

고차 주파수응답함수를 이용한 비선형 시스템의 매개변수 추정

이 건 명*

(Use of Higher Order Frequency Response Functions for Non-Linear
Parameter Estimation)

(Gun-Myung Lee)

1. 서론

기계시스템의 비선형특성 해석을 위하여 여러가지 방법이 활용되고 있는데, 이들은 Nyquist 선도의 지그러짐(distortion)⁽¹⁾, Hilbert 변환⁽²⁾, 복원력면(restoring force surface)⁽³⁾, NARMAX⁽⁴⁾, 고차 주파수응답함수(higher order frequency response function)⁽⁵⁾, DPE(direct parameter estimation)⁽⁶⁾를 이용한 방법등이다. 이들중 고차FRF(frequency response function)는 그 개념이 선형시스템의 FRF와 유사하여 비선형시스템의 해석방법으로서 주목을 받고 있으나 아직은 고차FRF의 특성에 대한 이론적 연구^(7,8) 단계이고, 고차FRF로부터 비선형특성을 정량적으로 해석하는 연구는 거의 이루어지지 않고 있다.

다항식으로 표시되는 비선형성을 갖는 시스템이 정현파가진을 받을 때 그 응답의 가진주파수 성분은 가진력진폭과 고차FRF의 무한급수로 나타낼 수 있다. 가진력의 진폭을 변화시켜가며 응답을 측정하고, 고차항을 무시하면 고차FRF의 값을 근사적으로 구할 수 있다. 고차FRF는 비선형 시스템의 매개변수의 식으로

나타낼 수 있으므로 이로부터 비선형 매개변수를 추정할 수 있다. 본 논문에서는 비선형강성과 비선형감쇠를 갖는 1자유도 시뮬레이션 시스템에 이 매개변수 추정법을 각각 적용함으로써 이 방법의 가능성을 고찰하였다.

2. 비선형 매개변수 추정법

2.1 Volterra 급수와 고차 주파수응답함수

다항식으로 표시되는 비선형성을 갖는 시스템의 임의 입력 $x(t)$ 에 대한 응답 $y(t)$ 는 Volterra 급수⁽⁹⁾를 이용하여 다음과 같은 무한급수로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} y_n(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau_1)x(t-\tau_1)d\tau_1 \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2)x(t-\tau_1)x(t-\tau_2)d\tau_1d\tau_2 + \dots \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h_n(\tau_1, \dots, \tau_n)x(t-\tau_1) \dots x(t-\tau_n)d\tau_1 \dots d\tau_n + \dots \end{aligned} \quad (1)$$

* 경상대학교 기계공학과

윗 식에서 $h_1(\tau_1)$ 은 이 시스템에 대응하는 선형시스템의 충격응답이고, $h_n(\tau_1, \dots, \tau_n)$ 은 고차의 충격응답으로 생각할 수 있다. 고차FRF는 고차 충격응답의 다차원 Fourier변환으로 정의한다.

$$H_n(\omega_1, \dots, \omega_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) \prod_{i=1}^n e^{j\omega_i \tau_i} d\tau_1 \dots d\tau_n \quad (2)$$

정의에 의하여 고차FRF는 대칭성을 갖는다. 즉 $H_n(\omega_1, \dots, \omega_n)$ 의 값은 자변수 $\omega_1, \dots, \omega_n$ 의 순서에 무관하다.

이 비선형시스템이 정현파가진

$$x(t) = X \cos \omega t = \frac{X}{2} e^{j\omega t} + \frac{X}{2} e^{-j\omega t} \quad (3)$$

을 받으면 식(1)의 각 응답성분은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau_1) x(t-\tau_1) d\tau_1 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau_1) \left\{ \frac{X}{2} e^{j\omega(t-\tau_1)} + \frac{X}{2} e^{-j\omega(t-\tau_1)} \right\} d\tau_1 \\ &= H_1(\omega) \frac{X}{2} e^{j\omega t} + H_1(-\omega) \frac{X}{2} e^{-j\omega t} \\ y_2(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) x(t-\tau_1) x(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad (4) \\ &= H_2(\omega, \omega) \left(\frac{X}{2} \right)^2 e^{j2\omega t} + 2H_2(\omega, -\omega) \left(\frac{X}{2} \right)^2 \\ &\quad + H_2(-\omega, -\omega) \left(\frac{X}{2} \right)^2 e^{-j2\omega t} \\ y_3(t) &= \dots \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} y(t) &= H_1(\omega) \frac{X}{2} e^{j\omega t} + H_1(-\omega) \frac{X}{2} e^{-j\omega t} \\ &\quad + H_2(\omega, \omega) \left(\frac{X}{2} \right)^2 e^{j2\omega t} + 2H_2(\omega, -\omega) \left(\frac{X}{2} \right)^2 \\ &\quad + H_2(-\omega, -\omega) \left(\frac{X}{2} \right)^2 e^{-j2\omega t} + H_3(\omega, \omega, \omega) \left(\frac{X}{2} \right)^3 e^{j3\omega t} \\ &\quad + 3H_3(\omega, \omega, -\omega) \left(\frac{X}{2} \right)^3 e^{j\omega t} + 3H_3(\omega, -\omega, -\omega) \left(\frac{X}{2} \right)^3 e^{-j\omega t} \\ &\quad + H_3(-\omega, -\omega, -\omega) \left(\frac{X}{2} \right)^3 e^{-j3\omega t} + \dots \end{aligned} \quad (5)$$

고차FRF를 간략하게 다음과 같은 기호

$$H_{n,i} = H_n(\underbrace{\omega, \dots, \omega}_{n-i}, \underbrace{-\omega, \dots, -\omega}_i)$$

로 나타내면

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} y_n(t) \quad (6) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} H_{n,i} \left(\frac{X}{2} \right)^n e^{j(n-2i)\omega t} \end{aligned}$$

2.2 고차 주파수응답함수의 추정

비선형시스템이 정현파가진을 받으면 가진주파수 ω 에 서의 응답성분 $Y(\omega)$ 는 식(5)로 부터 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= XH_1(\omega) + \frac{3}{4} X^3 H_3(\omega, \omega, -\omega) \quad (7) \\ &\quad + \frac{5}{8} X^5 H_5(\omega, \omega, \omega, -\omega, -\omega) + \dots \end{aligned}$$

윗 식에서 $Y(\omega)$ 는 가진력진폭 X 의 함수이므로 가진력의 진폭을 변화시켜가며 $Y(\omega)$ 를 측정하고, 고차항을 무시하면 고차FRF를 근사적으로 구할 수 있다. 예를 들면 세개의 서로 다른 가진력진폭 X_1, X_2, X_3 를 사용하여 $Y_1(\omega), Y_2(\omega), Y_3(\omega)$ 를 각각 측정하고, 윗 식의 첫 3항만을 고려하면 다음과 같은 방정식을 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} Y_1(\omega) \\ Y_2(\omega) \\ Y_3(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 & \frac{3}{4} X_1^3 & \frac{5}{8} X_1^5 \\ X_2 & \frac{3}{4} X_2^3 & \frac{5}{8} X_2^5 \\ X_3 & \frac{3}{4} X_3^3 & \frac{5}{8} X_3^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1(\omega) \\ H_3(\omega, \omega, -\omega) \\ H_5(\omega, \omega, \omega, -\omega, -\omega) \end{bmatrix} \quad (8)$$

이 방정식으로 부터 $H_1(\omega), H_3(\omega, \omega, -\omega)$ 등을 구할 수 있다.

2.3 비선형 매개변수의 추정

여러가지 진폭의 가진력을 사용하여 측정한 고차FRF로부터 비선형 매개변수를 추정하는 방법용 비선형강성과 비선형감쇠를 갖는 두가지 시스템에 적용하였다.

2.3.1 비선형강성을 갖는 시스템

3차 다항식으로 표시되는 강성을 갖는 1자유도계가 정현파가진을 받을 때의 운동방정식은 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$m\ddot{y}(t) + c_1\dot{y}(t) + k_1y(t) + k_2y(t)^2 + k_3y(t)^3 = \frac{X}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) \quad (9)$$

윗식에 식(5)를 대입하고, 조화탐사법(harmonic probing method)⁽⁵⁾을 사용하면 모든 고차FRF의 표현식을 구할 수 있다. 예를 들면 양변에 있는 $(\frac{X}{2})e^{j\omega t}$ 항의 계수를 같게 놓음으로써

$$H_1(\omega) = \frac{1}{k_1 - m\omega^2 + jc_1\omega} \quad (10)$$

를 얻고, $(\frac{X}{2})e^{j2\omega t}$ 항의 계수로 부터

$$H_2(\omega, \omega) = -k_2 H_1(\omega)^2 H_1(2\omega) \quad (11)$$

$(\frac{X}{2})^2$ 항의 계수로 부터

$$H_2(\omega, -\omega) = -\frac{k_2}{k_1} H_1(\omega) H_1(-\omega) \quad (12)$$

$(\frac{X}{2})^3 e^{j\omega t}$ 항의 계수로 부터

$$\begin{aligned} H_3(\omega, \omega, -\omega) &= -\frac{1}{3} H_1(\omega) [2k_2 H_1(-\omega) H_2(\omega, \omega) \\ &\quad + 4k_2 H_1(\omega) H_2(\omega, -\omega) + 3k_3 H_1(\omega)^2 H_1(-\omega)] \\ &= H_1(\omega)^3 H_1(-\omega) \left[\frac{2}{3} k_2^2 H_1(2\omega) + \frac{4k_2^2}{3k_1} - k_3 \right] \end{aligned} \quad (13)$$

를 얻는다. 따라서 측정된 $H_1(\omega)$ 로 부터 선형 매개변수 m, c_1, k_1 를 구하고, $H_3(\omega, \omega, -\omega)$ 로 부터 비선형 매개변수 k_2, k_3 를 구할 수 있다.

2.3.2 비선형감쇠를 갖는 시스템

감쇠력이 속도의 3차 다항식으로 표시되는 1자유도

계가 정현파가진을 받을 때의 운동방정식은 다음과 같다.

$$m\ddot{y}(t) + c_1\dot{y}(t) + c_2\dot{y}(t)^2 + c_3\dot{y}(t)^3 + k_1y(t) = \frac{X}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) \quad (14)$$

앞에서와 같은 방법으로 윗식에 식(5)를 대입하고, 조화탐사법을 적용하여 모든 고차FRF를 구할 수 있다. 이 경우 $H_1(\omega)$ 는 식(10)과 같고, $H_3(\omega, \omega, -\omega)$ 는 다음과 같다.

$$H_3(\omega, \omega, -\omega) = -\frac{1}{3} H_1(\omega)^3 H_1(-\omega) [4c_2^2 \omega^4 H_1(2\omega) + j3c_3 \omega^3] \quad (15)$$

따라서 측정된 $H_1(\omega)$ 와 $H_3(\omega, \omega, -\omega)$ 로 부터 모든 선형, 비선형 매개변수를 구할 수 있다.

3. 매개변수 추정법의 적용

본 매개변수 추정법의 정확도를 평가하기 위하여 본 방법을 각각 비선형강성과 비선형감쇠를 갖는 1자유도 시뮬레이션 시스템에 적용하였다.

3.1 비선형강성을 갖는 시스템

식(9)와 같은 3차 강성을 갖는 비선형계가 정현파가진을 받을 때의 응답을 Runge-Kutta방법으로 구하고, 이 응답을 FFT처리하여 가진주파수 ω 에서의 응답 성분 $Y(\omega)$ 를 구하고, 가진력진폭을 변화시켜가며 이 과정을 반복하였다. 사용된 가진주파수는 5.0Hz부터 0.2Hz간격으로 25Hz까지이며 시뮬레이션에 사용된 계의 매개변수는 $m=1 \text{ kg}$, $c_1=20 \text{ Ns/m}$, $k_1=10^4 \text{ N/m}$, $k_2=10^7 \text{ N/m}^2$, $k_3=5 \times 10^9 \text{ N/m}^3$ 이다.

이 시스템을 서로 다른 세 진폭 $X=0.3, 0.6, 0.9 \text{ N}$ 으로 각각 가진하였을 때 각 진폭에 대한 선형화된 주파수응답함수, $\frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$ 가 Fig. 1에 나타나있다. 이

그림은 가진력의 진폭에 따라 주파수응답함수 피크의 주파수가 변화하는 비선형강성 시스템의 특성을 나타

내고 있다. 각 진폭에 대한 $Y(\omega)$ 로 부터 식(7)에서 첫 3항만을 고려하여 $H_1(\omega)$, $H_3(\omega, \omega, -\omega)$, $H_5(\omega, \omega, \omega, -\omega, -\omega)$ 를 근사적으로 구하고, $H_1(\omega)$ 와 $H_3(\omega, \omega, -\omega)$ 로 부터 시스템의 매개변수를 구하였다. 식(10)으로 부터 선형 매개변수 m , c_1 , k_1 을, 그리고 식(13)으로 부터 비선형 매개변수 k_2 , k_3 를 구할 때 미지수의 갯수보다 방정식의 갯수가 더 많으므로 특이값분리(Singular Value Decomposition)법을 사용하였다. 이와 같이 구한 매개변수의 값을 Table 1에 수록하였다. 이 Table로 부터 매우 정확한 매개변수가 추정되었음을 알 수 있다. 가진력의 진폭을 $X=0.4, 0.8, 1.2N$ 으로 증가시키고, 위의 과정을 반복하였을 때 추정된 매개변수가 Table 1에 함께 수록되어 있다. 사용한 진폭이 증가함에 따라 추정된 매개변수의 정확도가 약간 떨어지기는 하나 그 정확도는 여전히 매우 높음을 알 수 있다.

추정된 매개변수의 정확도를 평가하는 방법으로 시뮬레이션에 의하여 구한 $Y(\omega)$ 와, 추정된 매개변수로 부터 식(7)에 의하여 예측된 $Y(\omega)$ 를 비교하는 방법을 사용하였다. 식(7)의 무한급수는 차수(order)가 19인 $H_{19}(\omega, \dots, -\omega)$ 항까지만 포함하였고, 추정된 매개변수에 대응하는 고차FRF는 2.3.1절에서 설명한 방법에 의하여 계산하였다. Fig. 2는 가진력진폭 $X=0.3N$ 일 때 시뮬레이션에 의한 $Y(\omega)$ 와 식(7)에 의한 $Y(\omega)$ 가 정확하게 일치함을 보이고 있다. 이는 추정된 매개변수가 정확함을 의미한다. $X=0.9N$ 일 때는 Fig. 3에서 보이는 바와 같이 두 $Y(\omega)$ 가 고유진동수부근에서 일치하지 않고 있는데 이는 가진력의 진폭이 식(7)의 무한급수의 수렴반경을 벗어나서 무한급수가 수렴하지 않기 때문이다⁽¹⁰⁾. 이 결과는 무한급수의 수렴반경보다 큰 가진력진폭을 사용하였을 경우에도 정확한 매개변수를 추정할 수 있음을 의미한다.

3.2 비선형감쇠를 갖는 시스템

식(14)와 같이 3차 다항식으로 표시되는 감쇠를 갖는 비선형계의 매개변수를 앞절과 같은 방법으로 추

정하였다. 이 시스템의 매개변수는 $m=1 \text{ kg}$, $c_1=20 \text{ Ns/m}$, $c_2=100 \text{ Ns}^2/\text{m}^2$, $c_3=10^4 \text{ Ns}^3/\text{m}^3$, $k_1=10^4 \text{ N/m}$ 이고, 응답은 5Hz부터 0.2Hz간격으로 25Hz까지의 각 주파수에 대하여 구하였다. 가진력의 진폭 $X=0.3, 0.4, 0.5N$ 을 사용하였을 때 각각의 진폭에 대응하는 선형화된 주파수응답함수가 Fig. 4에 나타나 있다. 이 그림은 비선형감쇠를 갖는 시스템의 특성을 잘 나타내고 있다.

Table 1 Estimated parameters of the non-linear stiffness system using two different sets of excitation amplitudes.

parameter	exact value	estimated value using $X=0.3, 0.6, 0.9$	estimated value using $X=0.4, 0.8, 1.2$
m	1.0	1.000	1.000
c_1	20.0	19.995	19.973
k_1	1.0E4	1.0000E4	1.0002E4
k_2	1.0E7	0.9998E7	0.9989E7
k_3	5.0E9	4.9898E9	4.9552E9

Table 2 Estimated parameters of the non-linear damping system.

parameter	exact value	estimated value
m	1.0	1.000
c_1	20.0	20.014
k_1	1.0E4	1.0000E4
c_2	100.0	100.00
c_3	1.0E4	0.9999E4

각 진폭에 대한 $Y(\omega)$ 로 부터 식(7)에서 첫 3항만을 고려하여 $H_1(\omega)$, $H_3(\omega, \omega, -\omega)$, $H_5(\omega, \omega, \omega, -\omega, -\omega)$ 를 근사적으로 구하고, 이들로 부터 식(10)과 (15)를 사용하여 추정한 시스템 매개변수를 Table 2에 수록하였다. 이 경우에도 정확한 매개변수가 추정되었음을 알 수 있다. $X=0.3N$ 일 때 시뮬레이션에 의하여 구한 $Y(\omega)$ 와, 추정된 매개변수로 부터 식(7)에 의하여 예측된 $Y(\omega)$ 는 일치하였다. 이때 식(7)의 무한급수는 $H_{19}(\omega, \dots, -\omega)$ 항까지만 고려하여 근사적으로 계산하였다. $X=0.5N$ 일 때는 Fig. 5에 보이는 바와 같이 무한

급수가 발산함으로 인하여 두 $Y(\omega)$ 가 일치하지 않고 있다.

4. 결론

Volterra급수로 나타낼 수 있는 비선형 시스템이 정현파가진을 받을 때의 응답은 가진력진폭과 고차 FRF의 무한급수로 나타난다. 따라서 가진력진폭을 변화시켜가며 응답을 측정하고 고차항을 무시함으로써 선형 FRF, $H_1(\omega)$ 와 함께 특정의 고차 FRF를 근사적으로 구할 수 있다. 이들 FRF중 $H_1(\omega)$ 로 부터 선형 매개 변수를 추정하고, $H_3(\omega, \omega, -\omega)$ 로 부터 비선형 매개 변수를 추정할 수 있다.

본 비선형 매개 변수 추정방법을 비선형강성과 비선형감쇠를 갖는 시뮬레이션 시스템에 각각 적용한 결과 매우 정확한 매개 변수가 추정되었다. 추정된 매개 변수의 정확도를 평가하기 위하여 추정된 매개 변수로 부터 시스템의 고차 FRF를 계산하고, 이 고차 FRF의 무한급수로 나타나는 시스템 응답을 근사적으로 구한 다음 이를 시뮬레이션으로 구한 시스템 응답과 비교하는 방법을 사용하였다. 그 결과 가진력진폭이 작을 경우에는 두 가지 방법으로 구한 시스템 응답이 정확히 일치하였으나, 가진력진폭이 클 경우에는 정확한 매개 변수가 추정되었음에도 고차 FRF의 무한급수가 발산함으로써 두 응답이 일치하지 않았다.

참고문헌

- (1) Tomlinson, G.R., 1980, "An Analysis of the Distortion Effects of Coulomb Damping on the Vector Plots of Lightly Damped Systems," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 71, No. 3, pp.443-451.
- (2) Simon, M. and Tomlinson, G.R., 1984, "Use of the Hilbert Transform in Modal Analysis of Linear and Non-Linear Structures," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 96, No. 4, pp.421-436.
- (3) Masri, S.F. and Caughey, T.K., 1979, "A Non-Parametric Identification Technique for Non-Linear Dynamic Problems," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 46, pp.433-447.
- (4) Billings, S.A., Tsang, K.M. and Tomlinson, G.R., 1988, "Application of the NARMAX method to Non-Linear Frequency Response Estimation," *Proceedings of the 6th International Modal Analysis Conference*, pp.1-6.
- (5) Bedrosian, E. and Rice, S.O., 1971, "The Output Properties of Volterra Systems Driven by Harmonic and Gaussian Inputs," *Proceedings of the IEEE*, Vol.59, pp.1688-1707.
- (6) Mohammad, K.S., Worden, K. and Tomlinson, G.R., 1992, "Direct Parameter Estimation for Linear and Non-Linear Structures," *Journal of Sound and Vibration*, Vol.152, No.3, pp.471-499.
- (7) Peyton Jones, J.C. and Billings, S.A., 1990, "Interpretation of Non-Linear Frequency Response Functions," *International Journal of Control*, Vol.52, pp.319-346.
- (8) Storer, D.M., 1991, "Dynamic Analysis of Non-Linear Structures Using Higher Order Frequency Response Functions," Ph.D. Thesis, University of Manchester.
- (9) Volterra, V., 1959, "Theory of Functionals and of Integral and Integrodifferential Equations," Dover, New York.
- (10) 이건명, Tomlinson, G.R., 1994, "Volterra급수로 나타낸 비선형시스템 주파수응답함수의 수렴특성," 대한기계학회 '94년도 춘계학술대회는문집 (1), pp.604-607.

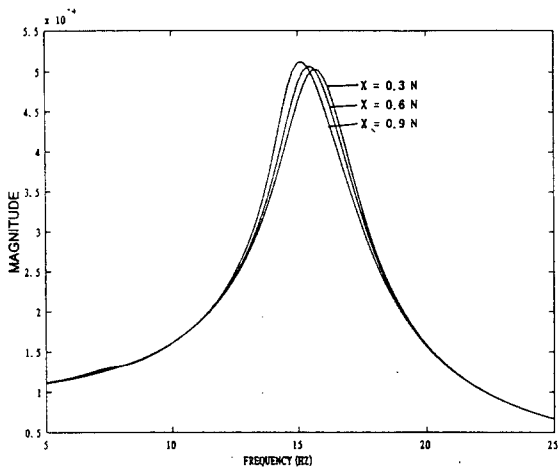


Fig. 1 Linearized frequency response functions of the non-linear stiffness system for 3 different excitation amplitudes.

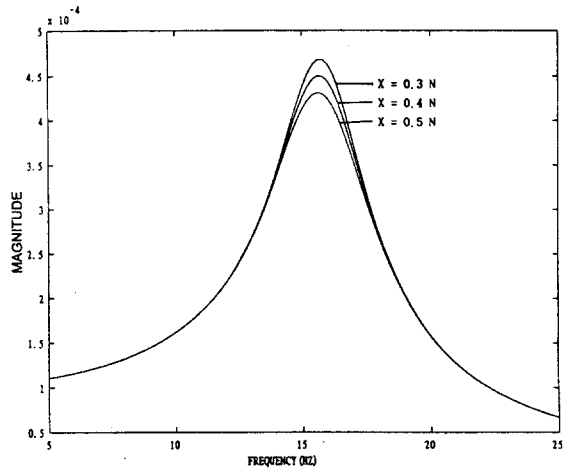


Fig. 4 Linearized frequency response functions of the non-linear damping system for 3 different excitation amplitudes.

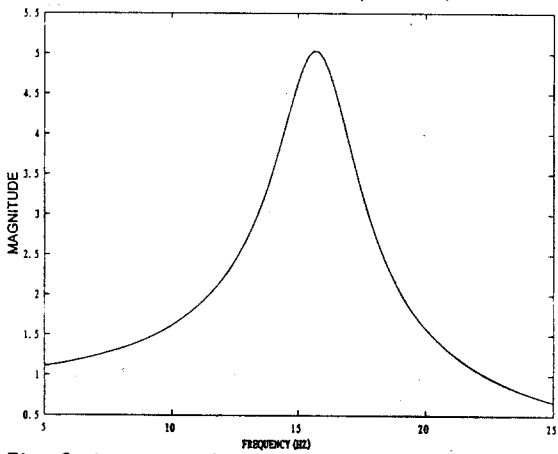


Fig. 2 Agreement of the simulated linearized FRF and the synthesized one of the non-linear stiffness system when $X = 0.3N$.

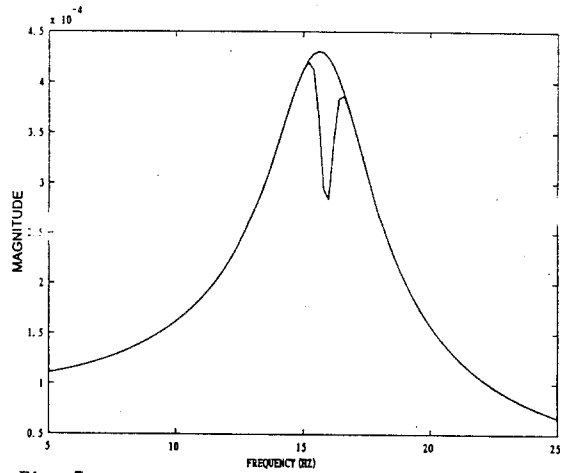


Fig. 5 Comparison of the simulated and synthesized FRFs of the non-linear damping system when $X = 0.5N$.

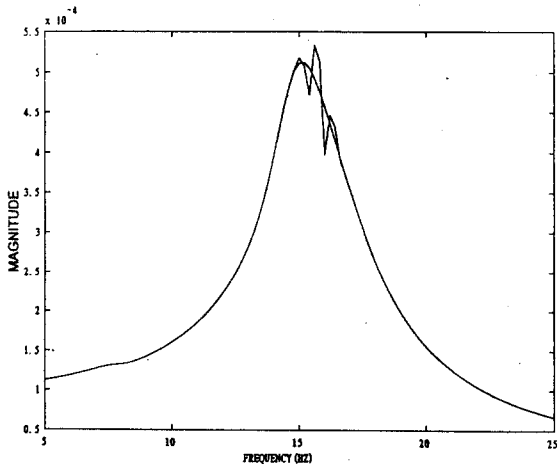


Fig. 3 Comparison of the simulated and synthesized FRFs of the non-linear stiffness system when $X = 0.9N$.