

# 死荷重에 의한 初期처짐을 갖는 보의 自由振動

이 병 구\*, 박 광 규\*\*, 오 상 진\*\*\*, 모 정 만\*\*\*

Free Vibrations of Beams with Initial Deflections due to Dead Loads

Byoung-Koo Lee, Kwang-Kyu Park, Sang-Jin Oh, Jeong-Man Mo

## 1. 서론

보는 토목, 건축, 기계, 선박, 항공 등 구조공학 분야에서 가장 기본이 되는 구조단위이므로 그에 대한 동적해석 특히 자유진동에 관한 많은 연구(1-6)들이 발표되고 있다. 이제까지 이러한 연구들은 사하중으로 인한 정적 초기처짐의 영향을 고려하지 않은 논문들이다.

최근 재료과학의 발달로 고강도의 재료가 출현하고 따라서 세장비가 매우 큰 구조물의 시공이 가능하게 되어 정적 처짐이 다소 큰 구조물에서도 정적 안전성을 확보할 수 있게 되었다. 그러나 이러한 경우에 정적 초기처짐은 구조물의 동적거동에 영향을 줄 것으로 생각된다.

본 연구는 문헌[7]에서 유도된 편미분방정식을 이용하여 사하중에 의한 정적 초기처짐을 갖는 보의 자유진동을 지배하는 상미분방정식을 유도하고 이를 수치해석하여 고유진동수와 진동형을 산출하는 데 연구목적이 있다.

## 2. 수학적 모형

그림 1은 지간길이가  $l$ 이고, 분포 사하중  $Q$ 가 작용하고 있는 보의 정적모드와 동적모드를 나타내고 있다. 이 그림에서 점선으로 표시된  $u(x)$ 는 사하중  $Q$ 에 의한 정적 초기처짐을 나타내고 실선으로 표시된  $v(x, t)$ 는 정적 초기처짐  $u(x)$ 로부터 측정된 자유진동에 의한 동적처짐을 나타낸다. 여기서  $x$ 는 보의 축방향 좌표이고  $t$ 는 시간이다.

분포 사하중  $Q$ 로 인한 정적처짐  $u(x)$ 를 갖는 보의 자유진동을 지배하는 편미분방정식은 다음과 같다.(7)

$$\rho A \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ EA \left( \frac{\partial u(x)}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \right] = 0 \quad (1)$$

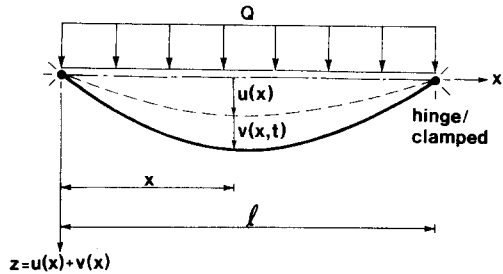


그림 1. 정적 초기처짐을 갖는 보의 자유진동

윗 식에서  $\rho$ 는 보의 단위체적당질량,  $E$ 는 탄성계수,  $A$ 는 단면적,  $I$ 는 단면2차모멘트이다.

보의 자유진동은 조화진동을 한다고 가정하면 횡방향변위의 조화진동식은 다음과 같이 표시된다.

$$v(x, t) = v(x) \sin(\omega t) \quad (2)$$

(2)식에서  $v(x)$ 는 조화진동의 진폭으로  $x$ 만의 함수이며  $\omega$ 는 고유각진동수(rad/sec)이다. 이후에  $u(x)$ ,  $v(x)$ 는 각각  $u$ ,  $v$ 로 표시한다.

보의 단면을 등단면으로 국한하고, (2)식을 이용하면 (1)식은 다음과 같이 전개된다.

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} - \frac{EA}{2} \left( \frac{du}{dx} \right)^2 \frac{d^2 v}{dx^2} - EA \frac{du}{dx} \times \frac{d^2 u}{dx^2} \frac{dv}{dx} - \rho A \omega^2 v = 0 \quad (3)$$

보의 자유진동을 지배하는 미분방정식을 무차원으로 유도하기 위하여 다음과 같은 무차원변수들을 이용한다.

$$\xi = x/l \quad (4.1)$$

\* 원광대학교 토목공학과  
 \*\* 대전대학교 토목공학과  
 \*\*\* 원광대학교 대학원 토목공학과

$$\mu = u/l \quad (4.2)$$

$$\eta = v/l \quad (4.3)$$

$$s = l/r \quad (4.4)$$

윗 식들에서  $\xi$ ,  $\mu$ ,  $\eta$ 는 각각  $x$ ,  $u$ ,  $v$ 를 시간길이  $l$ 로 정규화한 것이다. (4.4)식에서  $r=(I/A)^{1/2}$ 이고 따라서  $s$ 는 보의 세장비이다.

(4.1)-(4.4)식을 이용하여 (3)식의 미분방정식을 무차원화하면 사하중으로 인한 정적 초기처짐을 갖는 보의 자유진동을 지배하는 무차원 미분방정식이 다음과 같이 유도된다.

$$\frac{d^4\eta}{d\xi^4} = \frac{s^2}{2} \left( \frac{d\mu}{d\xi} \right)^2 \frac{d^2\eta}{d\xi^2} + s^2 \frac{d\mu}{d\xi} \frac{d^2\mu}{d\xi^2} \frac{d\eta}{d\xi} + C_i^2 \eta \quad (5)$$

윗 식에서  $C_i$ 는 무차원 고유진동수로 그 내용은 다음과 같고,  $i$ 는 모드번호(mode number)이다.

$$C_i = \omega_i l^2 (\rho A/EI)^{1/2} \\ = \omega_i s l (\rho/E)^{1/2}, \quad i=1, 2, 3, \dots \quad (6)$$

(5)식의 미분방정식에서  $d\mu/d\xi$  및  $d^2\mu/d\xi^2$ 의 항들이 보의 자유진동에서 사하중으로 인한 정적 초기처짐의 영향요소이며, 이들 영향요소를 무시하면 (5)식은  $d^4\eta/d\xi^4=C_i^2\eta$ 로 간단해지며, 이는 문헌[8]의 결과와 일치한다.

보의 단부에서 경계조건은 다음과 같이 구한다.

힌지단에서 처짐과 휨모멘트는 "0"이므로  $v=EI d^2v/dx^2=0$ 이고 여기에 (4.3)식을 적용시키면 다음과 같은 무차원 경계조건식이 유도된다.

$$\eta=0, \quad \xi=0 \text{ 또는 } 1 \text{ 에서} \quad (7.1)$$

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2}=0, \quad \xi=0 \text{ 또는 } 1 \text{ 에서} \quad (7.2)$$

고정단에서 처짐과 회전각은 "0"이므로  $v=dv/dx=0$ 이고 마찬가지로 (4.3)식을 이용하면 다음과 같은 무차원 경계조건식이 유도된다.

$$\eta=0, \quad \xi=0 \text{ 또는 } 1 \text{ 에서} \quad (8.1)$$

$$\frac{d\eta}{d\xi}=0, \quad \xi=0 \text{ 또는 } 1 \text{ 에서} \quad (8.2)$$

이상에서 사하중으로 인한 정적 초기처짐을 갖는 보의 자유진동을 지배하는 미분방정식을 (5)식과 같이 유도하였고 이 미분방정식의 힌지단 및 고정단의 경계조건식은 각각 (7.1), (7.2)식 및 (8.1), (8.2)식과 같다.

### 3. 정적 초기처짐의 영향요소 산정

(5)식의 미분방정식에서  $d\mu/d\xi$  및  $d^2\mu/d\xi^2$ 의 항은 보의 단부조건과 사하중의 크기  $Q$ 에 의하여 결정되는 정적 초기처짐의 영향요소이다.

사하중  $Q$ 는  $x$ 의 함수로 표시되는 모든 임의 분포하중이 가능하나 본 연구에서는 구조물의 자체중량 또는 설하중 등과 같이 크기가  $Q$ 인 등분포 사하중으로 제한한다. 등분포 사하중  $Q$ 는 다음과 같이 무차원화하여 무차원 사하중으로 정의하여 사용한다.

$$q = \frac{Ql^3}{EI} \quad (9)$$

여로서 고정-힌지보에서 등분포 사하중  $Q$ 가 작용할 때  $u$  및  $\mu$ ,  $d\mu/d\xi$ ,  $d^2\mu/d\xi^2$ 은 각각 (10.1)-(10.4)식과 같다<sup>(9)</sup>.

$$u = \frac{Ql^4}{48EI} \left[ 3 \left( \frac{x}{l} \right)^2 - 5 \left( \frac{x}{l} \right)^3 + 2 \left( \frac{x}{l} \right)^4 \right] \quad (10.1)$$

$$\mu = \frac{q}{48} (3\xi^2 - 5\xi^3 + 2\xi^4) \quad (10.2)$$

$$\frac{d\mu}{d\xi} = \frac{q}{48} (6\xi - 15\xi^2 + 8\xi^3) \quad (10.3)$$

$$\frac{d^2\mu}{d\xi^2} = \frac{q}{8} (1 - 5\xi + 4\xi^2) \quad (10.4)$$

### 4. 수치해석 방법

미분방정식 (5)식에 포함된 무차원 사하중  $q$ 에 의한 정적 초기처짐의 영향요소인  $d\mu/d\xi$ ,  $d^2\mu/d\xi^2$ 를 구하였으므로 이제 이 미분방정식을 푸는 문제는 자유진동의 고유치  $C_i$ 와 이에 대응되는 진동형  $\eta_i(\xi)=\eta_i$ 를 구하는 문제로 형성된다.

본 연구에서 자유진동의 고유치  $C_i$ 값을 찾기 위하여 시행착오적 고유치문제를 이용하였고, 진동형  $\eta_i$ 를 구하기 위하여 미분방정식의 수치적분은 Improved Euler method를 이용하였다<sup>(10.11)</sup>.

미분방정식에 포함되어 있는 고유치  $C_i$  및 대응진동형  $\eta_i$ 를 구하기 위한 수치해석 방법을 간단히 설명하면 다음과 같다.

먼저 단부조건, 무차원 사하중  $q$  및 세장비  $s$ 값을 주면, (10.1)-(10.4)식을 이용하여 대수적으로  $\mu$ ,  $d\mu/d\xi$ ,  $d^2\mu/d\xi^2$ 을 계산한다.

다음에  $C_i$ 값을 시행착오적으로 가정하여 (5)식의 미분방정식에 대입한 후에 해석 보의 단부조건에 따라서  $\xi=0$ 에서의 (7.1), (7.2)식 또는 (8.1), (8.2)식의 경계조건을 초기치로 하여 Improved Euler method로  $\xi=0$ 에서  $\xi=1$ 까지 미분

방정식을 수치적분하여 진동형  $\eta_i$ 를 구한다.

이 때 시행확오적으로 가정된  $C_i$ 값이 자유진동의 고유치 인지는 수치적분의 수행결과로 얻어진 경계조건이  $\xi=1$ 에서의 실제의 경계조건 (7.1), (7.2)식 또는 (8.1), (8.2)식을 만족하는지의 여부로 판단한다. 즉  $C_i$ 값의 산정에는 시행확 오적 고유치문제를 이용하였다.

이상의 수치해석방법을 보의 단부조건, 무차원 사하중  $q$ , 세장비  $s$ 를 입력하면 무차원 정적 초기처짐  $\mu$  및 자유진동의 고유치인 무차원 고유진동수  $C_i$ 와 진동형  $\eta_i$ 가 계산되도록 FORTRAN 77으로 프로그램하였으며, 진동모드는 제3모드까지 계산하였다.

### 5. 수치해석 예 및 고찰

표 1은  $q=0.5, 1, 1.5$ 인 경우  $C_i/C_{0i}$ 값들을 수록한 표이다. 여기서  $C_{0i}$ 는 사하중에 의한 정적 초기처짐을 고려하지 않은 무차원 고유진동수 즉  $q=0$ 인 경우의  $C_i$ 값이다. 이 표에서 사하중  $q$ 가 증가할 수록 즉 정적 초기처짐이 클수록  $C_i/C_{0i}$ 가 큼을 알 수 있으며, 힌지-힌지보>고정-힌지보>고정-고정보의 순서로 영향이 더 큼을 알 수 있다. 특히 힌지단을 갖는 보에서  $q$ 의 영향은 상당히 커서 힌지-힌지보 및 고정-힌지보의 자유진동해석에서 정적처짐의 영향을 고려하는 것이 좋을 것으로 사료된다.

표 1. 단부조건에 따른  $C_i/C_{0i}$ 비교( $s=100$ )

end condition	i	q=0.5	q=1	q=1.5
hinged-hinged	1	1.078	1.281	1.558
	2	1.013	1.052	1.113
	3	1.006	1.023	1.052
clamped-clamped	1	1.001	1.003	1.007
	2	1.000	1.001	1.002
	3	1.000	1.001	1.001
clamped-hinged	1	1.008	1.030	1.065
	2	1.002	1.006	1.014
	3	1.001	1.003	1.007

그림 2는 세장비  $s=100$ 인 고정-힌지보인 경우 무차원 사하중  $q$ 와 무차원 고유진동수비  $C_i/C_{0i}$ 와의 관계를 나타낸 것이며, 이 그림 상단에 참고로  $C_{0i}$ 값을 기록하였다. 여기에서  $C_i/C_{0i}$ 는 결국  $q$ 값이  $C_i$ 에 미치는 영향력이며 이 값이 클수록 사하중이 고유진동수에 미치는 영향은 더 크다. 이  $C_{0i}$ 값들은 문헌(12)에서 참고한 값들이며 이 그림들에서 볼 수 있듯이  $q=0$ 인 경우에  $C_i/C_{0i}$ 값들은 모두 정확하게 "1"을 나타내고 있어서 본 연구에서의 수치해석방법의 타당성을 간접적으로 입증하고 있다.

이 그림에서  $q$ 값이 증가하면  $C_i/C_{0i}$ 값도 증가하며,  $q$ 값이 같을 때  $C_i/C_{0i}$ 값은  $C_1/C_{01}>C_2/C_{02}>C_3/C_{03}$ 의 순서를 보이고 있어 고차모드에서 보다 저차모드에서 사하중에 의한 정적 초기처짐이 고유진동수에 미치는 영향이 더 큼을 알 수 있다. 또한, 이 그림에서  $C_i/C_{0i}$ 곡선의 증가율은  $i=1>i=2>i=3$ 의 순서로 커서 고차모드에서 보다 저차모드에서 사하중  $q$ 의 영향은 상대적으로 훨씬 더 큼을 알 수 있다.

그림 3은 고정-힌지보에서  $q=1$ 일때 세장비  $s$ 가  $C_i/C_{0i}$ 에 미치는 영향을 나타낸 것으로 세장비  $s$ 가 증가하면  $C_i/C_{0i}$ 값도 증가함을 알 수 있다. 또한 세장비가 같을 때  $C_i/C_{0i}$ 값은  $C_1/C_{01}>C_2/C_{02}>C_3/C_{03}$ 의 순서를 보이고 있어서 고차모드에서 보다 저차모드에서 세장비가 고유진동수에 미치는 영향이 더 큼을 알 수 있으며, 세장비  $s$ 가  $C_i$ 에 미치는 영향은 힌지-힌지보>고정-힌지보>고정-고정보의 순서로 영향이 큼을 알 수 있다.

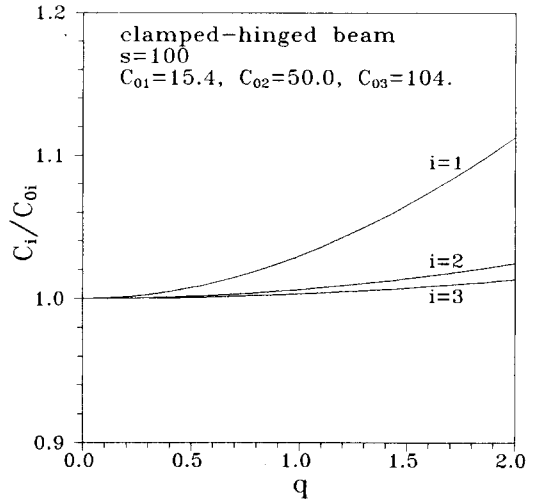


그림 2.  $C_i/C_{0i}$  -  $q$  곡선

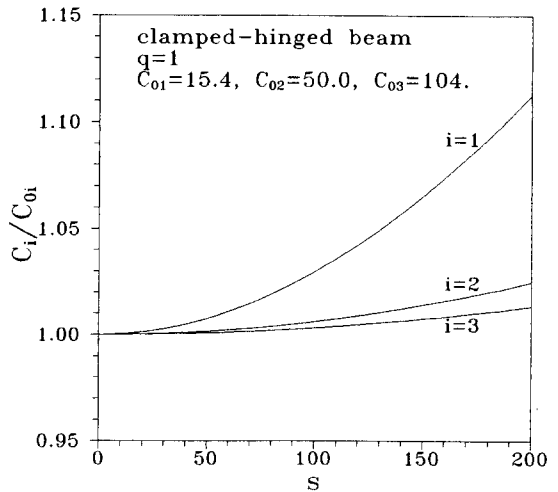


그림 3.  $C_i/C_{0i}$  -  $s$  곡선

참고로 그림 4에  $q=1.5$ ,  $s=100$ 인 고정-힌지보의 진동형을 나타내었다.

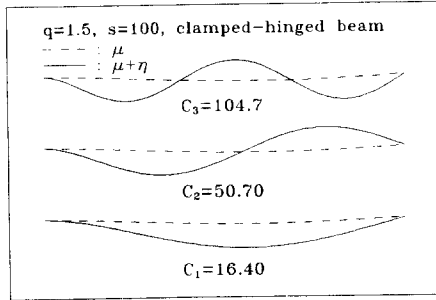


그림 4. 정적 초기처짐을 갖는 보의 진동형 예

## 6. 결 론

이 연구는 등분포 사하중에 의한 정적 초기처짐을 갖는 보의 자유진동을 해석한 논문이다. 이 논문에서는 문헌[7]에서 유도된 편미분방정식을 이용하여 사하중에 의한 정적 초기처짐을 갖는 보의 자유진동을 지배하는 상미분방정식을 유도하고 이를 수치해석하여 고유진동수와 진동형을 산출하였다. 일련의 수치해석 예제를 분석하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

- 1) 사하중에 의한 정적 초기처짐은 고유진동수를 증가시킨다.
- 2) 정적 초기처짐의 영향은 고차모드에서 보다 저차모드에서 훨씬 더 크다.
- 3) 정적 초기처짐의 영향은 힌지-힌지보>고정-힌지보>고정-고정보의 순서로 크다.

이 논문에서 정적 초기처짐이 자유진동에 미치는 영향은 등분포 사하중을 받는 등단면 보의 자유진동으로 국한하였지만, 임의 분포 사하중을 받는 변단면 보의 자유진동에 대한 영향은 이후의 연구 과제로 삼는다.

## 참 고 문 헌

1. H.C.Wang, 1967, "Generalized Hypergeometric Function Solutions on the Transverse Vibration of a Class of Non-Uniform Beams", Journal of Applied Mechanics, Vol.136, pp.702-708.
2. A.C.Heidebrecht, 1967, "Vibration of Non-Uniform Simply-Supported Beams", Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol.93, No. EM2, ppl-15.
3. W.Y.Tseng, 1969, Nonlinear Vibration of Straight and Buckled Beams under Harmonic Excitation, Ph.D Thesis, M.I.T., U.S.A.
4. A.K.Gupta, 1975, Vibration Analysis of Linearly Tapered Beams using Frequency-Dependent Stiffness and Mass Matrix, Ph.D Thesis, Utah State University, Logan, Utah, U.S.A.
5. A.K.Gupta, 1985, "Vibration of Tapered Beams", Journal of the Structural Division, ASCE, Vol.11, No.1, pp.1-15.
6. 이병구, 오상진, 최규도, 1991, "변단면 보의 자유진동 해석", 대한토목학회 논문집, 제11권 제4호, pp.37-46.
7. Hideo Takabatake, 1991, "Effect of Dead Loads on Natural Frequencies of Beams", ASCE, Journal of Structural Engineering, Vol.117, No. 4, pp.1039-1052.
8. John M. Biggs, 1982, Introduction to Structural Dynamics, McGraw Hill, pp.150-153.
9. J.M.Gere and S.P.Timoshenko, 1984, Mechanics of Materials, Wadworth, pp.351-428.
10. B.K.Lee and J.F.Wilson, 1990, "Free Vibrations of Arches with Variable Curvature", Journal of Sound and Vibration, Vol 136, No.1, pp.75-89.
11. B.K.Lee, J.F.Wilson and S.J.Oh, 1993, "Elastica of Cantilevered Beams with Variable Cross Sections", Int. J. Non-Linear Mechanics, Vol.28, No. 5, pp.579-589.
12. M.Paz, 1991, Structural Dynamics, Van Nostrand Reinhold, pp.441-450.