

간극내 운동의 실험해석

최연선*, 김경래**

(Experimental Evaluation of the motion in Clearance)

(Yeon-Sun Choi, Kyung-Lae Kim)

1. 서론

일반적으로 기계시스템은 가공여유, 혹은 마모로 발생한 간극으로 인하여 부품들간에 간헐적인 접촉이 일어나 접촉부위에 불규칙한 동하중이 걸리게 되며, 이로 인하여 큰 응력, 과도한 소음등을 일으켜 결국에는 기계계의 성능저하를 초래하게 된다.

간극에 의한 간헐적인 접촉/비접촉 현상은 링크연결기구, 로봇, 전기릴레이등의 여러 기계요소에서 볼 수 있다. Idle, 혹은 저속주행시 자동차의 변속기에서 발생하는 Rattle 소음과 고속회전기계에서 발생하는 Rubbing[1] 역시 간극에 기인하는 문제인 것이다.

따라서 간극내 기계계의 진동은 기계계의 성능향상을 위한 중요한 문제로서 많은 연구자들에 의하여 연구되어 왔다.

최연선[2]은 간극이 있는 시스템을 접촉영역과 비접촉영역으로 나누어 분리된 선형계로 보고, 편적선형진동자(Piecewise-linear oscillator)로 모델링하여 접촉점에서의 경계조건을 만족시키는 정상상태응답을 구하였으며, 이를 링크연결기구에 적용하여 정상해를 구하였다.

비선형 미분방정식을 대수함수식으로 변환하여 유도된 비선형 대수방정식의 해를 수치해석적으로 구하는 Semi-Numerical방법을 이용하여, Maezawa[3]는 분수조화운동을 해석하였고, 최연선은 FFT 알고리즘을 이용하여, 강제편적 선형진동[4]과 베어링 간극에 의한 회전기계의 분수조화진동[5]을 해석하였다.

Noah[6]는 간극이 있는 외팔보에 대한 해석적, 실험적 연구를 통하여 시스템의 동적 매개변수를 결정하는 연구를 수행하였다. 박영필[7]은 외팔보의 자유단에 Stopper를 설치하여, 구속운동하는 보의 운동을 실험하고 수치해석하였다. 정구충[8]은 자기력으로 가진되는 외팔보를 제작하여, 간극이 있는 경우에 대한 외팔보의 비선형동적응답을 관찰하였다. Sato[9]는 지지부에 간극을 가지는 보에 대하여 기술함수를 이용하여 시스템의 강성을 예측하고, 실험을 통하여 도약현

상을 관찰하였다.

기계시스템에 존재하는 간극으로 인한 진동은 시스템의 성능에 커다란 영향을 미치므로, 정밀기계의 설계를 위해서는 넓혀 연구해야 할 과제이다. 그러나, 간극이 있는 기계계의 진동은 강비선형성 진동문제로서 초기조건 의존성(Initial condition dependence), 다중해(Multiple solution), 도약현상(Jump phenomenon), 혼돈운동(Chaotic motion) 등의 비선형 현상을 유발한다. 따라서 정확한 응답을 예측하기에 어려움이 있으며, 이론적으로는 비교적 많은 연구가 진행되어 왔으나, 실험적 연구는 아직 부족한 형편이다.

따라서, 본 연구에서는 Stopper가 있는 외팔보 실험을 통하여 간극이 있는 기계계의 응답을 관측하고, 이론 모델을 정립하여 관측된 현상을 설명하고자 한다. 또한, 이러한 해석을 바탕으로 설계변수변화에 따른 응답특성을 예측함으로써 정밀, 고속기계의 설계를 위한 기본자료를 정립하고자 한다.

2. 간극내 외팔보 운동의 실험

본 연구에서 사용된 실험장치는 Fig.1과 같다.

실험에 사용된 보의 재료상수와 규격은 다음과 같다.

Table.1 Properties of the Beam

l (length)	0.08 m
h (thickness)	3.5×10^{-3} m
b (width)	1.45×10^{-2} m
ρA (mass/length)	3.813×10^{-2} kg/m
EI	1.427×10^{-2} Nm ²

가진기에 외팔보를 고정시키고, 외팔보의 자유단에 한 쌍의 Stopper를 설치하여 간극의 크기를 조정된 후 실험을 수행하였다. 보에 가하는 입력은 가진기의 외팔보 고정부에 부착한 가속도계로 측정하고, 보의 응답은 보에 부착한 스트레인 게이지로 측정하였다. 함수발생기로부터 정현파를 발생시켜 가진기를 구동하였으며, 가진진동수를 증가/감소시키며 각각의 경우에 대하여 응답을 측정하고, 간극의 크기를 변화시키며 실험을 수행하였다. 가진진동수를 변화시킬 때 가진력은 항상 일정한 값을 유지하도록 하였다.

* 성균관대학교 기계설계학과

** 성균관대학교 기계설계학과 대학원

외팔보의 1차고유진동수는 53.5 Hz 이며, 2차고유진동수는 319 Hz 이고, 실험영역은 150 Hz 까지이므로 실험구간내에서는 2차모드 이상의 영향은 받지 않는다고 가정한다.

간극의 크기를 변화시키며, 가진진동수를 각각 증가, 감소 시키며 보의 응답을 측정 한 결과를 Fig.2에 나타내었다. 가진진동수를 증가시킬 때와 감소시킬 때를 비교하면, 도약현상이 나타나는 것을 알 수 있으며, 간극의 크기가 커짐에 따라 응답의 변위는 증가하고, 접촉구간은 좁아지는 것을 알 수 있다.

접촉하는 구간의 데이터를 시간역에서 본 결과를 Fig.3에 나타내었으며, 또한, 이 데이터를 스펙트럼 분석하여 Fig.4에 나타내었고, 각각의 가진진동수에 따른 고차조화주파수의 경향을 보기 위하여 Fig.5에 Waterfall Diagram으로 나타내었다. 각각의 경우에 대하여 고차조화주파수 성분들이 존재하는 것을 뚜렷이 파악할 수 있다.

3. 운동방정식

3.1 고유진동수와 Shape function 계산

Euler-Bernoulli 보 이론에 의하여 감쇠를 무시한 보의 운동방정식은 다음과 같다.

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(x, t) \quad (3.1)$$

보가 Stopper와 접촉하기 전에는 외팔보 운동이 되므로 외팔보의 경계조건을 대입하여 보의 고유진동수와 모드형상을 구하면 다음과 같다.

$$\omega^2 = (\beta_n D)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A I^4}}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \phi_n^F(x) = & (\cosh \beta_n x - \cos \beta_n x) \\ & - \frac{\cosh \beta_n l + \cos \beta_n l}{\sinh \beta_n l + \sin \beta_n l} (\sinh \beta_n x - \sin \beta_n x) \end{aligned} \quad (3.3)$$

식(3.2)에 의하여 계산한 보의 고유진동수는 $\omega_1 = 53.5$ Hz 이며, 실험으로 측정 한 값인 52.5 Hz 와 대체로 일치함을 알 수 있다.

보가 Stopper와 접촉하는 동안에는 경계조건을 Fixed-Pinned로 보고 계산하면, 모드형상은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \phi_n^C(x) = & \cosh \beta_n x - \cos \beta_n x \\ & - \frac{\cosh \beta_n l - \cos \beta_n l}{\sinh \beta_n l - \sin \beta_n l} (\sinh \beta_n x - \sin \beta_n x) \end{aligned} \quad (3.4)$$

접촉하는 경우의 고유진동수는 $\omega_1 = 234.6$ Hz 로서, 접촉하지 않는 경우의 53.5 Hz 보다 매우 크므로, 접촉시에 강성이 크게 변화함을 알 수 있다.

3.2 기반의 가진에 의한 보의 운동

기반의 가진에 의해 운동하는 외팔보의 변위는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$w'(x, t) = w^s(x, t) + w(x, t) \quad (3.5)$$

여기서, w' : 전체변위

w^s : 지지점의 변위

w : 동특성에 의한 부가 변위

식(3.5)를 식(3.1)에 대입하고 정리하면

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = P_{eff}(x, t) \quad (3.6)$$

$$P_{eff} = -\rho A \varphi(x) \delta(t) \quad (3.7)$$

$\varphi(x) = 1$

$\delta(t)$: 경계점 변위

식(3.7)은 다음과 같이 된다.

$$P_{eff} = \rho A D \Omega^2 \cos \Omega t \quad (3.8)$$

(여기서, D : 지지점 변위량)

식(3.6)에 식(3.3) 또는 식(3.4)의 모드형상을 대입하여 Rayleigh법을 적용하면,

$$M_n \ddot{Y}_n(t) + \omega_n^2 M_n Y_n(t) = P_n(t) \quad (3.9)$$

식(3.9)의 양변을 M_n 으로 나누고, 감쇠를 고려하면

$$\ddot{Y}_n(t) + 2\zeta_n \omega_n \dot{Y}_n(t) + \omega_n^2 Y_n(t) = \frac{P_n(t)}{M_n} \quad (3.10)$$

계의 총 응답 $w(x, t)$ 는 다음 식으로부터 구한다.

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) Y_n(t) \quad (3.11)$$

식 (3.10)은

$$\ddot{Y}_n(t) + 2\zeta_n \omega_n \dot{Y}_n(t) + \omega_n^2 Y_n(t) = F_0 \cos \Omega t \quad (3.12)$$

라고 쓸 수 있다.

보의 끝단에 Stopper를 설치하여 간극을 준 경우의 운동방정식은 식(3.11)로부터 다음과 같으며, 센서부착위치의 x 값을 대입하여 응답을 계산한다.

$$w(x, t) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n^F(x) Y_n(t) & |x| < d \\ \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n^C(x) Y_n(t) & |x| \geq d \end{cases} \quad (3.13)$$

$$\ddot{Y}_{n1}(t) + 2\zeta_{n1}\omega_{n1}\dot{Y}_{n1}(t) + \omega_{n1}^2 Y_{n1}(t) = \frac{P_{n1}(t)}{M_{n1}} \quad |x| < d$$

$$\ddot{Y}_{n2}(t) + 2\zeta_{n2}\omega_{n2}\dot{Y}_{n2}(t) + \omega_{n2}^2 Y_{n2}(t) = \frac{P_{n2}(t)}{M_{n2}} \quad |x| \geq d$$

결국 Stopper 내의 외팔보운동은 Fig.6과 같은 편직선형 1자유도계 해석적 모델이 될 수 있으며 운동방정식은 접촉/비접촉에 대하여 식 (3.14)와 같이 유도된다.

$$M\ddot{x} + C_1\dot{x} + K_1x = F_0\sin\omega t \quad : |x| < d$$

$$M\ddot{x} + (C_1 + C_2)\dot{x} + (K_1 + K_2)x = F_0\sin\omega t \pm K_2d : |x| \geq d \quad (3.14)$$

Rayleigh 공식, $k = \int_0^L EI(\phi'')^2 dx$ 를 사용하여 보의 강성값을 계산하면, $K_1=344.6\text{N/m}$, $K_1+K_2=6625.6\text{ N/m}$ 이며, $m = \int_0^L \rho A \phi^2 dx$ 로부터, $M=0.0030504\text{ kg}$ 이고, 자유진동실험 결과로부터 대수감쇠율법으로 계산한 시스템의 감쇠값은 $C_1=0.0276\text{ Ns/m}$, $C_1+C_2=0.231\text{ Ns/m}$ 이다

4. 접촉에 의한 고차조화성분해석

수치조화균형법[10]을 이용하여 정상해를 구하기 위해 식 (3.14)에서 스프링력항과 감쇠력항을 비선형항으로 보고, 정상해를 구하기 위해서 먼저 미지의 변위와 비선형항을 각각 푸리에급수로 가정하였다. 이 식으로부터 상수항, cosine 항, sine 항의 계수를 비교하여 얻은 비선형연립방정식을 IDFT (Inverse Discrete Fourier Transform)와 DFT하여 Fourier 계수를 계산하였으며, 효율적인 DFT를 수행하기 위하여 FFT 알고리즘을 이용하였다.

비선형연립방정식을 풀기 위해 Newton-Rapson법을 이용하였다. 초기값은 임의로 선택할 수 있으나, 만일 초기값을 적절히 선정할 경우에는 해가 보다 빨리 수렴하게 된다. 따라서, 초기값은 비선형항을 무시한 선형방정식으로부터 구한 정상해를 선정하였다.

수치조화균형법을 사용하여 계산한 응답은 실험 및 수치해석과 잘 일치하였으며, 접촉하는 구간에서의 3차조화주파수 성분의 존재를 확인할 수 있었다. 결과를 Fig.7에 나타내었다.

3차조화주파수 성분은 Fig.8에서 보는 바와 같이 접촉하는 구간에서의 불연속응답에 기인하는 것으로 볼 수 있다. 즉 불연속적인 주기응답을 주파수분석할 때 발생하는 고차항에 해당하는 것이다.

5. 결과고찰 및 설계변수해석

식(3.14)를 4차 Runge-Kutta 법을 사용하여 수치적분하였고, 그 결과를 Fig.9에 나타내었다. 역시 도약현상이 발생하였으며, 실험결과와 잘 일치하였다.

간극의 크기변화에 대한 수치적분 결과를 Fig.10에 나타내었다. 간극의 크기가 커질수록 접촉구간에서의 응답의 변위는 커지고, 접촉구간이 좁아지는 것을 알 수 있다.

보의 길이변화에 따른 결과를 Fig.11에 나타내었다. 보의 길이가 길어지는 경우에는 보의 강성은 작아지지만, 접촉/비접촉의 강성비는 일정하게 된다. 그래프에서 보듯이 보의 길이가 길어지면 접촉구간에서 응답의 변위가 커지며, 접촉구간이 넓어진다. 비접촉구간에서는 저주파영역에서 보의 길이가 길수록 응답이 커지며, 고주파영역에서는 응답이 작아지는 현상을 보였다.

가진력의 크기변화에 대한 결과를 Fig.12에 나타내었다. 가진력의 크기가 커지면 접촉, 비접촉 구간 모두에서 응답의 변위가 커지며, 접촉구간이 넓어진다.

설계변수변화에 따른 각각의 경우에서 모두 도약현상이 나타났다. 강제진동의 경우에는 시스템의 공진점음 기준으로 하여 그 전후로 위상각이 180도 급격히 변화한다. 가진진동수를 증가/감소시킬 때 나타나는 도약현상은 이같은 위상각의 급격한 변화와, 각각의 경우의 초기조건의 차이에 기인한다고 볼 수 있다.

6. 결론

본 연구를 통하여 간극내에서 운동하는 외팔보의 비선형 동적 응답을 실험적으로 관찰하고 1자유도 편직선형 모델로 관측된 도약현상을 설명하였다.

먼저 실험장치를 제작하여 보의 설계변수를 추출하고, 실험을 통하여 응답을 측정하였으며, 센서부착위치에서의 보의 모우드함수값에 따른 응답의 보정을 통하여서 연속적인 보를 편직선형 1자유도계로 모델링하였다.

실험에서 가진진동수의 증가/감소에 따른 도약현상과, 가진진동수이외의 고차조화주파수성분이 존재함을 관찰하였다.

수치조화균형법에 의한 정상해해석과 수치적분 결과가 실험과 잘 일치하였으며 역시 도약현상이 발생하였다. 도약현상은 접촉구간에서 다중해의 존재를 보여주는 것으로서 주어진 하나의 가진진동수에서 2개 이상의 응답이 존재하는 것이며, 또한 비선형계의 응답특성의 하나인 초기조건존재를 보여주는 것이다. 도약현상이 발생하는 순간은 공진점 전후에서의 위상각의 급격한 변화로 설명할 수 있었다.

7. 참고문헌

1. 최연선, "Dynamics of Rotor Rub in Annular Clearance with Experimental Evaluation", 대한기계학회 추계학술대회 논문집, pp.202-208, 1993
2. Y.S. Choi, and S.T. Noah, "Periodic Response of a Link Coupling with Clearances", ASME, Journal of Dynamic Systems Measurements, and Control, in Press, 1989.
3. S. Maezawa, H. Kumano, and Y. Minakuchi, "Forced Vibrations in an Unsymmetrical Piecewise-linear System Excited by General Periodic Force Functions", Bull JSME, Vol.23, No.175, pp.68-75, 1980.
4. Y.S. Choi, and S.T. Noah, "Forced Periodic Vibration of Unsymmetric Piecewise-linear Systems, Journal of Sound and Vibration, Vol.120, No.3, 1988.
5. Y.S. Choi, and S.T. Noah, "Nonlinear Steady-state Response of a Rotor-support System", ASME, Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability, Vol.109, pp.255-261, 1987.
6. S.T. Noah, R.M. Alexander, C.G. Frank, "Parametric Identification of a Vibratory System With a Clearance", Journal of Vibration and Acoustics, Vol.115, pp.25-32, 1993.
7. 박영렬, 이규섭, 김진수, "자유단의 운동이 제한된 외팔보의 진동에 관한 연구", 延世論叢, pp.245-257, 1987.
8. 정구충, "구속운동하는 보의 비선형 동적 거동해석", 성균관대학교 석사학위논문, 1991.
9. H. Sato, K. Murakami, "Vibration Characteristics of a Beam With Support Accompanying Clearance", ASME, Journal of Vibration and Acoustics, Vol.112, pp.508-514, 1990.
10. 최연선, 인홍진, "간극에 의한 기계계의 비선형 동특성", 대한기계학회 논문집, Vol.15, No.4, pp.1168-1176, 1991.
11. R.W. Clough, J. Penzien, "Dynamics of Structures", McGraw-Hill, 8th ed., 1989.

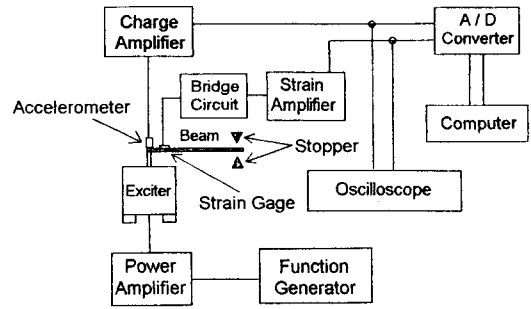


Fig.1 Experimental Apparatus

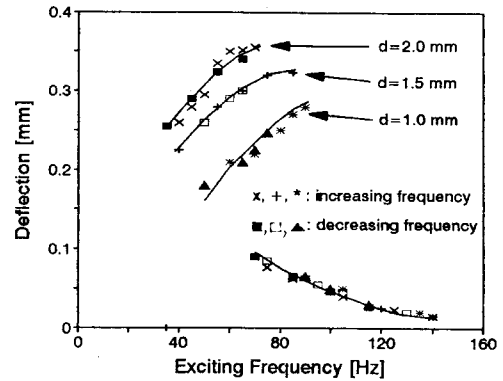


Fig.2 Responses of the Beam with Stopper [Experiment]

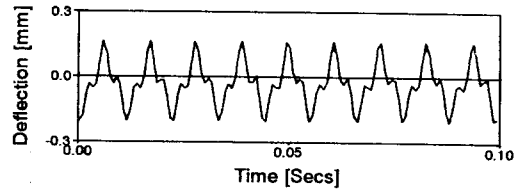


Fig.3 Time History at $\omega=90$ Hz, [Experiment]

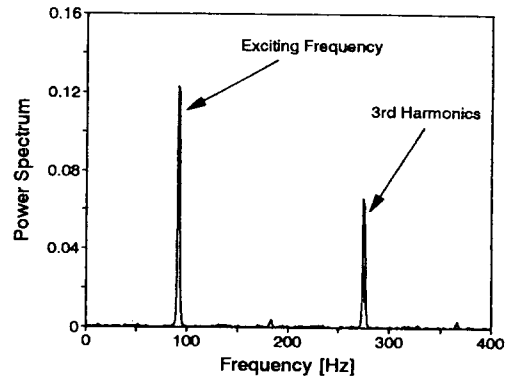


Fig.4 Spectrum Analysis at $\omega=90$ Hz, [Experiment]

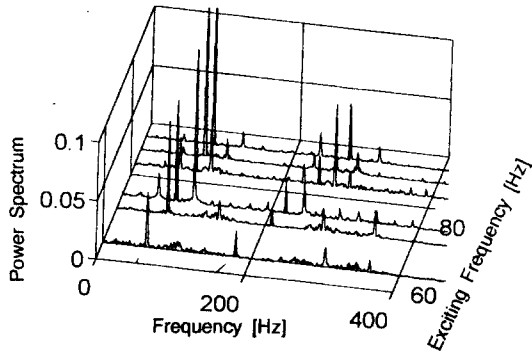


Fig.5 Waterfall Diagram

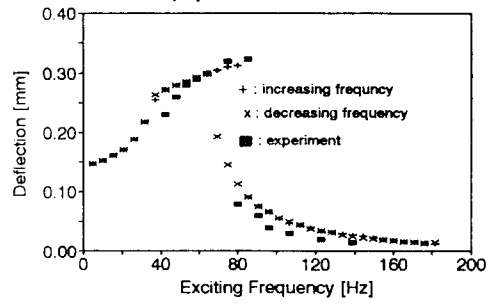


Fig.9 Numerical Integration

($d = 1.5 \text{ mm}$, $F_0 = 0.255 \text{ N}$, $L = 8 \text{ cm}$)

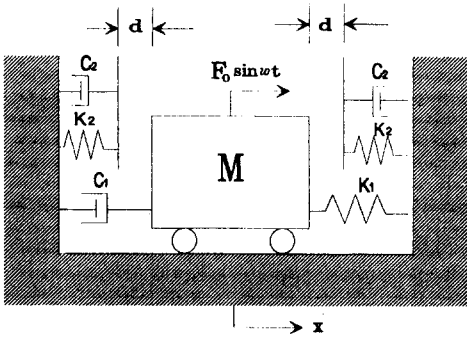


Fig.6 Symmetric Piecewise-linear Oscillator

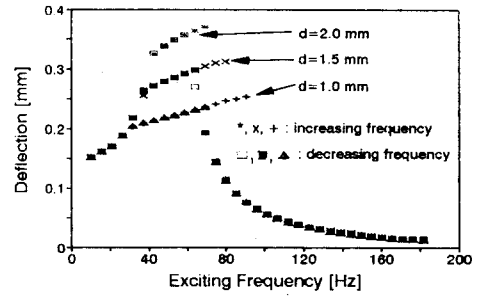


Fig.10 Effect of the Size of Clearance
(Numerical Integration)

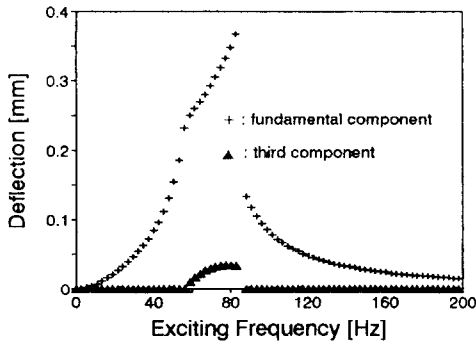


Fig.7 NHB Analysis ($d = 1.5 \text{ mm}$, $F_0 = 0.255 \text{ N}$, $L = 8 \text{ cm}$)

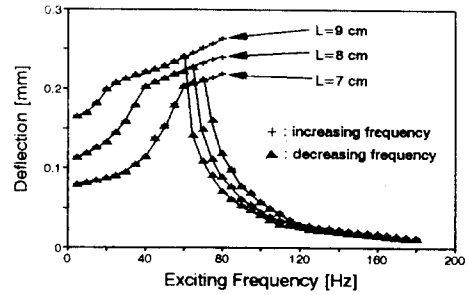


Fig.11 Effect of the Length of the Beam
(Numerical Integration)

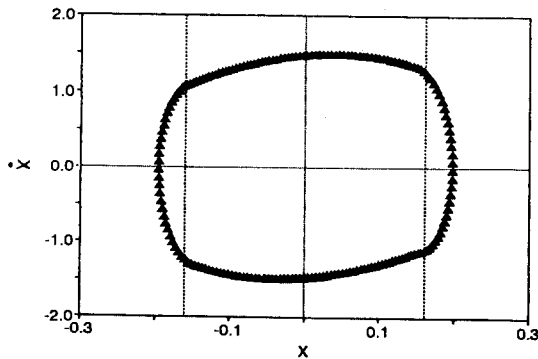


Fig.8 Phase Diagram of Contact Region

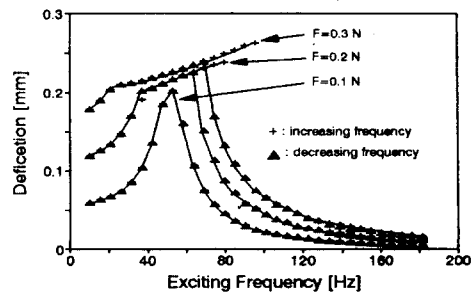


Fig.12 Effect of the Exciting Force
(Numerical Integration)