

백색잡음가진을 받는 연속체의 진동제어

°백 종한*, 허 훈**

Vibration Control of the Continuous System Under White Noise Disturbance

°Jong Han Paik*, Hoon Heo**

1. 서론

최근 항공우주 및 생산자동화 분야의 급격한 발달에 따라 정밀도와 효율성을 향상시키기 위해 저중량, 고강도 구조물이 요구된다. 그러나 경량화 추세로 인해 수반되는 구조물의 유연성 증가로 외력에 대한 구조응답의 진폭이 커지고 구조물의 피로 수명이 단축되어 매우 위험한 상황에 이를 수 있다. 이런 바람직하지 않은 진동현상을 제어하기 위해 여러 제어이론을 응용한 진동억제시스템의 연구가 활발하며, 신소재인 압전재료의 개발로 새로운 방향이 제시되고 있다.

압전재료는 유연한 구조물에 부착되어 압전재료의 수축, 팽창 운동에 의해 발생된 에너지를 부착된 구조물에서의 제어력으로 사용되어, 진동 혹은 자세 및 형상 제어에 활용되고 있다.

압전재료에 대한 연구로는 Crawley, de Luis^[1]가 보의 표면 혹은 내부에 압전세라믹을 부착하여 액츄에이터로 사용하는 경우 집중모멘트를 가하는 역할을 함을 밝혔고, Hanagud, obal^[2]은 압전재료를 센서와 액츄에이터로 사용해 복합재료 보에 대한 최적 진동제어 알고리즘을 개발, 그 성능에 대한 효과를 조사하였고 임의의 위치에 부착된 센서 및 액츄에이터를 고려한 복합재료 보의 운동방정식을 유한요소법을 이용 유도하였으며 변위를 피드백(rate feedback)과 모달피드백(modal feedback) 제어기를

적용하여 진동제어 효과를 고찰하였다. 그리고 Tomas, James, Hubbard^[3]는 압전필름을 액츄에이터로 사용해 복합재료 보에 Liapunov 제어기와 변위를 피드백 제어기를 사용하여 능동감쇠기를 설계하였고, Lee, Chaing, Sullivan^[4]은 압전필름을 센서와 액츄에이터로 사용해 평판에 변위를 피드백 제어기를 적용한 능동감쇠기를 설계하고 실험적으로 수행하였다.

Base가 백색잡음가진을 지속적으로 받을 때 보 끝의 움직임이 최소가 되도록 제어하고자 연구를 수행 중인 바 그 결과로서 본 논문에서는 적용시켰고 F-P-K 방정식^[5,6]을 이용해 확률영역으로 변환하여 LQR 제어기와 pole allocation 제어기를 시스템에 적용시켜 우수한 특성을 갖음을 제어 시뮬레이션의 결과를 통해 입증하였다.

2. 시스템 모델링

Fig 1은 시스템의 구조를 나타내고 있다.

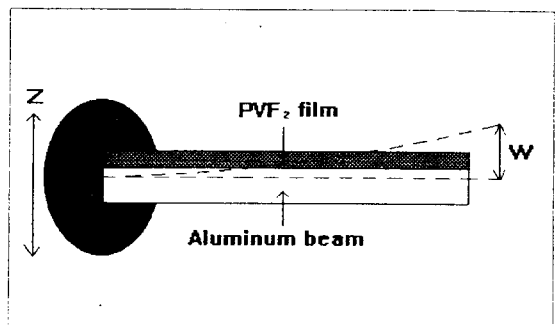


Fig 1. System configuration

* 고려대학교 제어측정공학과 대학원

** 고려대학교 제어측정공학과 교수

우선 압전필름에 전압이 가해졌을 때 압전필름에
시 발생되는 변형률 ϵ_p 는 다음과 같이 구해질 수 있
다.

$$\epsilon_p(t) = V(t) (d_{31}/h_2) \quad (1)$$

여기서 $V(t)$ 는 가해진 전압, d_{31} 는 압전전하계수,
 h_2 는 압전필름의 두께이다.

또한 압전필름에 의한 보의 휨모멘트는 다음과
같이 구해진다.

$$M_p(t) = -V(t)d_{31}\left(\frac{h_1+h_2}{2}\right)\left(\frac{E_1h_1E_2h_2b}{E_1h_1+E_2h_2}\right) \\ = CV(t) \quad (2)$$

여기서 h_1 는 보의 두께, h_2 는 압전필름의 두께,
 E_1 는 보의 탄성계수, E_2 는 압전필름의 탄성계수, b
는 보의 폭이다.

본 논문에서는 복합재료 보에 휨모멘트만이 존
재하고 압전필름이 보의 변적과 동일하게 적층되었
으며 길이에 따라 가해진 전압이 공간적으로 일정하
다고 가정한다. 그러면 복합재료 보에 대한 운동방
정식은 다음과 같이 구해질 수 있다.

$$EI \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = -\rho A \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \quad (3)$$

여기서 z 는 보의 Base에서 가해지는 백색 잡음으
로 모델링된 disturbance이다.

또한 경계조건은 다음과 같이 구해질 수 있다.

$$W = \frac{\partial W}{\partial x} = 0 \quad \text{for } x=0 \\ EI \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = -M_p(t) \quad \text{for } x=l \\ EI \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} = 0 \quad \text{for } x=l \quad (4)$$

여기서 $EI = E_1I_1 + E_2I_2$ 이고 $\rho A = \rho_1A_1 + \rho_2A_2$ 이
다.

3. 지배방정식

앞에서 구한 편미분방정식을 이용하여 제어하기
가 어렵기 때문에 이를 Galerkin의 방법을 이용하여

상미분방정식으로 변환한다. Galerkin의 방법을 적
용하기 위해서 우선 복합재료 보의 모우드 형상을
구해야 한다. 선형시스템의 경우 모우드의 합으로
아래 식 (5)와 같이 2-모드를 사용하여 근사적으로
시스템의 거동을 구할 수 있다.

$$W = \sum_{j=1}^2 \phi_j(x) q_j(t) \quad (5)$$

여기서 $\phi(x)$ 는 모우드 형상이고 $q(t)$ 는 일반화된
좌표이다.

Galerkin technique를 적용하기 위해 ordinary
differential operator 을 다음과 같이 정의한다.

$$\mathcal{L}W = f \quad (6)$$

여기서

$$\mathcal{L}W = EI \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \\ f = -\rho A \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

Error 또는 Residual을 정의하면 다음과 같고

$$R(q_j(t), x) = \mathcal{L}W - f \\ = \sum_{j=1}^2 [EI \frac{d^4 \phi_j(x)}{dx^4} q_j(t) + \rho A \phi_j(x) \frac{d^2 q_j(t)}{dt^2}] \\ + \rho A \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \quad (7)$$

지금 Galerkin technique를 적용하면 다음과 같다.

$$(\phi_i(t), R) = \int_0^l [\sum_{j=1}^2 (\rho A \phi_j(x) \phi_i(x) \frac{d^2 q_j(t)}{dt^2} \\ + EI \frac{d^4 \phi_j(x)}{dx^4} \phi_i(x) q_j(t) + \rho A \phi_i(x) \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}] dx = 0 \quad (8)$$

식 (8)에서 강성항을 대각화시키기 위해서 부
분적분법과 경계조건을 이용해 풀면 다음과 같은 식
을 구할 수 있다.

$$EI \int_0^l \sum_{j=1}^2 \frac{d^4 \phi_j(x)}{dx^4} \phi_i(x) q_j(t) dx \\ = C \frac{d\phi_i(l)}{dx} V(t) + \\ EI \int_0^l \sum_{j=1}^2 \frac{d^2 \phi_j(x)}{dx^2} \frac{d^2 \phi_i(x)}{dx^2} q_j(t) dx \quad (9)$$

식 (8)에 식 (9)을 대입하여 풀면 다음과 같은 상미분방정식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \rho A \int \phi_1 \phi_1 dx & \rho A \int \phi_1 \phi_2 dx \\ \rho A \int \phi_2 \phi_1 dx & \rho A \int \phi_2 \phi_2 dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \\ & \begin{bmatrix} EI \int \phi_1'' \phi_1'' dx & EI \int \phi_1'' \phi_2'' dx \\ EI \int \phi_2'' \phi_1'' dx & EI \int \phi_2'' \phi_2'' dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \quad (10) \\ & - \begin{bmatrix} C \frac{d\phi_1(L)}{dx} \\ C \frac{d\phi_2(L)}{dx} \end{bmatrix} V(t) - \begin{bmatrix} \rho A \int \phi_1 dx \\ \rho A \int \phi_2 dx \end{bmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \end{aligned}$$

식 (10)의 상미분 방정식을 상태 방정식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + Gw \\ y &= Cx + v \end{aligned} \quad (11)$$

여기서 x 는 상태변수이고 u 는 제어입력이고 w , v 는 백색 Gaussian 잡음이다.

그리고 위에서 구한 상태방정식을 확률영역에 해석하기 위해 F-P-K 방정식으로 변환하고 $w(t)$ 는 평균이 0인 백색잡음으로 Wiener process로 간주된다.

$$\begin{aligned} w(t) &= \frac{d}{dt} B(t) \\ E[dB^2(t)] &= 2Ddt \end{aligned} \quad (12)$$

여기서 B 는 brownian motion process이고 D 는 white noise power spectral density를 나타낸다.

그리고 F-P-K 방정식을 구해보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(x, t) &= \sum_{i=1}^4 \frac{\partial}{\partial x_i} a_i P(x, t) \\ &+ \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_k} b_{jk} P(x, t) \end{aligned} \quad (13)$$

여기서 a_i , b_{jk} 는 첫번째 모우멘트의 증분을 나타내는 drift coefficient와 두번째 모우멘트를 나타내는 diffusion coefficient이다.

식 (13)의 F-P-K 방정식을 풀면 다음의 동적 모멘트 방정식을 얻을 수 있다.

$$\dot{m}_{i,j,k,l} = A m_{i,j,k,l} + B U + G D \quad (14)$$

여기서

$$m_{i,j,k,l} = E [x_1^i x_2^j x_3^k x_4^l]$$

A 는 시스템 행렬, B 는 입력 행렬, G 는 가진 행렬, U 는 제어입력, D 는 백색잡음 확률밀도 함수이다.

4. 확률영역에서의 제어기설계

확률영역에서의 제어는 F-P-K 방정식에 LQR 조정기와 pole allocation method를 이용한 제어기를 설계하여 제어를 수행한 것이다.

1) LQR 제어기

LQR 조정기는 설계하기 위해 피드백 시스템을 식 (14)로부터 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} \dot{m} &= Am + BU + GD \\ y &= Cm \\ U &= -Km \end{aligned} \quad (15)$$

여기서 y 는 출력변수, K 는 피드백 이득 행렬이다.

LQR 조정기는 상태변수와 제어입력을 고려한 성능지수를 최소화 시키는 피드백 이득 K 를 구하는 것이고 피드백 이득은 다음의 대수 리카티 방정식의 해를 이용하여 구할 수 있다.

$$A^T S + SA + Q_c - SB R_c^{-1} B^T S = 0 \quad (16)$$

여기서 Q_c , R_c 는 가중치이다.

따라서 피드백 이득 K 는 다음과 같이 구해진다.

$$K = R_c^{-1} B^T S \quad (17)$$

2) Pole allocation 제어기

Pole allocation 제어기의 목적은 제어된 시스템의 특성방정식이 설계자가 원하는 특성방정식과 동일하게 하는 피드백이득 G 를 구하는 것이고 이는 다음과 같이 구해질 수 있다.

$$g_i = - \frac{\prod_{j=1}^m (\rho_j - \lambda_j)}{B_i u_i^{-1} \prod_{j=1, i \neq j}^m (\lambda_j - \lambda_j)} \quad (18)$$

여기서 $i = 1, 2, \dots, m$, u_i 는 open-loop right eigenvector, ρ_j 는 desired eigenvalue, λ_j 는 open-loop eigenvalue, m 은 controlled mode의 갯수이다.

5. Simulation 결과

Fig 2.는 확률영역에서 제어기를 설계하여 외란의 P.S.D를 증가시키면서 Uncontrolled 시스템 응답, pole allocation 제어기를 적용한 시스템 응답, 그리고 LQR 제어기를 적용한 시스템 응답의 absolute R.M.S.를 구해 비교한 것이다

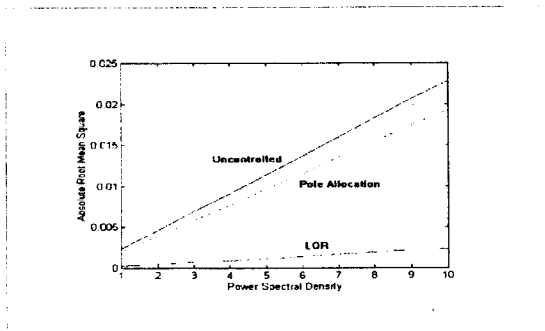


Fig 2. Comparison of absolute R.M.S. for three Cases (Uncontrolled, pole allocation controller and LQR controller)

Fig 3.는 확률영역에서 외란의 P.S.D.를 증가시키면서 LQR 제어기를 적용한 시스템 응답과 H^∞ 제어기를 적용한 시스템 응답에 대한 R.M.S.를 Uncontrolled 시스템의 R.M.S.에 대하여 비교한 R.M.S. error를 나타내고 있다.

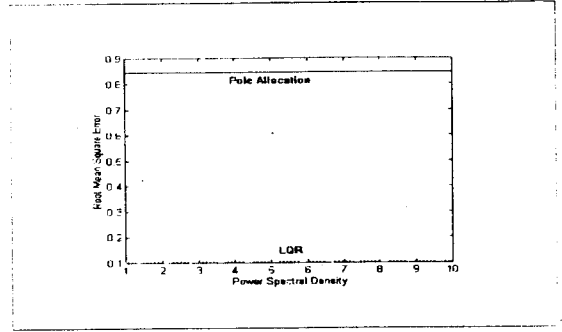


Fig 3. Comparison of R.M.S. error in two cases (pole allocation controller and LQR controller)

6. 결론

본 논문은 일련의 진동제어 연구과정 중의 일부로서 백색잡음가진을 받는 보의 진동문제를 확률영역에서의 제어를 이용하여 시스템에 적용하였다.

F-P-K 방정식을 이용한 확률영역에서의 제어를 시간영역에서의 제어와 비교해 보았을 때 F-P-K 방정식에서는 외란의 P.S.D.가 시스템입력으로 들어가기 때문에 백색잡음인 경우 deterministic하므로 추정기가 필요없으며 유색잡음도 적용할 수가 있다.

백색잡음의 P.S.D.의 크기가 증가된 외란에 대해서 확률영역에서의 응답에 대한 R.M.S.를 비교하였을 때 LQR 제어기가 pole allocation 제어기에 비해 우수한 특성을 갖고 있음을 알 수 있다.

차후 연구과제로는 유색잡음 기반가진에 대한 진동제어문제이다.

7. 참고문헌

- 1) Crawley, E. F., de Luis, J., "Use Piezoelectric Actuator as Elements of intelligent Structures," AIAA Journal, Vol. 25, No. 10, oct. 1987, pp 1373-1385
- 2) Hanagud, S., Obal, M. W., Calise, A. J., "Optimal Vibration Control by piezoceramic Sensors and Actuators," Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 15, No. 5, sept.-oct. 1992, pp 1199 - 1206

3) Bailey, T. L., Hubbard, J. E., " Distributed Piezoelectric polymer Active Vibration Control of a Cantilever beam," Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 8, sept.-oct. 1985, pp 605-611.

4) Lee. C., Chang. W., O'Sullivan. T., " Piezoelectric Modal Sensors and Actuators Achieving Critical Active Damping on a Cantilever Plate," AIAA Paper No. 89-1390

5) H. Heo, J.H.Paik and J.H.Oh, "Stochastic Response of the Colored Noise Parametric System", 93년 한국 자동제어 학술회의 국제부문, Oct., 1993

6) H. Heo, J.H.Oh and J.H.Oh, "A technique for the Stability Analysis of Randomly Varying Non-conservative System", Asia-Pacific Vibration Conference, Fukuoka, Japan, 1993

7) Meirovitch, L., *Dynamics and Control of Structures*, Jhon Wiley & Sons Inc., 1990

8) Lewis., F. L., *Applied Optimal Control and Estimation*, Prentice Hall Inc., 1992