

고유진동수를 이용한 균열탐색에 관한 연구

오 정 명 지* , 이 영 신**

(A Study on the Crack Detection using Eigenfrequency Test Data)

(Myung-Jee Chung , Young-Sin Lee)

1. 서 론

기계구조물내의 균열은 고하중상태에서 갑작스러운 파괴의 주요 원인의 하나로서 이러한 균열의 조기탐지를 위해 기존의 비파괴검사 방법 이외에, 최근 진동측정 및 진동분석을 이용하는 방법이 경제성 및 그 효용성으로 인하여 깊게 연구되고 있다.

이러한 진동특성의 변화를 이용하여 균열을 탐지하는 방법이 많은 학자들에 의해 연구되어 왔으며, 현재까지의 연구결과중 균열의 크기 및 위치를 동시에 탐지할 수 있는 방법중에서 비교적 단순, 정확하다고 판단되는 방법으로는 임의의 두지점에서 진폭측정을 이용한 Rizos(1)의 방법과 고유진동수 및 모우드형 측정을 이용한 Kam & Lee(2)의 방법이 있으나 이들 방법은 두가지 이상의 진동특성치를 요구하고 있다.

본연구의 목적은 진동특성치중 고유진동수만을 이용하여 단순부재에서 균열의 크기 및 위치를 수치적으로 예측할수 있는 새로운 해석기법을 제시하고, 기존 방법 사용시의 결과와 비교 검토하여 그 유용성을 판단하는데 있다.

2. 이론적 해석

2.1 균열위치 예측

균열의 개략적인 위치를 파악하기 위해서 최근 Armon(3)등에 의해 개발된 고유진동수 변이의 순차나열에 의한 균열위치 탐지 방법을 사용하였는데 그 개요는 다음과 같다.

균열위치 r 에서의 강성변화에 의한 고유치의 변화를 $d\omega_i = f(dk, r)$ 라 할 때 Cawley 및 Adams는 작은 강성변화에 대해서 다음식을 유도하였다.

$$d\omega_i = \frac{\partial f(0, r)}{\partial k} dk = g_i(r) dk \quad (1)$$

식(1)에서 작은 강성변화로 부터 일어나는 고유진동수변화는 균열위치에만 관계된다.

Armon(3)등은 Cawley & Adams의 이러한 이론을 이용하여 균열의 크기를 고려하지 않고 위치만을 식별할수 있는 방법을 수식화 하였으며, 그 식은 다음과 같다.

$$\frac{d\mu}{\mu} = \beta \frac{(d^2 \mu / dx^2)}{\int_0^L (d^2 \mu / dx^2)^2 dx} \quad (2)$$

식(2)에 근거하여 고유진동수 변이 $(\Delta\omega/\omega)$ 와 균열위치 x/L 의 관계를 외팔보의 경우 모우드4까지 도시하면 Fig.1과 같이 된다.

Fig.1을 이용하면 본연구에서 수행하는 외팔보의 경우 진동수 변이에 의한 모우드의 순차나열에 의해 균열의 위치를 개략적으로 예측할수 있다.

2.2 유한요소법 해석

균열요소의 강성방정식을 구하는데 있어 균열주위의 변형의 불연속성 때문에 적당한 형상함수의 선정은 상당히 어려우며 대신에 파괴역학에 의하여 균열에 의한 추가 변형에너지 및 응력확대계수로 표현되는 유연계수를 사용하여 균열요소의 강성행렬을 구할수 있다.

Fig.2와 같이 균열을 포함한 보의 한요소를 고려할때 이 요소의 선형강성행렬 K_c 는 Przemieniecki(4)의 관계식을 이용하여 구할수 있으며

$$K_c = T^T C^{-1} T \quad (3)$$

여기서 변환행렬 T 는 아래와 같이 정의된다.

$$T = \begin{bmatrix} -1 & L & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

요소의 유연행렬 C 는 다음과 같이 계산되며,

$$C_{ij} = \frac{\partial^2 W_0}{\partial P_i \partial P_j} + \frac{\partial^2 W_1}{\partial P_i \partial P_j} \quad (i=1,2; j=1,2) \quad (5)$$

여기서 W_0 는 균열없는 요소의 탄성변형에너지이고 W_1 은

균열에 의해 야기되는 추가 탄성변형에너지이다.

전단변형을 무시할때 균열없는 요소의 탄성변형에너지는,

$$W_0 = \frac{P_2^2 l}{2EI} + \frac{P_1 P_2 l^2}{2EI} + \frac{P_1^2 l^3}{6EI} \quad (6)$$

가 되고, 균열에 의한 추가 변형에너지 W_1 은 이미 파괴역학 분야에서 여러 균열상태에 대해 수식화 되어 있으며, 다음식으로 표현된다.

$$W_1 = \frac{b(1-\nu^2)}{E} \int_0^a (K_{IM} + K_{IP})^2 da \quad (7)$$

여기서 응력확대계수 K_{IM} , K_{IP} 은 Tada의 이론식을 적용하면 Fig.2의 좌표계 사용시 다음과 같다.

* 국방과학연구소

** 충남대학교 기계설계공학과

$$K_{IM} = \left(\frac{6P_2}{bh^2} \right) \sqrt{\pi a} F_I(\bar{a}) \quad (8a)$$

$$K_{IP} = \left(\frac{3P_1 l}{bh^2} \right) \sqrt{\pi a} F_I(\bar{a}) \quad (8b)$$

여기서 $F_I(\bar{a})$ 는 보정함수로서 다음식과 같다.

$$F_I(\bar{a}) = \sqrt{\frac{\tan(\lambda)}{\lambda} \frac{0.923 + 0.199[1 - \sin(\lambda)]^4}{\cos(\lambda)}} \quad (9)$$

따라서 유연행렬 C 는 다음식과 같아지고,

$$c_{11} = \frac{l^3}{3EI} + \frac{18\pi(1-\nu^2)l^2}{Ebh^2} \int_0^g a F_I^2(\bar{a}) d\bar{a} \quad (10a)$$

$$c_{12} = c_{21} = \frac{l^2}{2EI} + \frac{36\pi(1-\nu^2)l}{Ebh^2} \int_0^g a F_I^2(\bar{a}) d\bar{a} \quad (10b)$$

$$c_{22} = \frac{l}{EI} + \frac{72\pi(1-\nu^2)}{Ebh^2} \int_0^g a F_I^2(\bar{a}) d\bar{a} \quad (10c)$$

이 식을 이용하여 앞 식(3)으로부터 균열요소의 선형강성행렬을 구할수 있다.

2.3 균열상태 결정

Gudmundson(5)은 섭동방법을 이용하여 Edge crack 1개를 포함한 외팔보에서 균열크기(a) 및 균열위치(x/L)의 변화에 따른

진동수변화를 예측할수 있는 관계식을 유도 하였으며, 그 식은 다음과 같다.

$$\dot{f} = \dot{f}_n \left[1 - 3\pi(1.12)^2(1-\nu^2) \left(\frac{a}{h} \right)^2 \left(\frac{h}{L} \right) g_n^2 \left(\lambda_n \frac{x}{L} \right) \right]$$

(11)

여기서 $g_n(\lambda_n, x/L)$ 은 보의 x 위치에서 그 단면에 작용하는 최

대응력을 나타내기 위한 무차원함수이다.

식(11)를 이용하여 앞장에서 고유진동수 및 균열크기를 결정하게 되면 세부 균열위치를 결정할수 있게 된다.

3. 해석결과 및 고찰

3.1 해석 모델

앞장에서 기술된 방법을 사용하여 실제 균열의 크기 및 위치를 결정하기 위해 본연구에서 수행한 해석모델은 Rizos(1) 및 Kam & Lee(2)에 의해 실험 및 진동해석된 Fig.3와 같은 Edge crack 1개를 포함한 외팔보로서, 길이 $L=300mm$, 단면적 $S=20 \times 20 mm^2$, 밀도 $\rho=7750 kg/m^3$, 탄성계수 $E=206 GPa$ 이다.

보의 서로 다른 위치 및 균열크기에 대한 고유진동수의 실험치는 참고문헌(2)에 의하면 Table 1.과 같다.

3.2 균열상태 해석

3.2.1 고유진동수 변이에 의한 모드 순차나열

순차나열 적용을 위해 Fig.1을 사용하기 위해서는 균열별 최소 모드에서 모드 4까지의 고유진동수값이 요구되며 상기 해석모델에 대해 참고문헌(2) 상에서 미확인된 균열별 모드 4 고유진동수값은 앞장 균열요소의 강성방정식을 이용하여 작성한 유한요소 프로그램을 통하여 구하였다.

본 유한요소법으로 구한 균열별 모드 4 고유진동수값은 Table 2.과 같다.

실제 Table 1., Table 2.의 고유진동수값을 이용하여 균열의 개략적인 위치를 결정하기 위한 사전단계로서 Fig.1에서 균열위치별로 고유진동수 변이에 의한 모드의 순차나열을 표시하면 Table 3.와 같다.

한편 본연구의 해석모델에 관해 Table 1. 및 Table 2.의 고유진동수값을 이용하여 구한 균열별 고유진동수 변이 및 모드 순차나열을 이용하여 상기 Table 3.과 비교하여 구한 각 균열별 개략적인 위치범위를 정리하면 Table 4.와 같다.

3.2.2 균열크기 결정

Table 4.로부터 구한 균열별 위치범위를 이용하여 본연구의 해석모델을 Fig.4 와 같이 요소분할하고 균열크기를 매개변수로 하여 해당요소에 균열이 있을때, 유한요소법으로 구한 고유진동수값이 실험치와 같아지도록 3.2장의 유한요소 프로그램을 두드려 시켜 적용하면 균열크기가 결정되며, 그 결과는 Table 5.와 같다.

3.2.3 균열위치 결정

상기 Table 5.와 같이 균열크기가 결정되면, Table 1.의 균열별 고유진동수에 대해 2.3장의 식(11)을 이용하여 균열의 세부위치를 결정할 수 있으며, 그 결과는 Table 6.과 같다.

Table 6.에서 균열번호 10-12까지의 균열위치중 최초해석범위 90-120은 적용할 수 없는 범위임이 나타나며 따라서 Table 5.에서 이범위에서 결정된 균열크기는 제외될수 있다. 한편 균열번호 1-3까지에 대해 결정된 균열위치는 실제 위치와 많은 차이를 나타내며 이것은 Gudmundson(5)의 이론식이 고정단 근방에서는 잘 일치하지 않는데에 기인한다.

이런 사항을 고려하여 균열번호 1-3까지의 결과 제외시 균열 위치의 오차는 최대 12%, 대부분의 경우 4%이하임을 알수있다.

3.3 결과 분석

본 해석방법을 이용하여 구한 균열크기 및 위치를 동일 모델에 관해 해석한 Kam & Lee(2) 및 Rizos(1)의 결과와 비교하면 Table 7. 및 8.과 같다.

Table 7. 및 8.에서 본 해석방법 사용시 Kam & Lee(2)의 결과에 비해 균열크기의 오차는 상당히 크나 균열위치에 대해서는 요소법위에 비해 더 정확한 수치적 결과를 얻었으며, Rizos(1)의 결과와 비교시 고정단 부근을 제외하고는 균열크기 및 위치에 대해 약간 더 큰 오차를 갖는 것을 알수 있으며, 특히 실제 균열위치 260mm에서의 균열크기의 최대오차 25%가 참고문헌(2)상의 고유진동수 실험치의 부정확한 값에 기인한 것으로 판단할 때 최대오차는 12%정도인 것으로 판단된다.

4. 결론

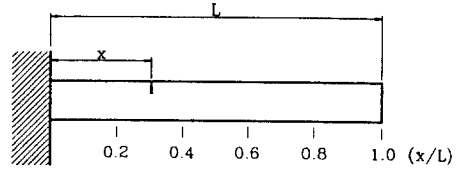
(1) 예측된 균열크기의 최대오차는 25% 정도이나 고유진동수의 정확한 실험치에 근거하여 해석시 8% 정도 이하까지 가능하다.

(2) 균열위치 예측은 고정단 부근에서는 불확실하며, 나머지 구역에서는 최대 오차 12%, 대부분의 경우 4%이하의 오차를 갖고 있으며, 균열크기가 작을수록 오차의 범위는 줄어든다.

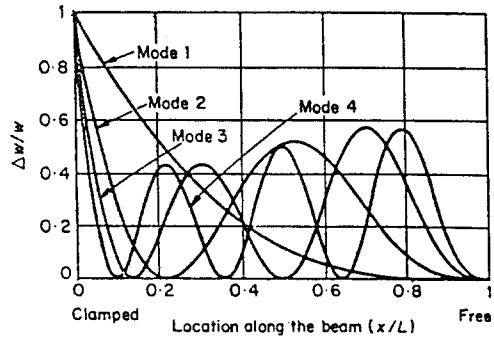
(3) 두가지의 정확한 모달실험치에 근거한 Rizos의 해석결과(최대 8%)와 비교시 오차 차이가 크지 않아 균열탐색을 위한 하나의 대체방법으로 적용 가능하다고 판단된다.

참고문헌

1. Rizos, P. F. and Aspragathos, N. and Dimarogonas, A. D., 1990, "Identification of Crack Location and Magnitude in a Cantilever Beam from the Vibration Modes", *Journal of Sound and Vibration*, Vol.138, pp.381-388.
2. Kam, T. Y. and Lee, T. Y., 1992, "Detection of Cracks in Structures using Modal Test Data", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol.42, No.2, pp.381-387.
3. Armon, D. and Ben-Haim, Y. and Braun, S., 1994, "Crack Detection in Beams by Rank-Ordering of Eigenfrequency shift", *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol.8, No.1, pp.81-91.
4. Przemieniecki, J. S., 1968, "Theory of Matrix Structural Analysis", McGraw Hill.
5. Gudmundson, P., 1982, "Eigenfrequency Changes of Structures due to Cracks, Notches or Other Geometrical Changes", *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, Vol.30, No.5, pp.339-353.

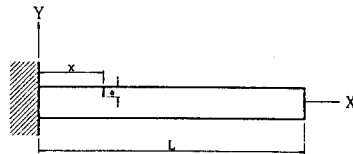


(a) Beam coordinates

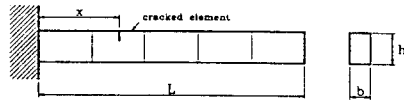


(b) Eigenfrequency response

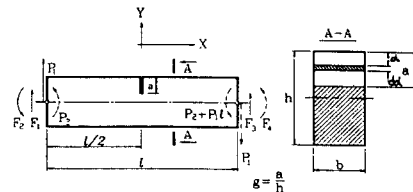
Fig.1 Fractional eigenfrequency change vs crack position



(a) Cracked cantilever beam

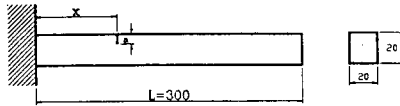


(b) Finite element model

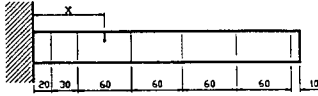


(c) Schematic diagram of cracked element

Fig.2 Cracked cantilever beam and its finite element model



(a) Cracked cantilever beam(mm)



(b) Finite element model(mm)

Fig.3 Finite element model of cracked cantilever beam for obtaining natural frequencies

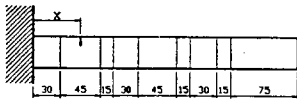


Fig.4 The scheme of present finite element model of cracked cantilever beam for crack size detection

Table 1. Experimental natural frequencies of cracked cantilever beam⁽²⁾

Crack(mm)		Natural frequency(Hz)		
Position (x)	Depth (a)	Mode 1	Mode 2	Mode 3
10	2	182.7	1149.4	3242.9
	6	163.9	1073.4	3097.3
	10	129.8	980.6	2954.2
80	2	184.0	1160.0	3245.0
	6	174.7	1155.3	3134.8
	10	153.5	1145.1	2934.3
140	2	184.7	1153.1	3258.1
	6	181.2	1092.9	3250.1
	10	171.5	971.5	3233.6
200	2	185.0	1155.0	3238.6
	6	184.3	1106.3	3082.9
	10	182.2	988.8	2819.6
260	2	185.2	1160.0	3251.1
	6	185.1	1155.1	3193.4
	10	184.9	1139.6	3029.5
No crack		185.2	1160.6	3259.1

Table 2. Natural frequencies(Mode 4) of cracked cantilever beam by F.E.M analysis

Crack(mm)		Frequencies(Hz)
Position (x)	Depth (a)	Mode 4
10	2	6405.4
	6	6226.7
	10	6065.9
80	2	6414.8
	6	6300.5
	10	6118.9
140	2	6407.0
	6	6237.3
	10	5942.9
200	2	6430.7
	6	6416.1
	10	6391.8
260	2	6409.6
	6	6235.1
	10	5820.0
No crack		6432.9

Table 3. Crack position range vs rank-ordering of modes from Fig.1

No	Crack position range(x/L)	Rank-ordering of modes
1	0-0.11	1 2 3 4
2	0.11-0.14	1 2 4 3
3	0.14-0.17	1 4 2 3
4	0.17-0.25	1 4 3 2
5	0.25-0.27	1 3 4 2
6	0.27-0.31	3 1 4 2
7	0.31-0.36	3 1 2 4
8	0.36-0.38	3 2 1 4
9	0.38-0.40	2 3 1 4
10	0.40-0.41	2 1 3 4
11	0.41-0.42	2 1 4 3
12	0.42-0.55	2 4 1 3
13	0.55-0.59	2 4 3 1
14	0.59-0.62	2 3 4 1
15	0.62-0.63	2 3 1 4
16	0.63-0.67	3 2 1 4
17	0.67-0.71	3 2 4 1
18	0.71-0.76	3 4 2 1
19	0.76-1.0	4 3 2 1

Table 4. Proposed crack position range of cracked beam

Crack No.	Rank	Crack position	
		x/L	x(mm)
1	1 2 3 4	0. -0.11	0-33
2			
3			
4	1 3 4 2	0.25-0.27	75-81
5			
6			
7			
8			
9	2 4 1 3	0.42-0.55	126-165
10			
11			
12	3 2 1 4	0.36-0.38	108-114
13			
14			
15	4 3 2 1	0.76-1.0	228-300
16			

Table 5. Comparison of actual and estimated crack depth

Crack No.	Actual crack(mm)		Position range (element No.)	Estimated crack(mm)		* Error(%)	
	Position (x)	Depth (a)		Depth (a)	%	r.m.s	
1		2	0-30 (1)	2.06	3	8.32	
2	10	6		6.66	11		
3		10		10.88	8.8		
4		2	75-90 (3)	2.03	1.5	10.33	
5	80	6		6.63	10.5		
6		10		11.44	14.4		
7		2	120-165 (5)	1.95	-2.5	8.03	
8	140	6		6.62	10.3		
9		10		10.90	9.0		
10		2	90-120 (4)	-	-	62.14	
11		6		2.08	-65.3		
12	200	10		4.12	-58.8		
10		2	180-210 (7)	1.80	-10.9	6.55	
11		6		6.03	5.0		
12		10		10.19	1.9		
13		2	225-300 (9)	1.20	40.0	25.59	
14	260	6		6.83	13.8		
15		10		11.32	13.2		

Table 6. Comparison of actual and estimated crack position

Crack No.	Actual crack(mm)		Range	Estimated crack(mm)		* Error	
	Position (x)	Depth (a)		Position (x)	%	r.m.s	
1		2	0-30	18.47	84.7	84.7	
2	10	6		38.50	**		
3		10		49.42	**		
4		2	75-90	82.10	2.63	12.16	
5	80	6		90.21	12.76		
6		10		93.23	16.54		
7		2	120-165	138.36	-1.17	3.47	
8	140	6		143.95	2.82		
9		10		132.76	-5.17		
10		2	90-120	-	-	-	
11		6		447.37	**		
12	200	10		445.38	**		
10		2	180-210	193.25	-3.38	4.19	
11		6		195.60	-2.20		
12		10		187.93	-6.04		
13		2	225-300	-	-	1.54	
14	260	6		259.77	-0.09		
15		10		254.32	-2.18		

Table 7. Actual and estimated crack position with various method

Actual crack(mm)	Estimated crack(mm)						
	Present method		Kam & Lee's method ⁽¹⁴⁾		Rizos's method ⁽⁴⁾		
	Position (x)	Depth (a)	Position (x)	* Error %	Position (x)	Position (x)	* Error %
10	2	18.47	84.7		0-50	10.31	3.00
	6	-	-	84.7		9.92	-1.00
	10	-	-			10.41	4.00
80	2	82.10	2.63		50-110	78.61	1.75
	6	90.21	12.76	12.16		80.93	1.12
	10	93.23	16.54			83.31	4.12
140	2	138.36	-1.17		110-170	138.72	-0.92
	6	143.95	2.82	3.47		139.41	-0.42
	10	132.76	-5.17			145.51	3.92
200	2	193.25	-3.38		170-230	200.72	0.35
	6	195.60	-2.20	4.19		200.13	0.05
	10	187.93	-6.04			210.43	5.20
260	2	-	-		230-300	275.81	6.07
	6	259.77	-0.09	1.54		235.22	-9.54
	10	254.32	-2.18			278.22	7.00

Table 8. Actual and estimated crack depth with various method

Actual crack (mm)	Estimated crack(mm)							
	Present method		Kam & Lee's method ⁽¹⁴⁾		Rizos's method ⁽⁴⁾			
	Position (x)	Depth (a)	Depth (a)	* Error %	Depth (a)	* Error %	Depth (a)	* Error %
10	2	2.06	3.00		1.96	-2.00	2.08	4.00
	6	6.66	11.00	8.32	6.02	0.33	5.89	-1.83
	10	10.88	8.80		10.03	0.30	10.40	4.00
80	2	2.03	1.50		1.87	-6.50	1.95	-2.50
	6	6.63	10.50	10.33	6.01	0.17	6.32	5.33
	10	11.44	14.40		10.01	0.10	9.82	-1.80
140	2	1.95	-2.50		2.02	1.00	1.91	-4.50
	6	6.62	10.33	8.03	5.99	0.10	6.38	6.33
	10	10.90	9.00		10.03	0.30	9.71	-2.90
200	2	1.80	-10.00		2.02	1.00	2.10	5.00
	6	6.03	5.00	6.55	6.01	0.17	5.60	-6.66
	10	10.19	1.90		9.98	-0.20	9.45	5.50
260	2	1.20	40.00		2.07	3.50	2.13	6.50
	6	6.83	13.80	25.59	6.01	0.17	5.38	-2.83
	10	11.32	13.20		10.01	0.10	9.31	-6.90