

## 전달영향계수법에 의한 원통형 셸의 자유진동해석

문 덕 홍\*, 0여 동 준\*\*

( Free Vibration Analysis of Circular Cylindrical Shell  
by the Transfer Influence Coefficient Method )

( Deok-Hong Moon and Dong-Jun Yeo )

### 1. 서 론

원통형 셸구조물은 해양구조물, 항공우주 장비용, 해저의 자원 비축용, 원자로 등 산업분야의 여러면에서 매우 중요한 구조물로서, 이에 대한 연구도 공학적 필요성에 의해 많은 연구가 진행되어 왔다. 그 해석방법도 Ritz법<sup>(1)</sup>, 해석적인 방법<sup>(2)</sup>, Gaerkin법<sup>(3)</sup>, 매트릭스 전개법<sup>(4)</sup>, 유한요소법<sup>(5)</sup>, 전달매트릭스법<sup>(6)-(7)</sup> 등 많은 연구자들에 의한 여러가지 방법이 적용되어 진동해석이 행해져 왔다.

그러나 유한요소법의 이용은 범용적인 해석 프로그램의 개발은 수월하지만 대규모의 선형 연립방정식의 해법에 귀착되어, 기억용량이 비교적 큰 컴퓨터가 필요하게 되고, 전달매트릭스법은 기억용량이 적은 퍼스널컴퓨터 정도로도 계산수행이 가능하나, 중간에 단단한 탄성지지가 존재하는 경우라든지, 고차의 고유진동수를 구하는 경우에는 수치계산상의 문제점이 지적되고 있다<sup>(8)</sup>.

이에 저자들은 퍼스널컴퓨터 이용에 적합한 고속고정도의 구조해석 및 진동해석 기법을 개발할 목적으로 전달영향계수법을 제안하여, 회전축, 직렬형 다층구조물, 원판구조물 및 사각판구조물 등, 여러가지 형상구조물의 자유진동해석에 적용해 본 결과, 종래의 전달매트릭스법에 비해 계산정도 및 계산속도의 양면에서 매우 우수함을 보고 한바 있다<sup>(9)-(10)</sup>.

본 연구에서는 동적영향계수의 축차전달에 그 개념을 두고 있는 전달영향계수법을 이용하여 탄성적으로 지지된 원통형 셸구조물에 대하여 자유진동 해석알고리즘을 정식화하였다. 탄성지지가 없는 일단 고정, 타단 자유의 간단한 모델에 대한 수치실험을 통해서 전달영향계수법으로 구한 해를 전달매트릭스법 및 Irie<sup>(6)</sup>의 결과와 비교하여 본 기법의 유용성을 검증하였다. 또한, 탄성지지를 갖는 모델에 대해서는 본 방법으로 구한 해와 전달매트릭스법으로 구한 해를 비교 검토하여, 본 기법의 유용성을 확인하였다.

### 2. 지배방정식

Fig.1(a)와 같이 원통좌표  $(x, \phi, z)$ 를 잡고, 축, 원주, 반경 방향의 변위를 각각  $u, v, w$ 라 한다. Fig.1(b)와 같이  $x$ 축 방향의 길이  $l$ ,  $z$ 축 방향의 두께  $h$ , 중립면의 반경  $a$ 인 탄성스프링으로 지지된 원통형 셸의 자유진동을 해석함에 있어서 다음과 같은 가정을 한다.

(1) 셸의 두 경계, 즉  $x=0, l$ 는 임의의 경계조건을 가지

며,  $x$ 축 방향에 있어서 셸의 두께가 변하는 곳 또는 스프링 지지가 있는 힘벡터가 불연속인 곳을 절원주로 하여  $n$ 개의 요소로 분할하고, 좌측에서부터 1에서  $n$ 번째 요소라 부른다. 또한  $j$ 번째 요소와  $j+1$ 번째 요소와의 경계선을 절원주  $j$ 라 부른다.

(2) 각 절원주에는 축, 원주 및 반경방향의 스프링과 원주에 대한 회전에 저항하는 회전스프링으로 지지되어 있다.

(3) 임의의 절원주  $j$ 에서  $x, \phi$  및  $z$ 축 방향의 변위들과  $\phi$ 축 주위의 각변위는 연속이다.

기호 위에  $(-)$ 이 붙지 않는 것은 차원량이고,  $(-)$ 이 붙

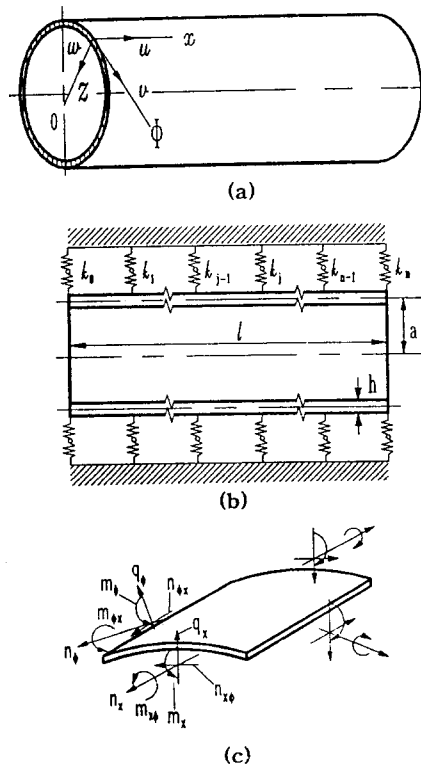


Fig.1 Circular cylindrical shell with co-ordinate convention

\*정회원, 부산수산대학교 공과대학 기관공학과  
\*\*정회원, 여수수산대학교 기관공학과

은 것은 무차원량이고,  $\wedge$ 가 붙은 것은 절원주 좌측의 무차원 물리량이며, 위첨자  $t$ 는 매트릭스의 전치를 나타낸다.

일의 요소의 힘과 모멘트의 방향이 Fig.1.(c)와 같을 때, 자유진동에 대한 운동방정식은 다음과 같다<sup>(11)</sup>.

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_x}{\partial x_j} + \frac{\partial n_{\phi x}}{\partial \phi} - \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial n_{x\phi}}{\partial x_j} + \frac{\partial n_{\phi}}{\partial \phi} - \frac{1}{a} q_{\phi} - \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial q_x}{\partial x_j} + \frac{\partial q_{\phi}}{\partial \phi} + \frac{1}{a} n_{\phi} - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial m_x}{\partial x_j} + \frac{\partial m_{\phi x}}{\partial \phi} + q_x &= 0, \\ \frac{\partial m_{x\phi}}{\partial x_j} + \frac{\partial m_{\phi}}{\partial \phi} + q_{\phi} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

여기서,  $\rho$ 는 쉘의 밀도,  $t$ 는 시간이고, 막력의 성분은,

$$\begin{aligned} n_x &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_j} + \frac{\nu}{a} \left( \frac{\partial v}{\partial \phi} - w \right) \right\}, \\ n_{\phi} &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left\{ \nu \frac{\partial u}{\partial x_j} + \frac{1}{a} \left( \frac{\partial v}{\partial \phi} - w \right) \right\}, \\ n_{x\phi} &= n_{\phi x} + \frac{1-\nu}{a^2} D \left( \frac{\partial v}{\partial x_j} + \frac{\partial \phi}{\partial \phi} \right), \\ n_{\phi x} &= \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{\partial v}{\partial x_j} \right), \end{aligned} \quad (2)$$

모멘트 성분은,

$$\begin{aligned} m_x &= D \left\{ \frac{\nu}{a^2} \left( \frac{\partial v}{\partial \phi} + \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial x_j^2} \right\}, \\ m_{\phi} &= D \left\{ \frac{1-\nu}{a^2} \left( \frac{\partial v}{\partial \phi} + \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} \right) + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_j^2} \right\}, \\ m_{x\phi} &= m_{\phi x} = \frac{(1-\nu)D}{a} \left( \frac{\partial v}{\partial x_j} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_j \partial \phi} \right) \end{aligned} \quad (3)$$

Kelvin-Kirchhoff 막력과 전단력은,

$$\begin{aligned} r_x &= n_{x\phi} + \frac{1}{a} m_{x\phi}, \\ s_x &= q_x - \frac{\partial m_{x\phi}}{\partial \phi} \end{aligned} \quad (4)$$

여기서,  $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ 는 굽힘강성,  $E$ 는 종탄성계수,

$\nu$ 는 포아송 비이다.

원통형 쉘요소가 조화운동을 한다고 가정할 때, 변위성분과 힘성분들은 축방향의 모드함수와 원주방향의 모드함수 및 시간에 대한 조화함수의 곱으로서 일의의 원주방향 모드에 대해 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} (u, w, \phi) &= [ U_j(x_j), W_j(x_j), \Psi_j(x_j) ] \cos \eta \phi \cdot e^{i\omega t}, \\ (v, r_x) &= [ V_j(x_j), R_x(x_j) ] \sin \eta \phi \cdot e^{i\omega t}, \\ (n_x, s_x, m_x) &= [ N_x(x_j), S_x(x_j), M_x(x_j) ] \cos \eta \phi \cdot e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (5)$$

여기서,  $\eta$ 는 원주방향의 반파수,  $\omega$ 는 고유 각진동수이고, 각변위  $\phi$ 는,

$$\phi = \frac{\partial w}{\partial x_j} \quad (6)$$

해석의 간편함을 위해 도입되는 무차원량들은,

$$\begin{aligned} \bar{h} &= \frac{h}{a}, \quad \bar{l} = \frac{l}{a}, \quad \xi = \frac{x_j}{l}, \quad \zeta = \frac{x_j}{a}, \quad \bar{U}_j = \frac{U_j}{h}, \\ \bar{V}_j &= \frac{V_j}{h}, \quad \bar{W}_j = \frac{W_j}{h}, \quad \bar{\Psi}_j = \frac{a}{h} \Psi_j, \quad \bar{N}_x = \frac{a^2}{D} N_x, \\ \bar{R}_x &= \frac{a^2}{D} R_x, \quad \bar{S}_x = \frac{a^2}{D} S_x, \quad \bar{M}_x = \frac{a}{D} M_x, \\ \lambda^2 &= \frac{\rho a^2 h^3 \omega^2}{12D} \end{aligned} \quad (7)$$

여기서,  $\lambda$ 는 무차원 고유진동수이다.

식(5)를 식(1)~(4)와 (6)에 대입한 후, 식(8)의 무차원량을 대입하여 매트릭스 미분방정식으로 나타내면,

$$\frac{d}{d\xi} \bar{\mathbf{Z}}_j(\xi) = \mathbf{B}_j \bar{\mathbf{Z}}_j(\xi) \quad (8)$$

여기서  $\bar{\mathbf{Z}}_j$ 는 극좌표  $\xi$ 에 있어서의 상태량벡터이고,  $\mathbf{B}_j$ 는  $8 \times 8$ 의 계수매트릭스이며, 그 요소들은,

$$\begin{aligned} b_{12} &= -\nu \eta \bar{l}, \quad b_{13} = \nu \bar{l}, \quad b_{15} = \bar{h} \bar{l} / 12, \quad b_{21} = 3 \eta \bar{l} / (3 + \bar{h}^2), \\ b_{24} &= \eta \bar{h}^2 \bar{l} / (3 + \bar{h}^2), \quad b_{26} = \bar{h} \bar{l} / (2(1 - \nu) (3 + \bar{h}^2)), \\ b_{34} &= \bar{l}, \quad b_{34} = \bar{l}, \quad b_{42} = b_{12}, \quad b_{43} = \nu \eta^2 \bar{l}, \\ b_{48} &= \bar{l} / \bar{h}, \quad b_{51} = \{ 6(1 - \nu) \eta^2 \bar{h} \bar{l} / (3 + \bar{h}^2) - 12 \bar{l} \lambda^2 / \bar{h} \\ b_{54} &= -6(1 - \nu) \eta^2 \bar{h} \bar{l} / (3 + \bar{h}^2), \quad b_{56} = -b_{21}, \quad b_{62} = \\ &\{ (1 - \nu^2) \eta^2 (12 + \bar{h}^2) - 12 \lambda^2 \} \bar{l} / \bar{h}, \quad b_{63} = -(1 - \nu^2) \\ &(12 + \eta^2 \bar{h}^2) \eta \bar{l} / \bar{h}, \quad b_{63} = -(1 - \nu^2) (12 + \eta^2 \bar{h}^2) \eta \bar{l} / \bar{h}, \\ b_{65} &= -b_{12}, \quad b_{68} = -b_{12}, \quad b_{72} = b_{63}, \quad b_{73} = \{ (1 - \nu^2) \\ &12 \lambda^2 \} \bar{l} / \bar{h}, \quad b_{75} = -b_{12}, \quad b_{78} = -b_{43}, \quad b_{81} = -6(1 - \nu) \\ &\eta^2 \bar{h} \bar{l} / (3 + \bar{h}^2), \quad b_{84} = -b_{81}, \quad b_{86} = -b_{24}, \quad b_{87} = -b_{34} \end{aligned} \quad (9)$$

이고, 상기 이외의 계수항은 0이다. 식(9)를 풀면,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{Z}}_j(\xi) &= \mathbf{F}_j(\xi) \bar{\mathbf{Z}}_j(0), \\ \frac{d}{d\xi} \mathbf{Z}_j(\xi) &= \mathbf{B}_j \mathbf{F}_j(\xi) \end{aligned} \quad (10)$$

여기서 필드전달매트릭스  $\mathbf{F}_j(\xi)$ 는 Cayley-Hamilton의 정리<sup>(8)</sup>나 수치적분법을 이용하여 구할 수 있으며, 계산기에 의한 수치계산을 행할 경우에는 다음의 멱급수식을 이용하여 계산을 하는 것이 편리하다. 즉,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_j(\xi) &= e^{\mathbf{B}_j \xi} = \mathbf{I} + \frac{1}{1!} \mathbf{B}_j \xi + \frac{1}{2!} \mathbf{B}_j^2 \xi^2 + \\ &\frac{1}{3!} \mathbf{B}_j^3 \xi^3 + \dots \end{aligned} \quad (11)$$

일의의 요소의 좌·우측 절원주  $j$ 에 있어서의 상태벡터  $\hat{\mathbf{Z}}_j = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{r}_x, \hat{s}_x, \hat{w}, \hat{m}_x)$ 와  $\bar{\mathbf{Z}}_j$ 사이의 관계식은 다음과 같다.

$$\hat{\mathbf{Z}}_j = \mathbf{F}_j(\xi) \bar{\mathbf{Z}}_j \quad (12)$$

식(12)를 변위벡터  $\hat{\mathbf{d}}_j = (\bar{U}, \bar{V}, \bar{W}, \bar{\Psi})$ 와 힘벡터  $\hat{\mathbf{f}}_j = (\bar{N}_x, \bar{R}_x, \bar{S}_x, \bar{M}_x)$ 에 대한 부분매트릭스로 재정리하면,

$$\begin{bmatrix} d \\ \hat{f} \end{bmatrix}_j = \begin{bmatrix} V & W \\ X & Y \end{bmatrix}_j \begin{bmatrix} d \\ \bar{f} \end{bmatrix}_{j-1} \quad (13)$$

로 되고,  $V_j, W_j, X_j$  및  $Y_j$ 는  $4 \times 4$ 의 정방매트릭스이며, 식 (13)을  $\bar{Z}_{j-1} = (d, \bar{f})_{j-1}$ 에 대하여 변환하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} d \\ \bar{f} \end{bmatrix}_{j-1} = \begin{bmatrix} Y & -W \\ -X & V \end{bmatrix}_j \begin{bmatrix} d \\ \hat{f} \end{bmatrix}_j \quad (14)$$

식 (13)과 식 (14)의 우변의 계수매트릭스는 서로 역매트릭스의 관계에 있다.

원통형 쉘의 임의의 절원주  $j$ 에 스프링 지지가 있는 경우, 절원주 좌·우측의 상태벡터는,

$$\bar{Z}_j = G_j \hat{Z}_j \quad (15)$$

여기서  $G_j$ 는 절원주  $j$ 에서 좌·우측 사이의 전달매트릭스인 포인트 전달매트릭스이다.

식(15)를 변위벡터  $d_j$ 와 힘벡터  $\bar{T}_j$  및  $\hat{f}_j$ 에 대한 부분매트릭스로 재정리하면,

$$\begin{bmatrix} d \\ \bar{f} \end{bmatrix}_j = \begin{bmatrix} I & 0 \\ P & I \end{bmatrix}_j \begin{bmatrix} d \\ \hat{f} \end{bmatrix}_j \quad (16)$$

여기서  $I$ 는 단위매트릭스,  $0$ 는 영(zero)매트릭스이다.

절원주  $j$ 의 좌측과 우측에 있어서, 힘의 평형조건으로부터,

$$\hat{f}_j = \bar{f}_j - P_j d_j \quad (17)$$

여기서,

$$P_j = \begin{bmatrix} \bar{k}_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{k}_\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{k}_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{k}_r \end{bmatrix} \quad (18)$$

$\bar{k}_x, \bar{k}_\phi, \bar{k}_z, \bar{k}_r$ 는 각각, 축, 원주, 반경 및 회전방향의 스프링상수이며, 스프링상수의 무차원량들은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} (\bar{k}_x, \bar{k}_\phi, \bar{k}_z) &= \frac{a^2 h}{D} (k_x, k_\phi, k_z) \\ \bar{k}_r &= \frac{ah}{D} k_r \end{aligned} \quad (19)$$

### 3. 동적영향계수 매트릭스의 전달

임의의 절원주  $j$ 의 좌측과 우측에서 변위벡터  $d_j$ 와 힘벡터  $\hat{f}_j, f_j$  사이의 관계를 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} d_j &= \hat{T}_j \hat{f}_j, & \hat{T}_j &= \hat{T}_j \\ d_j &= \bar{T}_j \bar{f}_j, & \bar{T}_j &= \bar{T}_j \end{aligned} \quad (20)$$

여기서  $\hat{T}_j, \bar{T}_j$ 는  $4 \times 4$ 의 대칭인 동적영향계수 매트릭스이다.

### 3.1 동적영향계수의 필드 및 포인트 전달

식 (14)와 (20)에서  $j$ 번째 요소에 있어서 동적영향계수의 필드전달식은,

$$U_j \hat{T}_j = H_j \quad (j=2, \dots, n) \quad (21)$$

여기서,

$$\begin{aligned} U_j &= \bar{T}_{j-1}^{-1} X_j + {}^1 Y_j \\ H_j &= \bar{T}_{j-1}^{-1} V_j + {}^1 W_j \end{aligned} \quad (22)$$

식 (17)과 (20)에서 동적영향계수의 포인트전달식은,

$$\hat{U}_j \bar{T}_j = \hat{T}_j \quad (23)$$

여기서,

$$\hat{U}_j = I_j + \hat{T}_j P_j \quad (24)$$

상기의 필드 및 포인트전달식을 결합시키면, 식 (21)과 (24)로부터 필드-포인트 전달식은,

$$A_j \bar{T}_j = H_j \quad (j=2, \dots, n) \quad (25)$$

여기서,

$$A_j = U_j + H_j P_j \quad (26)$$

이고, 식 (27)을 이용하면 계산시간을 훨씬 단축시킬 수 있다.

### 3.2 절원주 0에서의 동적영향계수 매트릭스

본 해석기법에 있어서는 계산시점의 경계조건을 처음부터 고려해야 한다. 즉 원통형 쉘의 좌측의 경계선인 절원주 0를 스프링 지지로 간주하여 절원주 0 우측에서의 동적영향계수 매트릭스를 구하면 다음과 같다.

$$\bar{T}_0 = P_0^{-1} \quad (27)$$

여기서,  $P_0$ 는 절원주 0에서의 포인트 강성매트릭스이다.

그러나,  $P_0$ 가 특이매트릭스인 경우,  $P_0$ 의 역매트릭스가 구해지지 않으므로, 절선 0와 절원주 1사이의 동적영향계수의 전달과정은  $P_0$ 를 그대로 사용한 다음식이 이용된다.

$$U_1 \hat{T}_1 = H_1 \quad (28)$$

여기서,

$$U_1 = {}^1 X_1 + P_0 {}^1 Y_1, \quad H_1 = {}^1 V_1 + P_0 {}^1 W_1 \quad (29)$$

식 (29)의  $P_0$ 의 요소인 스프링상수  $\bar{k}_x, \bar{k}_\phi, \bar{k}_z, \bar{k}_r$ 의 값들을 적절히 변화시키므로써 모든 경계조건에 대응시킬 수 있다.

### 4. 진동수방정식 및 거짓근의 해소법

진동수방정식은 원통형 쉘의 우측단의 경계조건에 따라 두 종류로 대별 할 수 있다.

우선,  $P_n = 0$  인 경우 ( $\hat{f}_n = \bar{f}_n = 0$ )에는 식 (20)과 (21)로부터,

$$U_n d_n = 0 \quad (30)$$

로 되고,  $d_n \neq 0$  이므로 진동수방정식은 다음과 같다.

$$U_n = \det(U_n) = 0 \quad (31)$$

다음으로,  $P_n \neq 0$ 인 경우에 대해서는 식(17)과 (20)로부터,

$$(I + P_n \hat{T}_n) \hat{f}_n = 0 \quad (32)$$

로 되고,  $\hat{T}_n$ 의 對稱性과 식 (21)을 이용하면,

$$\hat{T}_n = U_n^{-1} H_n = H_n U_n^{-1} \quad (33)$$

식 (33)을 식 (32)에 대입하면,

$$A_n U_n^{-1} \hat{f}_n = 0 \quad (34)$$

여기서,  $\hat{f}_n \neq 0$ 이므로, 진동수방정식은,

$$\det(A_n U_n^{-1}) = \det(A_n) / \det(U_n) = 0$$

$$A_n = \det(A_n) = 0 \quad (35)$$

로 되고, 결과적으로 식 (35)는  $P_n = 0$ 인 경우의 식 (31)을 포함하고 있음을 알 수 있다.

진동수방정식 (35)에 이분법을 적용해서 고유진동수를 구할 경우, 동적영향계수의 전달과정에서 발생할 수 있는 거짓근(반대칭근)도 참근(고유진동수)으로 구해버리게 된다.

그르므로, 진동수방정식 (31), (35)대신에 다음식을 사용함으로써, 모든 경계조건 및 중간조건을 스프링상수의 값만을 변화시켜 제어할 수 있으며, 동시에 거짓근도 해소할 수 있게 된다.

$$\text{sgn}(G_n) = \text{sgn}(U_1) \cdot \text{sgn}\left(\prod_{j=2}^n \text{sgn}(A_j)\right) \quad (36)$$

## 5. 고유모드의 계산

고유모드의 계산은 고유진동수를 구한 후, 원통형의 좌측에서 우측으로 실행된다. 절원주  $n$ 에서의 상태변수가  $P_n = 0$ 인 경우, 고유진동수가 구해진 시점에서는 식 (30)이 성립하기 때문에, 식(30)으로부터  $d_n (\neq 0)$ 가 구해진다. 또한  $P_n = 0$

인 경우는, 식(34)로부터  $\hat{f}_n$ 를 구할 수 있고,  $d_n = H_n U_n^{-1} \hat{f}_n$ 에 의해  $d_n$ 를 구한다.

절원주  $n-1$ 에서 1까지의 상태변수들은 식 (14), (17) 및 (20)에 의해 순차적으로 계산하면 된다.

## 6. 수치계산 결과 및 고찰

본 연구에서는 Fig. 1에 의거해 3종류의 모델에 대하여 수치실험을 행하였다. 모델 1은 스프링 지지가 없는 일단 고정, 타단 자유의 원통형로서  $\bar{l}=2.232$ ,  $\bar{h}=0.01$ ,  $n=4$ 이고, 모델 2는 스프링 지지가 있는 일단고정 타단자유 원통형 셀로서  $\bar{l}=3$ ,  $\bar{h}=0.03$ ,  $J=4$ ,  $n=4$ 이며, 모델 3은 스프링 지지된 원통형 셀로서  $\bar{l}=4$ ,  $\bar{h}=0.02$ ,  $J=4$ ,  $n=4$ 이다. 종탄성계수는  $2.067 \times 10^{11} \text{N/m}$ , 밀도는  $7840 \text{Kg/m}^3$ ,  $\nu=0.3$ 은 3종류의 모델 모두 같다. 여기서,  $n$ 는 분할 요소수이고,  $J$ 는 지지 스프링의 수이다. 본 기법의 유용성을 확인하기 위해 스프링 지지가 없는 경우에 대해서는 전달영향계수법(TICM), 전달매트릭스법(TMM)에 의한 수치계산 결과들을 문헌 [6]과 비교, 검토하였고, 스프링 지지가 있는 경우에 대해서는 TICM을 문헌 [7]의 결과와 비교하여 알고리즘의 타당성을 확인하였다.

사용된 계산기는 32비트 퍼스널컴퓨터와 슈퍼컴퓨터(crayc 90)이고, 사용언어는 fortran이며, 변수는 배정도, 4배정도 변수로 계산하였다. 또한, 무차원 고유진동수는 상대오차  $10^{-9}$  이하에서 수렴하는 것으로 하였다.

## 6.1 계산절도

Table 1은 스프링 지지가 없는 모델 1에 대한 TICM과 TMM의 무차원 고유진동수를 문헌 [6]의 결과와 비교하여 나타낸 것이다. 표에서 보면, TICM, TMM 및 문헌 [6]의 값들은 원주방향의 반파수  $\eta$ 값의 변화에도 잘 일치하고 있다. 여기서,  $m$ 는 축방향의 모드 수이다.

Table 2는 스프링 지지가 있는 모델 2에 대한 TICM과

Table 1 Comparison of nondimensional natural frequencies( $\lambda$ ) for model 1

$\eta$	Method	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$
1	TICM	0.241283	0.642667	0.824491	0.894072
	TMM	0.241282	0.642667	0.824491	0.894072
	Ref[6]	0.2413	0.6427	0.8245	0.8941
2	TICM	0.116463	0.403324	0.679126	0.806237
	TMM	0.116443	0.403324	0.679126	0.806237
	Ref[6]	0.1165	0.4033	0.6791	0.8062
3	TICM	0.066805	0.264590	0.511861	0.677523
	TMM	0.066794	0.264590	0.511861	0.677523
	Ref[6]	0.0668	0.2646	0.5119	0.6775
4	TICM	0.057623	0.188437	0.389341	0.559646
	TMM	0.057632	0.188432	0.389338	0.559646
	Ref[6]	0.0576	0.1884	0.3893	0.5596
5	TICM	0.073612	0.152788	0.309305	0.466644
	TMM	0.073607	0.152791	0.309287	0.466639
	Ref[6]	0.0736	0.1528	0.3093	0.4666

Table 2 Comparison of nondimensional natural frequencies( $\lambda$ ) for model 2 ( $\bar{k}_x = \bar{k}_\theta = \bar{k}_r = 10$ ,  $\bar{k}_r = 0$ )

$m$	Method	$\eta=1$	$\eta=3$
1	TICM	0.22054683	0.16494213
	TMM	0.22054683	0.16494212
	Ref[7]	0.2405	0.1649
2	TICM	0.50087284	0.24779835
	TMM	0.50087284	0.24779833
	Ref[7]	0.5009	0.2478
3	TICM	0.74864492	0.42055227
	TMM	0.74864492	0.42055227
	Ref[7]	0.7486	0.4206
4	TICM	0.83414274	0.59087252
	TMM	0.83414274	0.59087251
	Ref[7]	0.8341	0.5909
5	TICM	0.89679408	0.72169474
	TMM	0.89679408	0.72169474
	Ref[7]	0.8968	0.7217
6	TICM	0.94677601	0.83552123
	TMM	0.94677601	0.83552123
	Ref[7]	0.9468	0.8355

TMM의 무차원 고유진동수를 문헌 [7]와 비교하여 나타낸 것이다. 스프링 지지가 있는 경우도 TICM 및 TMM의 결과는 문헌 [7]의 값과 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. TICM의 경우, 고정단의 경계조건은 양쪽 경계에서의 스프링상수를  $\bar{k}_x = \bar{k}_\phi = \bar{k}_z = \bar{k}_r = \infty$ 로 대치함으로써 대응시켰다. 실제의 계산에 있어서,  $\infty$ 의 값은 고유진동수가 포화할 정도의 큰 값인  $10^{20}$ 을 수치상의 무한대로 간주하였다.

Table 3과 Table 4는 모델 3에 대해서  $\eta=0$ 이고, 스프링 상수 값이  $\bar{k}_r=0$ 이고,  $\bar{k}_x = \bar{k}_\phi = \bar{k}_z = 10$ 과  $\bar{k}_x = \bar{k}_\phi = \bar{k}_z = 5 \times 10^3$ 일 때의 무차원 고유진동수의 계산 결과이다. Table 3과 4에서, TICM과 TMM은 배정도의 변수를 써서 퍼스널컴퓨터로 계산하였고, QP는 4배정도 변수를 사용해서 슈퍼컴퓨터로 계산하였을 경우, TICM과 TMM에 의한 계산 결과가 일치하고 있는 것을 나타낸다. Table 3에서 TICM과 QP는 완전히 일치하고 있으나, TMM은 스프링 상수값이 비

Table 3 Comparison of computation accuracy of nondimensional frequencies( $\lambda$ ) for model 3 ( $\bar{k}_x = \bar{k}_\phi = \bar{k}_z = 10, \bar{k}_r = 0$ )

No.	TICM	TMM	QP
1	0.1284503	0.1284503	0.1284503
2	0.1288500	0.1288500	0.1288500
3	0.4836364	0.4836364	0.4836364
4	0.7225318	0.7225318	0.7225318
5	0.9311480	0.9311480	0.9311480
6	0.9439597	0.9439597	0.9439597
7	0.9477063	0.9477063	0.9477063
8	0.9542107	0.9542107	0.9542107
9	0.9551246	0.9551246	0.9551246
10	0.9682640	0.9682640	0.9682640
11	0.9691051	0.9691051	0.9691051
12	0.9834950	0.9834950	0.9834950
13	0.9958484	0.9958484	0.9958484
14	1.0081325	1.0081323	1.0081325
15	1.0348863	1.0348750	1.0348863
16	1.0561990	1.0562503	1.0561990
17	1.0626813	1.0626940	1.0626813
18	1.0927551	—	1.0927551

Table 4 Comparison of computation accuracy of nondimensional frequencies( $\lambda$ ) for model 3 ( $\bar{k}_x = \bar{k}_\phi = \bar{k}_z = 5 \times 10^3, \bar{k}_r = 0$ )

No.	TICM	TMM	QP
1	0.9479707	0.9479707	0.9479708
2	0.9486351	0.9486351	0.9486352
3	0.9694750	0.9694771	0.9694750
4	0.9702002	0.9702270	0.9702002
5	0.9862794	0.9860935	0.9862794
6	0.9943297	0.9955099	0.9943297
7	1.0000101	0.9963125	1.0000101
8	1.0154850	1.0008060	1.0154850
9	1.0247481	1.0022171	1.0247481
10	1.0570979	—	1.0570979
11	1.1017324	—	1.1017324

교적 적은  $\bar{k}_x = \bar{k}_\phi = \bar{k}_z = 10$ 일 경우는 1차에서 13차까지는 정해를 구할 수 있지만, 14차에서 17차까지는 정해를 구할 수 없으며 「-」 표시된 부분, 즉 18차 이상의 고차에서는 계산 기상에서 오버플로우되어 전혀 해가 구하여지지 않게 된다. 이것은 기보<sup>(9)-(10)</sup>와 동일한 경향으로, TMM의 단점, 즉 고차진동수 영역으로 갈수록 진동수가 계산정도를 저하시키기 때문이라고 생각된다. 여기서 정해라 함은 슈퍼컴퓨터에서 4배정도 변수를 사용해서 수치계산을 행하였을 때, 구하는 진동수 범위 안에서 전달영향계수법과 전달매트릭스법의 계산결과가 유효자리수 내에서 일치했고, 퍼스널컴퓨터 상에서 배정도 변수를 써서 계산한 TICM의 결과와도 완전히 일치했으므로, 이를 본 연구에서는 정해로 간주하였다.

Table 4의 지지 스프링상수 값이 좀더 큰 값인  $\bar{k}_x = \bar{k}_\phi = \bar{k}_z = 5 \times 10^3$ 의 경우도 TICM과 QP는 완전히 일치하고 있으나, TMM은 2차까지는 정해가 구하여지지만, 3차에서 8차까지는 정해가 구하여지지 않다가 9차 이상에서는 해를 전혀 구할 수 없게 된다. 이것은 TMM은 중간지진된 스프링상수 값들이 커짐에 따라 고유진동수가 아직 포화상태에 있지 않음에도 불구하고, 전달매트릭스 요소내에는 스프링상수 값들에 의해 요소간의 값들의 차가 극단적으로 커지므로 전술의 고차 진동에서의 값이 전달매트릭스의 사칙연산 과정에서 생기는 오차라 생각된다.

Fig. 2는 모델 3에서 축방향의 모드수  $m=3$ 일 때, 스프링 강성  $\bar{k}_r=0$ 이고,  $\bar{k}_x, \bar{k}_\phi, \bar{k}_z$ 의 변화에 따른 무차원 고유진동수의 값의 변화를 나타낸 것이다. 스프링 강성의 증가에 따라 무차원 고유진동수는 증가하며 그 증가율은 스프링 강성값의 증가나 원주방향의 모드수  $\eta$  값의 증가에 비례하지는 않는다.

지면 관계상 제시하지는 않았지만, 단순지지의 경계조건 취

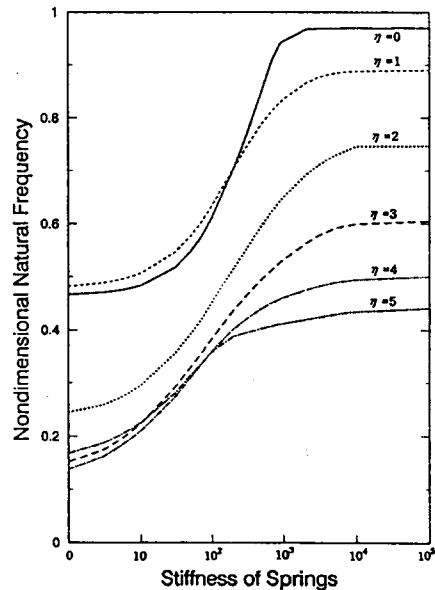


Fig. 2 Relationship between nondimensional natural frequencies and stiffness parameter of springs for model 3

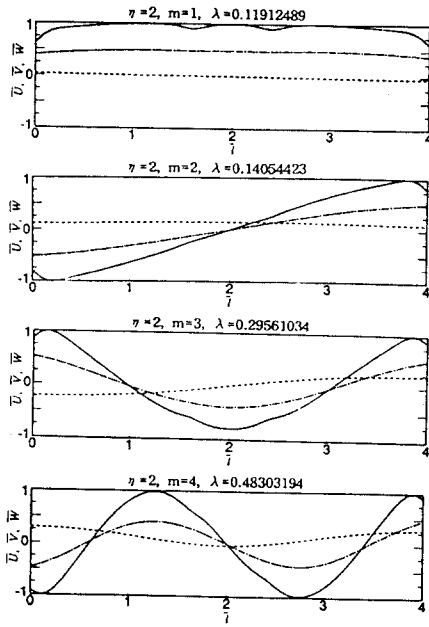


Fig.3 Characteristic modes

같은 좌우양단의 무차원 스프링상수  $\bar{k}_\phi$ 와  $\bar{k}_z$ 값을  $\infty$ 로 대치하므로써 처리할 수 있다.

### 6.2 고유모드

Fig. 3은 모델 3에 대해서  $\eta=2$ 이고, 스프링상수 값은  $\bar{k}_x = \bar{k}_\phi = \bar{k}_z = 10$ ,  $\bar{k}_r = 0$ 일 때, 1차에서 4차까지의 고유모드를 나타낸 것이다. 그림에서 실선은 반경방향, 파선은 축방향, 일점쇄선은 원주방향의 변위를 나타내며, 최대변위를 1로 하여 축방향에 대하여 도시한 것이다.

### 6.3 계산시간의 비교

TICM과 TMM의 계산속도의 비교를 위해, Table 2에서  $\eta=1$ 일 경우의 진동수 범위 1차에서 10차까지(case 1)에 대하여 초기 시행값과 증분값을  $10^{-3}$ 으로 하여 무차원 고유진동수를 계산하는데 요하는 시간과 Table 3에서  $\eta=0$ 이고 지지스프링의 값이  $\bar{k}_x = \bar{k}_\phi = \bar{k}_z = 10$ ,  $\bar{k}_r = 0$ 일 경우의 진동수 범위 1차에서 13차까지(case 2)에 대하여 초기 시행값과 증분값을  $10^{-4}$ 으로 하여 무차원 고유진동수를 계산하는데 요하는 시간을 Table 5에 나타내었다. 이 결과로부터 TICM은 TMM보다 경우 1은 약 1.82, 경우 2는 약 1.41배 정도 계산속도가 빠른 것을 알 수 있다.

### 7. 결론

본 연구에서는 동적영향계수의 축차전달에 그 개념을 두고 있는 전달영향계수법을 사용하여 임의의 경계조건을 갖는 탄성지지 원통형 셸구조물의 자유진동해석에 적용해서, 고유진동수와 고유모드를 구하는 알고리즘을 정식화하고 간단한 계산모델에 대하여 수치실험을 행하여, 그 결과들을 전달매트릭스법 및 Irie의 결과와 비교 검토하여 유용성을 확인하였다. 그 결과를 요약하면 다음과 같다.

Table 5 Comparison of CPU time[s]

Case	TICM	TMM	Roots
1	361	657	10
2	3282	4638	13

(1) 본 해석 기법은 전달매트릭스법으로는 구하기 곤란한 고차의 진동수에 대해서도 계산정도가 양호하였고, 계산속도도 전달매트릭스법보다 우수하였다.

(2) 본 해석 기법은 원통형 셸구조물의 중간에 단단한 탄성 지지가 존재하더라도 유연성을 가지고 적용할 수 있었다.

(3) 본 해석 기법은 중간 지지조건과 경계조건도 동일한 해석 알고리즘에 축방향, 원주방향, 반경방향 및 회전방향의 스프링상수 값을 변화시키므로써 제어할 수 있었다.

(4) 진동수방정식의 해를 구하는 방법으로 이분법을 이용할 경우 동적영향계수의 전달과정에서 발생할수 있는 거짓 근도 쉽게 해소할 수 있었다.

### 참고문헌

- (1) Sharma, C.B., 1979, "Vibration Characteristics of Thin Circular Cylinders," Journal of Sound and Vibration, Vol.63, No.4, pp.581~592.
- (2) Chung, H., 1981, "Free Vibration Analysis of Circular Cylindrical Shells," Journal of Sound and Vibration, Vol.74, No.3, pp.331~350.
- (3) Soedel, W., 1980, "A New Frequency Formula for Closed Circular Cylindrical Shells for a Large Variety of Boundary Conditions," Journal of Sound and Vibration, Vol.70, No.3, pp.309~317.
- (4) Tottenham, H. and Shimizu, K., 1972, "Analysis of the Free Vibration of Cantilever Cylindrical Thin Elastic Shells by the matrix Progression Method," Int. J. Mech. Sci., Vol.14, No.5, pp.293~310.
- (5) V. Ramamurti and J. Pattabiraman, 1976, "Free Vibration of Circular Cylindrical Shells", Journal of Sound and Vibration, Vol.48, No.1, pp.137~155.
- (6) Irie, T., Yamada, G and Tanaka, T., 1984, "Free Vibration of a Circular Cylindrical Double-Shell System Interconnected by Serval Springs," Journal of Sound and Vibration, Vol.95, No.2, pp.249~259.
- (7) Irie, T., Yamada, G and Muramoto, Y., 1983, "Free Vibration of a Circular Cylindrical Shell Elastically Restrained by Axially Spaced Springs," Journal of Applied Mechanics, Vol.50, No.3, pp.544~548.
- (8) Pestel, E.C. and Leckie, F.A., 1963, Matrix Method in Elastomechanics, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York.
- (9) Kondou, T., Sueoka, A., Moon, D.H., Tamura, H. and Kawamura, T., 1989, "Free Vibration Analysis of a Distributed Flexural Vibration System by the Transfer Influence Coefficient Method", Theoretical and Applied Mechanics, Vol.37, pp.289~304.
- (10) 文德弘, 呂東俊, 1993, "傳遞影響係數法에 의한 사각판구조물의 자유振動解析," 大韓機械學會 論文集, 第17卷, 第3號, pp.559~567.
- (11) Kraus, H., 1967, Thin Elastic Shells, John Wiley & Sons, Inc., New York. pp.200~204.