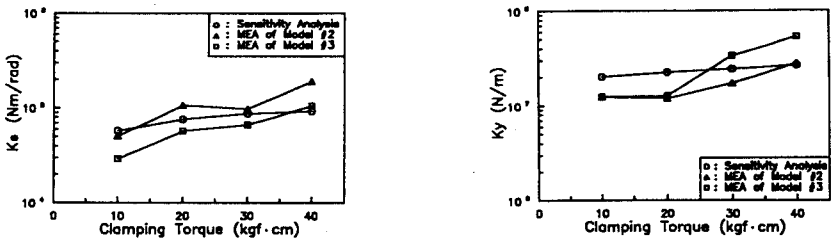
(a) Rotational stiffness (b) Linear stiffness

Fig.9 Joint stiffness with β_1 ($=\beta_2$) when $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$
(——— : Exact slope, - - - - : Approximate slope)



(a) Substructure 1 (b) Substructure 2

Fig.10 Internal loss factor with the clamping torque of model #2 & #3 at the 1st resonance frequency



(a) Rotational stiffness (b) Linear stiffness

Fig.11 Comparison of joint stiffness with the clamping torque