

2차원 고유 진동 문제의 해석을 위한 파동해의 활용

°김 윤 영*, 강 정 훈**

(Application of Wave-Type Solutions to the Two Dimensional Free Vibration Problem)

(°Yoon-Young Kim*, Jeong-Hoon Kang**)

1. 서론

2차원 파동 방정식은 공학 전반 분야에서 가장 중요한 방정식의 하나로 음향 문제, 박막의 진동 문제, 파 가이드 문제 등의 지배 방정식이다. 또한, 평판의 두께가 그 판의 크기에 비하여 작고, 평판의 횡 변위가 두께에 비하여 훨씬 큰 경우에는 박막의 문제로써 가정할 수 있고⁽¹⁾, 단순 지지된 다각형 판의 고유 모드는 박막의 고유 모드와 같으며 고유 진동수는 박막의 고유 진동수의 제곱과 같다는 것은 이미 알려져 있으므로⁽²⁾ 파동 방정식의 적용 범위는 매우 넓다고 할 수 있다. 본 논문에서는 2차원 파동 방정식이 적용할 수 있는 문제중에서 파동 해를 사용하여 박막의 진동에 대하여 연구하였다.

지금까지의 박막의 진동 해석에 대한 연구를 살펴보면, 원형, 타원형, 직사각형등의 간단한 형상에 대해서는 엄밀해가 알려져 있다⁽³⁾⁻⁽⁵⁾. 하지만, 임의 형상의 박막에 대해서는 엄밀해가 존재하지 않기 때문에, 이의 진동 해석을 위한 여러 기법이 사용되어 왔는데, 박막의 문제는 파 가이드(wave guide)의 문제와 유사하므로 이 파 가이드에 대한 연구들을 살펴볼 필요가 있다.

Davies⁽⁶⁾와 Steele⁽⁷⁾은 유한 차분법(finite difference)을, Arlett⁽⁸⁾은 유한 요소법(finite elements)을 사용한 수치 해석 기법을 제안하였으며, 이 이외에도 point matching법(collocation method)⁽⁹⁾⁻⁽¹¹⁾, Rayleigh-Ritz법⁽¹²⁾, Galerkin법⁽¹³⁾ 등이 있다. 이러한 방법들은 임의 형상의 박막을 해석할 때 사용될 수 있으나, 해석해를 직접 활용한 기법이 아니기 때문에 고차의 진동 해석을 수행하기 위해서 많은 계산이 요구된다.

이 외에도 Laura, Meinke등은 등각 사상(conformal mapping)⁽¹⁴⁾⁻⁽¹⁷⁾을, Mazumdar⁽¹⁸⁾는 등처짐 곡선(constant deflection)을 이용하여 박막의 진동을 해석하였으나 이러한 방법들의 대부분은 첫번째 고유 모드에만 적용될 수 있다.

최근에 Nagaya⁽¹⁹⁾는 고차의 고유 진동 모드와 동 하중을 받는 경우의 박막의 동적 응답에 대한 해석적인 방법을 제시하였으며, Ding⁽²⁰⁾은 Nagaya⁽²¹⁾의 이론을 확대하여 탄성 지지된 질량을 갖는 박막 진동의 해석 기법을 제안하였으나 임의의 다각형 형상을 갖는 박막에 대해서는 적용할 수 없는 한계가 있다.

위에서 열거한 방법들은 주어진 경계 조건에 대해 미분 방정식을 직접적으로 푸는 기법에 관한 것인데 반해, 최근에는 진행되는 파를 고려하여 문제를 해석하는 기법^{(22),(23)}이 제시되어 그 장점들이 지적된 바 있으나, 박막등이 임의의 형상 일때는 적용될 수 없다.

본 연구에서는 일축 방향으로의 주파수에 따라 진행 또는 지수적으로 감소하며 다른 일축 방향으로는 푸리에 사인 시리즈와 유사한 형태의 진행되는 파 형태의 시도해를 사용하여 임의의 불록 다각형의 고유 진동수와 고유 모드를 구하는 새로운 기법을 제시하고자 하였다. 이 기법의 가장 큰 장점은 시도해가 지배 방정식을 엄밀히 만족하도록 선정하였기 때문에, 경계 조건만을 만족시키면 해를 구할 수 있는 것이다. 그러나, 이와 같은 파 형태의 해석해를 사용할 때 수학적 문제점의 하나인 해의 종속성 문제가 발생하여 이 기법이 제대로 사용될 수 없는 경우에, 이를 해결하는 방법을 본 논문에서 처음으로 제시하였다.

이 기법은 해석해를 바탕으로 하였기 때문에 작은 행렬 크기만으로 비교적 넓은 영역의 고유 진동수와 고유 모드를 구할 수 있을 뿐만 아니라 관심있는 주파수 대역에서만 고유 진동수를 검색해 볼 수 있다. 본 논문에서는 이 해석 기법을 고전적인 문제인, 모든 변이 고정된 임의 형상의 박막 진동 해석에 적용시키고 있다. 그러나, 이 기법을 잘 응용하면 좀 더 일반적인 형상(오목 다각형, 또는 다중 연결 다각형)도 해석할 수 있으며, 또한 평판 진동도 해석할 수 있기 때문에, 새로운 해석 기법으로 잠재력을 가지고 있다고 볼 수 있다. 본 기법의 타당성의 검증을 위해 여러 문제에 대해 본 해석 결과와 유한 요소 해석 결과를 비교하였다.

* 서울대학교 기계설계학과

** 서울대학교 기계설계학과 대학원

2. 해석 기법의 전개

먼저 이미 잘 알려진 박막의 지배 방정식⁽⁶⁾의 일반해를 살펴보자.

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad c^2 = \frac{\tau}{\rho_s} \quad (1)$$

x, y 는 직교 좌표계를 나타내며, ρ_s 는 박막의 면밀도 (surface density)이고, τ 는 단위 길이에 주어지는 박막의 장력이다. 박막의 횡 변위가 시간에 따라 조화적으로 변한다고 가정하면 횡 변위 v 는 식 (2)로 놓을 수 있다.

$$v = V(x, y)e^{-i\omega t} \quad (2)$$

식 (2)를 식 (1)에 대입하면, 식 (3)의 헬름홀츠 방정식⁽⁶⁾을 얻을 수 있는데,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + k^2 V = 0 \quad (3)$$

식 (3)에서 k 는 파수(wave number)이며 $k = \omega/c$ 의 관계가 있다.

박막의 고유 진동 해석을 위해 통상적으로는 다항식들과 같은 시도해(이것을 전파하지 않는 파(standing wave)로 볼 수 있다.)를 채택하는데 반해서, 본 연구에서는 전파하는 파를 사용하여 임의 형상의 박막 진동 해석을 수행하는 새로운 기법을 제안하고자 한다.

본 논문의 해석 기법을 그림. 1에 있는 다각형에 대해서 구체적으로 설명하고자 한다. 이 다각형의 변에 부착된 국부 좌표계를 (x_i, y_i) 로 다각형의 꼭지점을 (X_i, Y_i) 로 하고, 각 변의 길이는 L_i 로 나타내었다. 먼저 경계 조건이 임의로 주어졌을 때 (물론, 본 연구에서는 $V|_{\text{Boundary}} = 0$ 인 경우만을 고려하겠지만 해석 기법의 전개를 위해 이렇게 가정한다.)

각 변에서의 경계값 $\overline{V^{(i)}}(x_i)$ 을 다음에서처럼 구간이 L_i 인 푸리에 사인 시리즈로 전개한다.

$$\overline{V^{(i)}}(x_i) = \sum_{n=1}^{n_i} \overline{V_n^{(i)}} \sin \frac{n\pi x_i}{L_i} \quad (i=1, 2, \dots, n_e) \quad (4)$$

여기서 n_i 는 이론적으로 무한대이겠지만, 실제 수치 계산

에 사용되는 항의 갯수를 나타내며 n_e 는 변의 갯수이다.

이와 같이 변에서의 경계값을 사인 또는 코사인 시리즈로 전개하면 해석적인 해를 활용하기 좋은데, 평판의 굽힘문제⁽²⁴⁾, 축의 비틀림 문제⁽²⁵⁾등에 적용된 적이 있다.

식 (4)와 같은 경계 조건을 갖는 다각형 박막의 고유 진동 해석을 위해 그림. 1의 다각형을 그림. 2에서처럼 n_e 개의 반 무한 박막의 교집합으로 이루어진 것으로 본다. 이는 문제의 선형성을 이용한 중첩 원리를 이용하는 셈인데, 이러한 접근 방법에 의해 파 형태의 시도해를 이용할 수 있다는 사실에 주목해야 한다. 만약 j -번째 변에 관련된 반 무한 박막의 경계에 다음과 같은 변위 분포가 주어졌다면 (그림. 3(a))

$$\sum_{m=1}^{n_i} A_m^{(j)} \sin \frac{m\pi x_j}{L_j} \quad (-\infty < x_j < \infty) \quad (5)$$

식 (5)의 경계 조건에 대한 반 무한 박막의 해는 식 (3)으로부터 구해지는데 그 결과는 다음과 같이 간단하다.

$$V^{(j)}(x_j, y_j) = \sum_{m=1}^{n_i} A_m^{(j)} \sin \frac{m\pi x_j}{L_j} \cdot \exp \left[i \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{L_j}\right)^2} y_j \right] \quad (6)$$

$(j=1, 2, \dots, n_e)$

식 (6)은 j -번째 변에 관련된 반 무한 박막의 경계로부터 내부로 전파 ($\omega/c > m\pi/L_j$)하거나 지수적으로 감소하는 ($\omega/c < m\pi/L_j$) 해만을 나타낸다. 만약 $\omega/c = m\pi/L_j$ ($m=1, 2, \dots$)인 경우는 ω 를 차단 주파수라 하는데 이 때에는 해가 y_j 방향으로 변화하지 않음을 주목해 둘 필요가 있다. $\omega/c < m\pi/L_j$ 인 경우의 항들은 물리적으로 경계에서의 국부 효과와 관련된 양이다.

만약 식 (5)에 의한 변위 분포 대신에 다음의 식 (7)과 변위 분포를 j -번째 변에 관련된 반 무한 박막의 경계에 기술할 수도 있는데, (그림. 3(b))

$$\begin{cases} \sum_{m=1}^{n_i} A_m^{(j)} \sin \frac{m\pi x_j}{L_j} & \text{for } pL_j - L_j \leq x_j \leq pL_j - L_j \\ & (p=0, \pm 2, \pm 4, \dots) \\ 0 & \text{for else} \end{cases} \quad (7)$$

식 (7)의 경계 조건은 구간이 L_j^* ($L_j^* \geq L_j$)인 사인 시리즈의 형태로 표시되는데, 이 때의 해는 다음과 같이 표시된다.

$$V^{(j)}(x, y_j) = \sum_{m=1}^{n_j} A_m^{(j)} \sum_{k=1}^{n_j} B_{mk} \sin \frac{k\pi x_j}{L_j^*} * \exp \left[i \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{k\pi}{L_j^*}\right)^2} y_j \right] \quad (8)$$

($j=1, 2, \dots, n_e$)

식 (8)에서 계수 B_{mk} 는 $0 \leq x \leq L_j$ 에서만 $\sin m\pi x_j/L_j$ 이고 $L_j \leq x \leq L_j^*$ 에서 0인 함수를 구간 L_j^* 인 사인 시리즈로 전개할 때 나오는 계수이며, 아래의 식을 이용하여 주어진 L_j, L_j^* 에 대해서 수치 적분 없이 엄밀한 형태로 결과를 구할 수 있다.

$$B_{mk} = \frac{2}{L_j} \int_0^{L_j} \sin \frac{m\pi x_j}{L_j} \sin \frac{k\pi x_j}{L_j^*} dx_j \quad (9)$$

식 (6) 또는 식 (8)의 시도해를 본 문제 해석에 사용할 수 있는데, 식 (8)의 시도해를 고려해야만 하는 이유는 곧 논의하기로 한다. 이를 위해 먼저 식 (5)과 식 (7)의 조건에 의해 생성되는 시도해의 특성을 구체적으로 살펴보면, 식 (5)의 경계 조건에 대해서는 $\omega/c = m\pi/L_j$ ($m=1, 2, \dots$) 일 때마다 y_j 방향으로 변화하지 않는 해가 상용한다는 것이고, 식 (7)의 경계 조건에 대해서는 어떠한 ω/c 에 대해서도 적은 양이라 할지라도 y_j 방향으로 변화하는 해(즉, 전파하거나, 지수적으로 감소하는 해)가 존재한다는 것이다.

예를 들어 직사각형 박막 ($L_1=L_3, L_2=L_4$)에서는 마주 보는 변의 길이가 같기 때문에 식 (6)의 시도해에 대해서는 $\omega/c = m\pi/L_1 = m\pi/L_3$ ($m=1, 2, \dots$) 일 때 변 1과 변 3에 관련된 시도해가 단순히 $\sin m\pi x_1/L_1$,

$\sin m\pi x_3/L_3 = (-1)^{m+1} \sin m\pi x_1/L_1$ (여기서 $x_3 = L_3 - x_1$)이며 그림 1 참조)로 되어 수학적으로 독립적이지 않게 되는 문제가 발생한다. 그러나, 식 (8)의 시도해는 어떠한 경우에도 박막 내부로 전파하는 파를 표현하고 있으므로 식 (6)에 의한 시도해에서 관찰되는 해의 종속성 문제는 사라지게 된다. 따라서 식 (7)에 의한 조건으로부터 생성해 낸 식 (8)의 시도해는 이러한 종속성의 문제가 없도록 선정되었는데, 이러한 종속성의 문제점의 관찰이나, 식 (8)과 같은 형태

와 같은 시도해의 도입등은 본 논문에서 처음으로 제시되는 사항이다.

지금부터 식 (6) 또는 식 (8)을 사용하여 문제를 해석하기 위한 중첩 과정을 설명하고자 한다. 이는 j -번째 변에 관련된 시도해 $V^{(j)}(x, y_j)$ 에 의한 j -번째 변에의 영향을 나타내는 $\overline{V^{(i,j)}}(x_i)$ 를 구하여 각 경계의 조건을 만족시키도록 계수 $A_m^{(j)}$ 를 구하는 것이 된다. 만약 경계에서의 값 $\overline{V^{(i,j)}}(x_i)$ 를 푸리에 사인으로 전개한다면 다음으로 표시될 수 있다.

$$\overline{V^{(i,j)}}(x_i) = \sum_{n=1}^{n_i} \sum_{m=1}^{n_i} A_m^{(j)} VM_{(n,m)}^{(i,j)} \sin \frac{n\pi x_i}{L_i} \quad (10)$$

여기서 $VM_{(n,m)}^{(i,j)}$ 의 물리적 의미는 j -번째 변에 관련된 반무한 박막의 경계에 $A_m^{(j)} \sin m\pi x_j/L_j$ 가 기술되었을 때 i -번째 변에 끼치는 영향(이를 들면 전달되는 파의 영향)을 구간이 L_i 인 사인 시리즈로 전개할 때의 m -번째 계수를 나타낸다.

실제 $VM_{(n,m)}^{(i,j)}$ 은 엄밀한 형태로 얻어지는데 푸리에 시리즈의 직교성과 다음에서 기술하는 국부 좌표계간의 관계를 이용하면 쉽게 구할 수 있다.

이제 i -번째 변에 나타나는 모든 시도해의 영향을 고려하면(즉, $j=1, 2, \dots, n_e$ 에 대해 합을 수행)

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n_i} \overline{V^{(i,j)}}(x_i) &= \sum_{j=1}^{n_i} \left[\sum_{n=1}^{n_i} \sum_{m=1}^{n_i} A_m^{(j)} VM_{(n,m)}^{(i,j)} \sin \frac{n\pi x_i}{L_i} \right] \\ &= \sum_{n=1}^{n_i} \left(\sum_{j=1}^{n_i} \sum_{m=1}^{n_i} A_m^{(j)} VM_{(n,m)}^{(i,j)} \right) \sin \frac{n\pi x_i}{L_i} \quad (11) \\ &\equiv \sum_{n=1}^{n_i} \overline{V}_n^{(i)} \sin \frac{n\pi x_i}{L_i} \quad (i=1, 2, \dots, n_e) \end{aligned}$$

식 (11)의 마지막 식은 i -번째 경계에서의 변위를 구간 L_i 에서의 푸리에 사인시리즈로 표시한다는 것을 의미한다.

(식 (4) 참조) 이제 식 (11)로부터

$$\overline{V}_m^{(i)} = \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{m=1}^{n_i} VM_{(n,m)}^{(i,j)} A_m^{(j)} \quad (12)$$

를 얻는데 이를 기호로 표시하면 식 (13-a)와 같다.

$$\overline{V} = VM \cdot A \quad (13-a)$$

여기서

$$\bar{V} = \begin{Bmatrix} \frac{V^{(1)}}{V^{(2)}} \\ \vdots \\ \frac{V^{(n_s)}}{V^{(n_s)}} \end{Bmatrix}; \quad A = \begin{Bmatrix} A^{(1)} \\ A^{(2)} \\ \vdots \\ A^{(n_s)} \end{Bmatrix} \quad (13-b)$$

그리고,

$$\bar{V}^{(j)} = \begin{Bmatrix} \frac{V_1^{(j)}}{V_2^{(j)}} \\ \vdots \\ \frac{V_{n_s}^{(j)}}{V_{n_s}^{(j)}} \end{Bmatrix}; \quad A = \begin{Bmatrix} A_1^{(j)} \\ A_2^{(j)} \\ \vdots \\ A_{n_s}^{(j)} \end{Bmatrix} \quad (13-c)$$

해석 영역의 기하학적 형상에 좌우되는 VM 행렬은 다음과처럼 표시되는데 이의 형태는 다음과 같다.

$$VM = \begin{bmatrix} VM^{(1,1)} & \dots & VM^{(1,j)} & \dots & VM^{(1,n_s)} \\ VM^{(2,1)} & \dots & VM^{(2,j)} & \dots & VM^{(2,n_s)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ VM^{(i,1)} & \dots & VM^{(i,j)} & \dots & VM^{(i,n_s)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ VM^{(n_s,1)} & \dots & VM^{(n_s,j)} & \dots & VM^{(n_s,n_s)} \end{bmatrix} \quad (14)$$

식 (14)에서 행렬 $VM^{(i,j)}$ 은 물리적으로 j -번째 변에 관련된 반 무한 평면의 시도해가 i -번째 경계부에 끼치는 양을 나타낸다. 주파수 ω 의 함수인 행렬 VM 이 구성되면 박막의 모든 변이 고정되었다는 조건 $\bar{V}=0$ 을 이용하여 고유 진동수를 구할 수 있는데, 식 (13-a)로부터 자명한 해를 얻지 않는 조건인 다음의 식을 이용한다.

$$Def[VM] = 0 \quad (15)$$

해를 얻기 위해서는 관심있는 주파수 대역에서 진동수를 빈해가면서 VM 의 행렬식의 값을 0으로 만드는 고유 진동수를 구한 후, 그 진동수에서 계수 A 들 간의 관계를 구하면 고유 모드를 찾을 수 있다. 본 연구에서는 행렬식의 값을 검사하고, 계수를 얻는 방법으로 특이값 분해방법⁽²⁷⁾⁻⁽²⁸⁾을 사용하였다. 즉, ω 값을 변화시켜 가면서 VM 행렬식의 최소 특이값(SV_{min})/최대 특이값(SV_{max})이 0이 될때(실제 수치

계산에서는 10^{-3} 이하로 택함) 그 때의 진동수 ω 를 고유 진동수로 취한다.

실제 수치 예제를 다루기 전에 본 절에서 먼저 이 기법의 타당성 검증을 위한 문제를 고려해보고자 한다. 즉, 그림 1의 오각형 박막의 고유 진동수를 얻기 위해 식 (6)과 식 (8)의 시도 함수를 이용하여 주파수 $f(=\omega/2\pi)$ 를 0 Hz에서 200 Hz 까지 변화시켜 가면서 VM 행렬의 SV_{min}/SV_{max} 구해 그림 4 (a), 그림 4 (b)에 그려 보았다. 전술된 바와 같이 SV_{min}/SV_{max} 의 값이 0에 가까운 주파수는 오각형 박막의 고유 진동수로 간주되어야 할 것이다. 즉, 그림 4 (a)를 보면 76, 125, 170, 185 Hz 부근에서 고유 진동수가 나타낸다고 판단할 수 있으나 이 형상의 박막에 ANSYS 유한 요소 해석을 수행해보면 (다음절에서 계산 결과 설명) 실제 고유 진동수는 125 Hz, 185 Hz 주위에서만 나타남을 알 수 있다. 따라서, 식 (7)의 시도해에 의한 해석은 실제 고유 진동수가 아닌 부근(76 Hz, 125 Hz)에서도 SV_{min}/SV_{max} 값이 0에 가까운 값을 주어 문제점을 내포하고 있다.

이러한 문제점을 면밀히 조사해 본 결과, 사용되는 시도해가 특징상 해석하고자 하는 박막의 기하학적 형상에 따라 특정한 주파수에서 시도해의 독립성을 잃어버리게 됨으로써 VM 행렬의 계수(rank)가 전체 행렬의 크기($n_k \times n_s$)보다 작아지기 때문이다. 이러한 문제는 해석하고자 하는 박막의 기하학적 형상과 관계가 있는데, 그림 1의 오각형 박막의 변 2와 변 5의 길이가 같아서 두 변에 관련된 첫번째 시도해들이 (즉, $j=1$ 또는 $2, m=1$) 동일한 차단 주파수, 즉, $\omega = \pi/L_2 = \pi/L_5$ ($f = 170$ Hz)를 갖는다. 이 경우에는 앞에서 사각형 형상의 박막의 문제에서 지적했듯이 이 주파수에서 두 변에 관련된 시도해의 독립성을 상실하게 된다. 따라서 이 때의 ω 가 실제 고유 진동수이든 아니든, 무조건 계수(rank)가 줄어들어 $Def[VM] = 0$ 이 되어 문제가 발생한다. 또한, $f=76$ Hz($\omega = \pi/2\pi L_3 = \pi/2\pi L_4$)에서도 유사한 문제가 발생한다. 이러한 문제점을 극복할 수 있다고 판단되는 몇 가지 방법을 고려해 보았으나, 실제 이 논문에 채택한 방법은 어떠한 경우에도 같은 종속적인 시도해가 나오지 않도록 처음부터 정식화하는 것인데, 이 방법은 식 (8)과 같은 시도해를 사용하여 어떠한 경우에도 종속적인 시도해가 생성되지 않도록 하는 방법이다. 이를 위해서 식 (7)과 같은 반 무한 박막에서의 경계 조건의 해로

서 시도해줄 설정하므로써, 해가 독립적인 것을 보장할 수 있는데, 특징은 어떠한 경우에도 각 시도해내에는 반 무한 박막의 각 번으로부터 진파하는 파가 포함되어 있다.

이와 같은 접근법은 본 논문에서 처음으로 제안하는 방법으로, 시도해의 수학적인 문제점을 면밀히 분석해 봄으로써 가능하였다. 이 방법의 단점은 시도해가 복잡하게 되기 때문에 실제 수치 계산량은 다소 증가하나, 모든 계산이 엄밀하게 이루어 질 수 있기 때문에 상가에서 지적인 시도해의 독립성을 보장하기 위한 좋은 대안이라 판단된다.

실제 계산시 $L_j^* = (1.5 \sim 2.0) * L_j$ 를 취하고 이 때 사용되는 $n_h^* \approx 6n_h$ 를 사용하였다. 사용된 L_j^* 의 크기는 해의 독립성을 보장하면서 계산량을 크게 증가시키지 않도록 결정되었다. 이제 이 방법으로 그림. 1의 오각형 문제를 해석한 결과를 그림. 4 (b)에 실어 놓았는데 그림. 4 (a)와는 달리 실제 고유 진동수에서만 $SV_{min}/SV_{max} \approx 0$ 이 되어 시도해의 종속성 문제가 해결되어 만족스런 결과를 얻을 수 있음을 알 수 있다.

3. 수치 예제

본 기법의 타당성을 검증해 보고자 한다. 다음은 해석에 사용한 박막의 제원이다.

$$\rho_s = 1.293 \times 10^{-5} \text{kg/m}^2 ; \quad r = 1.503243 \text{N/m}$$

$$L_1 = 2m, \quad L_2 = L_5 = 1m, \quad L_3 = L_4 = \sqrt{5}m$$

ANSYS⁽²⁶⁾를 사용하여 요소수를 변경시키면서 얻은 유한 요소 해석 결과와 본 해석 결과를 그림. 6에 비교하였다. n_{el} 은 사용된 유한 요소 갯수를 나타내며, 1 절점 요소를 사용하였다.

그림. 6 으로부터 유한 요소수가 증가됨에 따라 본 해석 결과에 접근하고 있는데, 특히 고차 고유 진동수에 대해서는 더욱 많은 유한 요소수가 필요함을 알 수 있다. 그림. 5는 본 기법으로 구한 오각형 박막의 첫번째와 두번째 모드를 나타내는데 ANSYS에 의한 모드와 거의 동일함을 확인하였다. (이 그림에서는 직사각형 형상위에 그림 1의 오각형 형상이 고유 모드를 그렸음을 주의하기 바란다.) 그림. 5를 살펴보면 경계 부위에서 모드 형상이 약간 왜곡되어 나타남을 알 수 있는데, 이것은 전형적인 푸리에 시리즈의 특징이며 많은 항을 취하면 이와 같은 문제점은 완화된다.

두번째 문제로 Laura⁽³⁰⁾가 해석한 단순 지지된 정오각형

판의 기본 진동수(fundamental frequency)를 구하기 위해, 판과 박막과의 유사성⁽³¹⁾을 이용하였다. Laura의 결과와 본 연구 결과, 그리고 ANSYS 유한 요소 해석 결과를 표. 1에 비교해 보았는데 매우 잘 일치함을 알 수 있다.

표 1. 단순 지지된 정 오각형 판의 첫번째 고유 진동수의 비교

Laura	ANSYS ($n_{el}=2228$)	PRESENT ($n_h=6$)
90.0 Hz	89.8 Hz	90.0 Hz

4. 결론

본 논문에서는 임의 형상의 불록 다각형 박막 고유 진동 해석을 위해 파 형태의 해석해틀을 사용하는 새로운 기법을 제시하였다. 파 형태의 해석해틀 임의 형상의 박막에 사용하는 데 있어 나타날 수 있는 시도해의 종속적인 문제점을 지적하고, 이를 극복하는 방안을 제시하였다. 여러 수치 예제를 통해 본 기법의 유용성과 타당성을 보였고, 특히 이 기법은 특정 주파수 대역에서 고유 진동수를 찾고자 할 때, 매우 효율적임을 알 수 있다. 본 논문은 기초 연구로서 제한된(모든 변이 고정된 불록 다각형 형상의 박막의 고유 진동 해석만 수행하였지만, 이 기법을 확장, 발전시켜 나가면, 어떠한 형상이나 경계조건을 갖는 박막뿐만 아니라 평판의 진동 해석에도 적용할 수 있으리라 기대하며, 이를 위한 연구가 진행중이다.

5. 참고문헌

1. Timoshenko, S. and Woinowsky-Krieger, S., 1959, *Theory of plates and shells*, 2nd ed, McGraw-Hill, New York.
2. Durvasula, S., 1968, "Natural frequencies and modes of skew membranes," *J. Acoust. Soc. Amer.*, Vol 41, pp. 1636-1646.
3. Rayleigh, L., 1945, *Theory of sound*, 2nd ed., Dover Pub. Co., New York., pp. 306-351.
4. McLachlan, N. W., 1947, "Vibration problems in the elliptical coordinates," *Quart. Appl. Math.*, Vol. 3, pp. 289-297.
5. Kinsler, L. E., 1982, *Fundamentals of acoustics*, 3rd ed., John Wiley and Sons, New York.
6. Davies, J. B. and Muilwyk, C. A., 1966, "Numerical solutions of uniform hollow waveguides with boundaries

of arbitrary shape." Proc. Inst. Elec. Engrs., Vol. 113, pp. 277-284.

7. Steele, C. W., 1968, "Numerical computation of electric and magnetic field in a uniform waveguide of arbitrary cross-section," J. Comp. Phys., Vol. 3, pp. 48-153.

8. Arlett, P. L. Bahrani, A. K. and Zienkiewicz, O. C., 1968, "Application of finite elements to the solution of Helmholtz's equation", Proc. Inst. Elec. Engrs, Vol. 115, pp. 1762-1766.

9. Yee, H. Y., 1965, "On determination of cutoff frequencies of waveguides with arbitrary cross-section," Proc. Inst. Elec. and Elect. Engrs, Vol. 54, p. 64.

10. Yee, H. Y. and Audeh, M. F., 1966, "Cutoff frequencies of eccentric waveguides," Inst. Electrical and Electronic Engrs., Trans. Microwave Theory Tech., MTT-14, pp. 487-493.

11. Bates, R. H. T., 1969, "The theory of point-matching method for perfectly conducting wavelengths and transmission lines," Inst. Electrical Electronic Engrs., Trans. Microwave Theory Tech., MTT-17, pp. 294-301.

12. Bulley, R. M. and Davies, J. B., 1969, "Computation of approximate polynomial solutions to TE modes in an arbitrary shaped waveguide," Inst. Electrical and Electronic Engrs. Trans. Microwave Theory Tech., MTT-17, pp. 440-446.

13. Laura, P. A. A., 1966, "A simple method for calculation of cut-off frequencies of waveguides with arbitrary cross-section," Proc. Inst. Electrical and Electronic Engrs, Vol. 54, pp. 1495-1497.

14. Chim, M. and Laura, P. A. A., 1964, "Approximate method of determining the cutoff frequencies of waveguides of arbitrary cross-section," Inst. Electrical and Electronic Engrs. Trans. Microwave Theory Tech., MTT-12, pp. 248-249.

15. Meinke, H. H., Ange, K. P. and Rurger, F., "TE and TM waves in waveguides of very general cross-section," Inst. Electrical and Electronic Engrs., Vol. 51, pp. 1443-1436.

16. Laura, P. A. A., Romanelli, E. and Maurizi, M. J., 1972, "The analysis of waveguides of doubly-connected cross-section by the method of conformal mapping," J.

Sound and Vibration., Vol 20, pp. 7-38.

17. Laura, P. A. A., 1972, "The solution of Helmholtz equation in elliptical coordinates," Inst. Electrical and Electronic Engrs. Trans. Microwave Theory Tech., MTT-20, p. 292.

18. Mazumdar, J., 1973, "Transverse vibration of membranes of arbitrary shape by the method of constant-deflection contours," J. Sound and Vibration, Vol. 27, pp. 47-67.

19. Nagaya, K., 1979, "Vibration of an arbitrary shaped membrane with point supports," J. Sound and Vibration, Vol. 65, pp. 1-9.

20. Ding, Z., 1992, "Vibration of arbitrary shaped membrane carrying elastically mounted masses," Computers and structures, Vol. 42, pp. 389-394.

21. Nagaya, K., 1978, "Vibration and dynamic response of membranes with arbitrary shape," J. Sound and Vibration, Vol. 45, pp. 153-158.

22. Langley, R. S., 1991, "Analysis of beam and plate vibrations by using the wave equation," J. Sound and Vibration, Vol. 150, pp. 47-65.

23. Koopmann, G. H., Song, L. and Fahline, J. B., 1989, "A method for computing acoustic fields based on the principle of wave superposition," J. Acoust. Soc. Amer., Vol. 86, pp. 2433-2438.

24. Kang, L. C., 1992, "Fourier series method for plate bending problems," Ph. D. Thesis, Stanford University, Stanford, U.S.A.

25. Kim, Y. Y. and Yoon, M. S., 1994, "Torsion analysis of a prismatic circular bar using analytic solutions," to be submitted.

26. ANSYS User's manual, 1992, Swanson analysis systems, Inc.

27. Golub, G. H. and Reinch, C., 1970, "Singular value decomposition and least squares solutions," Numer. Math., Vol. 14, pp. 403-420.

28. Jung, H., 1992, "Structural dynamic updating using eigensensitivity analysis," Ph. D. Thesis, Imperial college, London, U.K.

29. Maia, M. M. M., "An introduction to the singular value decomposition technique," Imperial college of science, Technology and Medicine. London, U.K.

30. Laura, P. A., Shahady, P. A., and Passarelly, R.,

1967, "Application of complex-variable theory to the determination of the fundamental frequency of vibrating plates," J. Acous. Soc. Amer., Vol. 42, pp. 806-809.

31. Blevins, R. D., 1979, *Formulas for natural frequency and mode shape*, Van nostrand reinhold company, New York..

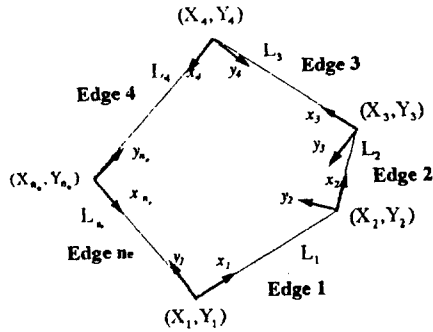


그림.1 오각형 박막의 기하학적 형상과 좌표계

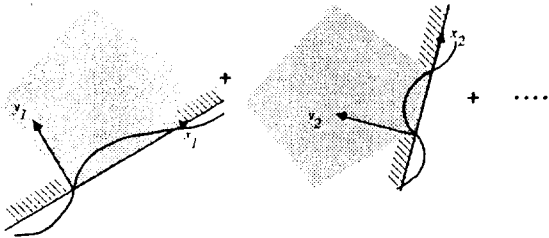


그림.2 반 무한 평면을 갖는 박막에서 x_1 축으로는 주기함수이고 y_1 로는 진파하거나 감소하는 파의 형태

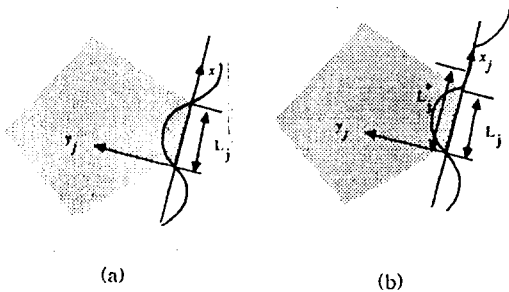
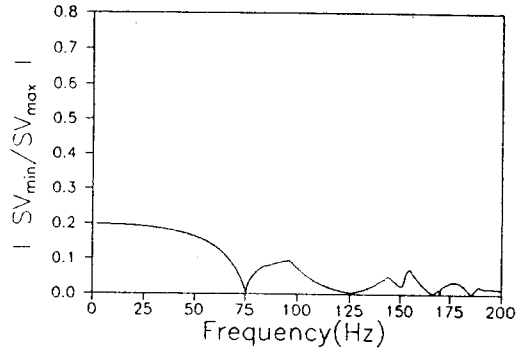
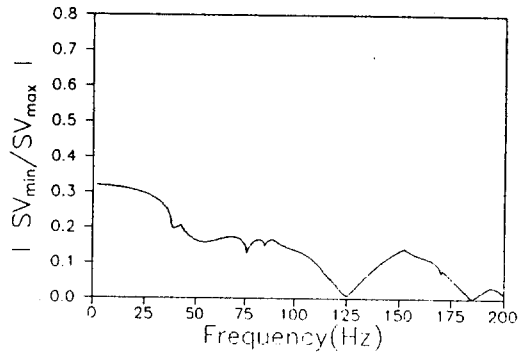


그림. 3 (a) 반 무한 박막에서의 구간 L_1 인 경계 조건

(b) 구간이 L_j 일 때, 현 방법에 의하여 선택한 경계 조건



(a)



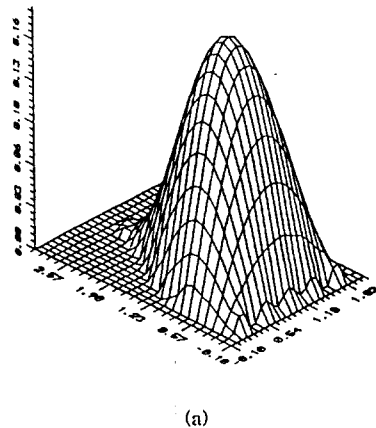
(b)

그림. 4 (a) 식 (6)을 사용한 주파수 $f = \omega/2\pi$ 대

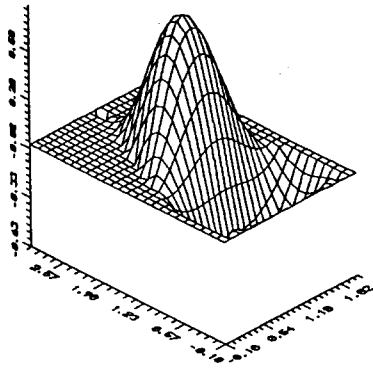
$$|SV_{\min}/SV_{\max}|$$

(b) 식 (8)을 사용한 주파수 $f = \omega/2\pi$ 대

$$|SV_{\min}/SV_{\max}|$$

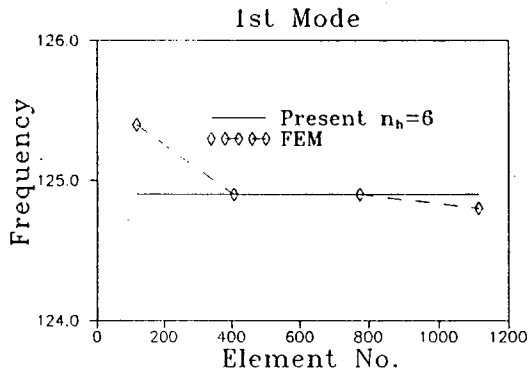


(a)

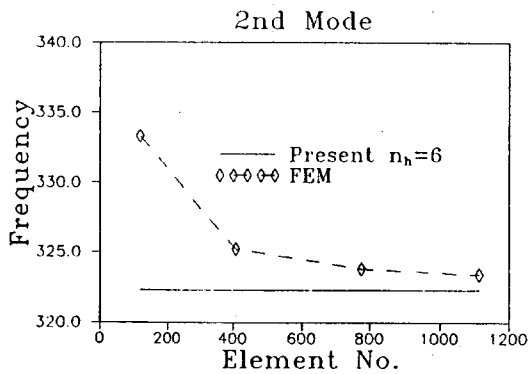


(b)

그림. 5 (a) 현 방법에 의하여 얻은 첫번째 고유 모드
(b) 현 방법에 의하여 얻은 두번째 고유 모드



(a)



(b)

그림. 6 (a) FEM과 현 방법의 첫번째 고유 진동수의 비교
(b) FEM과 현 방법의 두번째 고유 진동수의 비교