

이차근사가 혼돈응답에 미치는 영향

이 원 경*, 박 해 동**

(The Effect of the Second-Order Approximation on Chaotic Responses)

(Won Kyoung Lee and Hae Dong Park)

1. 서론

강비선형계(strongly nonlinear system)에서만 발생한다고 알려졌던 혼돈운동이 1980년대 초에 조화가진력을 가진 약비선형(weakly nonlinear) 다자유도계에서도 발견된[1, 2] 이후 많은 연구자들이[3-12] 이러한 약비선형 다자유도계의 혼돈운동을 연구해 오고 있다. 이들의 연구에서는 비자유계로 표시된 원래계를 여러 근사해법(평균법, 다중시간법 등)의 일차근사만 취하여 자유계로 표시된 근사화계로 변환한 후 이 근사화계의 해가 Hopf분기와 주기배가 분기를 거쳐 혼돈운동에 도달함을 확인함으로써 원래계에서도 혼돈운동이 발생함을 암시하였다. 그러나, 근사화 과정을 통하여 정보의 유실이 생겼으므로 근사화계의 해가 원래계의 해를 완전히 반영한다고 볼 수는 없다. 즉 이 암시에는 의문의 여지가 있는 것인데 이 점을 확인하기 위하여 이원경등[13]은 내부공진($\omega_1 \approx 2\omega_2$)과 외부공진($\Omega \approx \omega_n, n=1, 2$)을 가지는 탄성진자계를 집중적으로 조사하였다. 이들은 다중시간법의 일차근사만 취하여, 근사화계를 구한 후 원래계와 근사화계의 해의 Lyapunov지수를 비교함으로써 근사화계에서 혼돈운동이 발견된 매개변수(가진진폭)의 값 근방에서 원래계의 해도 혼돈운동임을 확인하였다. 따라서 다른 연구자들[1-12]의 암시가 어느 정도 타당성이 있음을 확인하였다. 그 연구[13]에서 공진조건이 $\Omega \approx \omega_2$ 인 경우에는 원래계와 근사화계의 Lyapunov지수가 서로 잘 일치하지 않음을 알 수 있었는데 “만약 이차근사를 취하면 결과가 어떻게 될까?” 라는 질문에 봉착하게 되었다. 이 질문에 답하기 위한 시도인 본연구에서는 다중시간법의 이차근사를 취하여 근사화계를 구하고 이 근사화계의 혼돈응답을 원래계의 혼돈응답과 서로 비교함으로써 이차근사가 혼돈응답에 미치는 영향을 조사해 보고자 한다.

2. 운동방정식 및 해석

* 영남대학교 기계공학과(정회원)
** 유니슨 기술연구소

Fig. 1의 탄성진자계의 운동방정식을 참고문헌 [13,14]로부터 옮겨오면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \ddot{x} + c_1 \dot{x} + \omega_1^2 x - (1+x)\dot{\varphi}^2 + \omega_2^2(1-\cos\varphi) &= f_1 \cos \Omega t \\ (1+x)^2 \ddot{\varphi} + c_2 \dot{\varphi} + 2(1+x)\dot{x}\dot{\varphi} + \omega_2^2(1+x)\sin\varphi &= f_2 \cos \Omega t \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 x =무차원화한 스프링운동; φ =진자운동; ω_1 =스프링모드의 고유진동수; ω_2 =진자모드의 고유진동수; Ω =가진력의 고유진동수; c_1, c_2 =점성감쇠계수; f_1, f_2 =가진력의 진폭 등이다.

정적 평형 위치 근방에서의 운동만을 고려하기 위하여 운동의 진폭을 작은 매개변수 ε 의 차수로 가정하고 비선형항, 감쇠력, 가진력의 크기의 차수를 동일하게 맞추기 위하여 감쇠계수와 가진력의 진폭을 다음과 같이 가정하였다.

$$c_n = \varepsilon \hat{c}_n, \quad f_n = \varepsilon^2 \hat{f}_n, \quad n=1,2 \quad (2)$$

여기서 $\hat{c}_n, \hat{f}_n, \omega_n, \Omega$ 은 $O(1)$ 의 차수이다.

앞에서 언급했다시피 비선형 다자유도계는 어떤 공진조건이 만족될 때 매우 복잡한 운동 양상을 보이는데 이 연구에서는 내부공진조건과 외부공진조건이 동시에 만족되는 경우를 생각하기로 한다. 내부공진조건으로서는 $l_0/l \approx 3/4$ 일 때 구현 가능한 $\omega_1 \approx 2\omega_2$ 를, 외부공진조건으로서는 $\Omega \approx \omega_1$ 과 $\Omega \approx \omega_2$ 인 두 경우를 각각 고려하기로 한다. 편의를 위하여 이러한 공진조건은 이탈변수를 사용하여 다음과 같이 나타내기로 한다.

$$\begin{aligned} 2\omega_2 &= \omega_1 + \sigma_1 \\ \Omega &= \omega_s + \sigma_2, \quad s=1,2 \end{aligned} \quad (3)$$

여기서 $\sigma_1 = \varepsilon \hat{\sigma}_1, \sigma_2 = \varepsilon \hat{\sigma}_2$ 이며 $\hat{\sigma}_1$ 과 $\hat{\sigma}_2$ 은 $O(1)$ 이다.

식 (5)의 일양하게 타당한 근사해(uniformly valid approximate solution)를 구하기 위하여 다중시간법(method of multiple scales)을 사용하기로 한다[15-17]. 따라서 해를

다음과 같은 전개로 나타내기로 하자.

$$x(t; \varepsilon) = \sum_{n=1}^3 \varepsilon^n x_n(T_0, T_1, T_2) + O(\varepsilon^4)$$

$$\varphi(t; \varepsilon) = \sum_{n=1}^3 \varepsilon^n \varphi_n(T_0, T_1, T_2) + O(\varepsilon^4) \quad (4)$$

2차근사를 위하여 다음과 같은 3개의 시간척도(time scale)를 사용하기로 한다.

$$T_0 = t, T_1 = \varepsilon t, T_2 = \varepsilon^2 t \quad (5)$$

여기서 T_0 는 $\omega_1, \omega_2, \Omega$ 에 따라 변화하는 양을 측정하는 빠른 척도(fast scale)이며 T_1 과 T_2 는 비선형성, 감쇠, 공진조건에 기인한 진폭이나 위상의 변조를 측정하는 늦은 척도(slow scale)이다.

이때 시간도함수는 다음과 같이 변환된다.

$$d/dt = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2$$

$$d^2/dt^2 = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) \quad (6)$$

여기서

$$D_0 = \partial/\partial T_0, D_1 = \partial/\partial T_1, D_2 = \partial/\partial T_2 \quad (7)$$

식 (4)~(6)을 식 (1)에 대입하고 ε 에 대하여 정리하면 다음과 같다.

$O(\varepsilon)$

$$D_0^2 x_1 + \omega_1^2 x_1 = 0$$

$$D_0^2 \varphi_1 + \omega_2^2 \varphi_1 = 0 \quad (8)$$

$O(\varepsilon^2)$

$$D_0^2 x_2 + \omega_1^2 x_2 = -2D_0 D_1 x_1 + (D_0 \varphi_1)^2 - \widehat{c}_1 D_0 x_1$$

$$- \omega_2^2 \varphi_1^2 / 2 + \widehat{f}_1 \cos \Omega T_0$$

$$D_0^2 \varphi_2 + \omega_2^2 \varphi_2 = -2D_0 D_1 \varphi_1 - 2D_0 x_1 D_0 \varphi_1 - \widehat{c}_2 D_0 \varphi_1$$

$$- \omega_2^2 x_1 \varphi_1 - 2x_1 D_0^2 \varphi_1 + \widehat{f}_2 \cos \Omega T_0 \quad (9)$$

$O(\varepsilon^3)$

$$D_0^2 x_3 + \omega_1^2 x_3 = -2D_0 D_1 x_2 - (D_1^2 + 2D_0 D_2) x_1 - \widehat{c}_1 D_0 x_2$$

$$- \widehat{c}_1 D_1 x_1 + 2D_0 \varphi_1 D_0 \varphi_2 + 2D_0 \varphi_1 D_1 \varphi_1$$

$$+ x_1 (D_0 \varphi_1)^2 - \omega_2^2 \varphi_1 \varphi_2$$

$$D_0^2 \varphi_3 + \omega_2^2 \varphi_3 = -2D_0 D_1 \varphi_2 - (D_1^2 + 2D_0 D_2) \varphi_1 - 2x_1 D_0^2 \varphi_2$$

$$- 4x_1 D_0 D_1 \varphi_1 - x_1^2 D_0^2 \varphi_1 - 2x_2 D_0^2 \varphi_1$$

$$- \widehat{c}_2 D_0 \varphi_2 - \widehat{c}_2 D_1 \varphi_1 - 2D_0 x_1 D_0 \varphi_2$$

$$- 2D_0 x_1 D_1 \varphi_1 - 2D_0 x_2 D_0 \varphi_1$$

$$- 2D_1 x_1 D_0 \varphi_1 - 2x_1 D_0 x_1 D_0 \varphi_1$$

$$+ \omega_2^2 \varphi_1^3 / 6 - \omega_2^2 x_1 \varphi_2 - \omega_2^2 x_2 \varphi_1 \quad (10)$$

식 (8)의 일반해는 다음과 같다.

$$x_1 = A_1(T_1, T_2) \exp(i\omega_1 T_0) + cc$$

$$\varphi_1 = A_2(T_1, T_2) \exp(i\omega_2 T_0) + cc \quad (11)$$

여기서 cc 는 앞 항의 공액복소수를 나타낸다.

식 (11)을 식 (9)에 대입하면 다음을 얻는다.

$$D_0^2 x_2 + \omega_1^2 x_2 = \frac{\widehat{f}_1}{2} \exp(i\Omega T_0)$$

$$- i\omega_1 (2D_1 A_1 + \widehat{c}_1 A_1) \exp(i\omega_1 T_0)$$

$$- \frac{\omega_2^2}{2} (3A_2^2 \exp(i2\omega_2 T_0) - A_2 \overline{A_2}) + cc$$

$$D_0^2 \varphi_2 + \omega_2^2 \varphi_2 = \frac{\widehat{f}_2}{2} \exp(i\Omega T_0)$$

$$- i\omega_2 (2D_1 A_2 + \widehat{c}_2 A_2) \exp(i\omega_2 T_0)$$

$$+ \omega_2 (2\omega_1 + \omega_2) A_1 A_2 \exp[i(\omega_1 + \omega_2) T_0]$$

$$- \omega_2 (2\omega_1 - \omega_2) A_1 \overline{A_2} \exp[i(\omega_1 - \omega_2) T_0]$$

$$+ cc \quad (12)$$

여기서 $\overline{A_n}$ 는 A_n 의 공액복소수를 나타낸다. 함수 A_1 과 A_2 는 해가 유한해야 한다는 가해조건(solubility condition)을 만족시킴으로써 구할 수 있다. 이 가해조건 형태는 공진조건에 달려 있는데 식 (12)를 살펴보면 내부공진조건 $2\omega_2 \approx \omega_1$ 과 외부공진조건 $\Omega \approx \omega_s$ ($s = 1, 2$)을 확인할 수 있다. 식 (3)을 이용하여 식 (12)를 정리하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$D_0 x_2 + \omega_1^2 x_2 = \exp(i\omega_1 T_0) \{ -i\omega_1 (2D_1 A_1 + \widehat{c}_1 A_1)$$

$$+ \delta_{1s} \frac{\widehat{f}_1}{2} \exp(i\widehat{\sigma}_2 T_1) - \frac{3}{2} \omega_2^2 A_2^2 \exp(i\widehat{\sigma}_1 T_1) \}$$

$$+ \delta_{2s} \frac{\widehat{f}_2}{2} \exp(i\Omega T_0) + \frac{\omega_2^2}{2} A_2 \overline{A_2} + cc$$

$$D_0 \varphi_2 + \omega_2^2 \varphi_2 = \exp(i\omega_2 T_0) \{ -i\omega_2 (2D_1 A_2 + \widehat{c}_2 A_2)$$

$$+ \delta_{2s} \frac{\widehat{f}_2}{2} \exp(i\widehat{\sigma}_2 T_1)$$

$$- \omega_2 (2\omega_1 - \omega_2) A_1 \overline{A_2} \exp(-i\widehat{\sigma}_1 T_1) \}$$

$$+ \delta_{1s} \frac{\widehat{f}_2}{2} \exp(i\Omega T_0)$$

$$+ \omega_2 (2\omega_1 + \omega_2) A_1 A_2 \exp[-i(\omega_1 + \omega_2) T_0] + cc \quad (13)$$

식 (13)의 가해조건(불명항이 소거되는 조건)은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
2i\omega_1 D_1 A_1 &= -i\omega_1 \widehat{c}_1 A_1 + \delta_{1s} \frac{\widehat{f}_1}{2} \exp(i\widehat{\sigma}_2 T_1) \\
&\quad - \frac{3}{2} \omega_2^2 A_2^2 \exp(i\widehat{\sigma}_1 T_1) \\
2i\omega_2 D_1 A_2 &= -i\omega_2 \widehat{c}_2 A_2 \\
&\quad - \omega_2 (2\omega_1 - \omega_2) A_1 \overline{A_2} \exp(-i\widehat{\sigma}_1 T_1) \\
&\quad + \delta_{2s} \frac{\widehat{f}_2}{2} \exp(i\widehat{\sigma}_2 T_1) \quad (14)
\end{aligned}$$

여기서 δ_{ms} 는 Kronecker delta이며 식 (14)의 좌변은 복소변위 A_n 의 시간 T_1 에 대한 변화율을 나타낸다. 식 (13)에서 불멸항을 소거하고 정리하면 식 (13)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}
D_0^2 x_2 + \omega_1^2 x_2 &= \delta_{2s} \frac{\widehat{f}_1}{2} \exp(i\Omega T_0) + \frac{\omega_2^2}{2} A_2 \overline{A_2} + cc \\
D_0^2 \varphi_2 + \omega_2^2 \varphi_2 &= \delta_{1s} \frac{\widehat{f}_2}{2} \exp(i\Omega T_0) \\
&\quad + \omega_2 (2\omega_1 + \omega_2) A_1 A_2 \exp[i(\omega_1 + \omega_2)T_0] \quad (15)
\end{aligned}$$

식 (15)의 제차항은 식 (11)과 같아서 식 (11)에 포함시킬 수 있으므로 다음과 같은 비제차항만 고려하면 충분하다.

$$\begin{aligned}
x_2 &= \delta_{2s} \frac{\widehat{f}_1}{2(\omega_1^2 - \Omega^2)} \exp(i\Omega T_0) + \frac{\omega_2^2}{2\omega_1^2} A_2 \overline{A_2} + cc \\
\varphi_2 &= -\frac{\omega_2(2\omega_1 + \omega_2)}{\omega_1(2\omega_2 + \omega_1)} A_1 A_2 \exp[i(\omega_1 + \omega_2)T_0] \\
&\quad + \delta_{1s} \frac{\widehat{f}_2}{2(\omega_2^2 - \Omega^2)} \exp(i\Omega T_0) + cc \quad (16)
\end{aligned}$$

식 (16)과 식 (11)을 식 (10)에 대입하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}
D_0^2 x_3 + \omega_1^2 x_3 &= -D_1^2 A_1 \exp(i\omega_1 T_0) \\
&\quad - 2i\omega_1 D_2 A_1 \exp(i\omega_1 T_0) - \widehat{c}_1 D_1 A_1 \exp(i\omega_1 T_0) \\
&\quad - \frac{\omega_2^3(2\omega_1 + \omega_2)}{\omega_1(2\omega_2 + \omega_1)} A_1 A_2 \overline{A_2} \exp(i\omega_1 T_0) \\
&\quad - \frac{2\omega_2^3(2\omega_1 + \omega_2)(\omega_1 + \omega_2)}{\omega_1(2\omega_2 + \omega_1)} A_1 A_2 \overline{A_2} \exp(i\omega_1 T_0) \\
&\quad + 2i\omega_2 A_2 D_1 A_2 \exp(i2\omega_2 T_0) \\
&\quad + 2\omega_2^2 A_1 A_2 \overline{A_2} \exp(i\omega_1 T_0) + NST \\
D_0^2 \varphi_3 + \omega_2^2 \varphi_3 &= -D_1^2 A_2 \exp(i\omega_2 T_0) \\
&\quad - 2i\omega_2 D_2 A_2 \exp(i\omega_2 T_0) \\
&\quad - \frac{2\omega_2(2\omega_1 + \omega_2)(\omega_1 + \omega_2)^2}{\omega_1(2\omega_2 + \omega_1)} A_1 \overline{A_1} A_2 \exp(i\omega_2 T_0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\quad + 4i\omega_2 A_1 D_1 \overline{A_2} \exp[i(\omega_1 - \omega_2)T_0] \\
&\quad + 2\omega_2^2 A_1 \overline{A_1} A_2 \exp(i\omega_2 T_0) \\
&\quad + \frac{2\omega_2^4}{\omega_1^2} A_2^2 \overline{A_2} \exp(i\omega_2 T_0) - \widehat{c}_2 D_1 A_2 \exp(i\omega_2 T_0) \\
&\quad + \frac{2\omega_2(2\omega_1 + \omega_2)(\omega_1 + \omega_2)}{(2\omega_2 + \omega_1)} A_1 \overline{A_1} A_2 \exp(i\omega_2 T_0) \\
&\quad - 2i\omega_1 A_1 D_1 \overline{A_2} \exp[i(\omega_1 - \omega_2)T_0] \\
&\quad - \frac{\omega_2^4}{\omega_1^2} A_2^2 \overline{A_2} \exp(i\omega_2 T_0) + \frac{1}{2} \omega_2^2 A_2^2 \overline{A_2} \exp(i\omega_2 T_0) \\
&\quad + \frac{\omega_2^3(2\omega_1 + \omega_2)}{\omega_1(2\omega_2 + \omega_1)} A_1 \overline{A_1} A_2 \exp(i\omega_2 T_0) \\
&\quad + 2i\omega_2 \overline{A_2} D_1 A_1 \exp[i(\omega_1 - \omega_2)T_0] + NST \quad (17)
\end{aligned}$$

여기서 NST(nonsecular term)는 불멸항에 기여하지 않는 항이므로 식 (3)을 이용하여 식 (17)의 가해조건을 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
2i\omega_1 D_2 A_1 &= -D_1^2 A_1 - \widehat{c}_1 D_1 A_1 \\
&\quad - \frac{\omega_2^3(2\omega_1^2 + \omega_2^2)}{\omega_1(2\omega_2 + \omega_1)} A_1 A_2 \overline{A_2} \\
&\quad + 2i\omega_2 A_2 D_1 A_2 \exp(i\widehat{\sigma}_1 T_1) \\
2i\omega_2 D_2 A_2 &= -D_1^2 A_2 - \widehat{c}_2 D_1 A_2 \\
&\quad - \frac{\omega_2^3(2\omega_1^2 + \omega_2^2)}{\omega_1(2\omega_2 + \omega_1)} A_1 \overline{A_1} A_2 \\
&\quad + 2i(2\omega_2 A_1 D_1 \overline{A_2} - \omega_1 A_1 D_1 \overline{A_2} \\
&\quad + \omega_2 \overline{A_2} D_1 A_1) \exp(-i\widehat{\sigma}_1 T_1) \\
&\quad + \frac{\omega_2^3(\omega_1^2 + 2\omega_2^2)}{2\omega_1^2} A_2^2 \overline{A_2} \quad (18)
\end{aligned}$$

식 (18)의 좌변은 복소변위 A_n 의 시간 T_2 에 대한 변화율을 나타낸다. 한편 이 식의 우변은 A_n 의 시간 T_1 에 대한 변화율을 포함하고 있는데 식 (14)에 주어진 변화율을 이용하여 식 (18)을 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
2i\omega_1 D_2 A_1 &= \frac{\widehat{c}_1^2}{4} A_1 \\
&\quad + i\frac{\omega_2^2}{8\omega_1} (6\widehat{c}_2\omega_2 - 8\widehat{c}_2\omega_1 - 3\widehat{c}_1\omega_2) A_2^2 \exp(i\widehat{\sigma}_1 T_1) \\
&\quad - \frac{\omega_2(8\omega_1^3 + 14\omega_1^2\omega_2 - 17\omega_1\omega_2^2 + 10\omega_2^3)}{4\omega_1(\omega_1 + 2\omega_2)} A_1 A_2 \overline{A_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3\widehat{\sigma}_1\omega_2^2}{4\omega_1} A_2^2 \exp(i\widehat{\sigma}_1 T_1) \\
& + \delta_{1s} \frac{(i\widehat{c}_1 - 2\widehat{\sigma}_2)}{8\omega_1} \widehat{f}_1 \exp(i\widehat{\sigma}_2 T_1) \\
& + \delta_{2s} \frac{(4\omega_1 - 3\omega_2)}{8\omega_1} \widehat{f}_2 A_2 \exp[i(\widehat{\sigma}_1 + \widehat{\sigma}_2) T_1] \\
2i\omega_2 D_2 A_2 = & - \frac{\widehat{c}_2^2}{4} A_2 \\
& - \frac{(12\omega_1^4 - 31\omega_1^2\omega_2^2 + 18\omega_1\omega_2^3 + 4\omega_2^4)}{4\omega_1(\omega_1 + 2\omega_2)} A_1 \overline{A_1} A_2 \\
& + i\frac{1}{4}(2\widehat{c}_1\omega_1 + 4\widehat{c}_2\omega_1 - 5\widehat{c}_1\omega_2 \\
& - 8\widehat{c}_2\omega_2) A_1 \overline{A_2} \exp(-i\widehat{\sigma}_1 T_1) \\
& - \frac{1}{2}\widehat{\sigma}_1(2\omega_1 - \omega_2) A_1 \overline{A_2} \exp(-i\widehat{\sigma}_1 T_1) \\
& + \frac{\omega_2^2(10\omega_1^2 - 15\omega_1\omega_2 + 8\omega_2^2)}{8\omega_1^2} A_2^2 \overline{A_2} \\
& - \delta_{1s} \frac{(2\omega_1 - 5\omega_2)}{8\omega_1} \widehat{f}_1 \overline{A_2} \exp[i(\widehat{\sigma}_2 - \widehat{\sigma}_1) T_1] \\
& + \delta_{2s} \left\{ \frac{(i\widehat{c}_2 - 2\widehat{\sigma}_2)}{8\omega_2} \widehat{f}_2 \exp(i\widehat{\sigma}_2 T_1) \right. \\
& \left. + \frac{3(2\omega_1 - 3\omega_2)}{8\omega_2} \widehat{f}_2 A_1 \exp[-i(\widehat{\sigma}_1 + \widehat{\sigma}_2) T_1] \right\} \quad (19)
\end{aligned}$$

식 (6)을 이용하면 복소변위 A_n 의 시간 t 에 대한 변화율을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$2i\omega_n \frac{dA_n}{dt} = \varepsilon 2i\omega_n D_1 A_n + \varepsilon^2 2i\omega_n D_2 A_n + O(\varepsilon^3), \quad n=1,2 \quad (20)$$

복소변위 A_n 을 극좌표로 바꿔쓰기 위하여

$$a_1 = \varepsilon \widehat{a}_1, \quad a_2 = \varepsilon \widehat{a}_2 \quad (21)$$

로 두고 복소변위를 다음과 같이 두면

$$A_1 = (\widehat{a}_1/2) \exp(i\beta_1), \quad A_2 = (\widehat{a}_2/2) \exp(i\beta_2) \quad (22)$$

여기서 \widehat{a}_n 은 $O(1)$ 이다. 이제 수정위상변수들 다음과 같이 정의하고

$$\begin{aligned}
\gamma_1 = & -\beta_s + \widehat{\sigma}_2 T_1, \quad \gamma_2 = 2\beta_2 - \beta_1 + \widehat{\sigma}_1 T_1, \\
s = & 1,2 \quad (23)
\end{aligned}$$

식 (14)와 식 (19)를 식 (20)에 대입하고 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\frac{d\widehat{a}_1}{dt} = & \varepsilon \left\{ -\frac{1}{2}\widehat{c}_1\widehat{a}_1 - \frac{3\omega_2^2}{8\omega_1}\widehat{a}_2^2 \sin \gamma_2 + \delta_{1s} \frac{\widehat{f}_1}{2\omega_1} \sin \gamma_1 \right\} \\
& + \varepsilon^2 \left\{ \frac{3\omega_2^2}{16\omega_1^2} \widehat{\sigma}_1 \widehat{a}_1^2 \sin \gamma_2 \right. \\
& - \frac{\omega_2(8\widehat{c}_2\omega_1 + 3\widehat{c}_1\omega_2 - 6\widehat{c}_2\omega_2)}{32\omega_1^2} \widehat{a}_2^2 \cos \gamma_2 \\
& + \delta_{1s} \left(\frac{\widehat{c}_1\widehat{f}_1}{8\omega_1^2} \cos \gamma_1 + \frac{\widehat{\sigma}_2\widehat{f}_1}{4\omega_1^2} \sin \gamma_1 \right) \\
& \left. + \delta_{2s} \frac{(4\omega_1 - 3\omega_2)\widehat{f}_2}{16\omega_1^2} \widehat{a}_2 \sin(\gamma_1 + \gamma_2) \right\} \\
\widehat{a}_1 \frac{d\beta_1}{dt} = & \varepsilon \left\{ \frac{3\omega_2^2}{8\omega_1} \widehat{a}_2^2 \cos \gamma_2 - \delta_{1s} \frac{\widehat{f}_1}{2\omega_1} \cos \gamma_1 \right\} \\
& + \varepsilon^2 \left\{ -\frac{\widehat{c}_1^2}{8\omega_1} \widehat{a}_1 - \frac{3\omega_2^2}{16\omega_1^2} \widehat{\sigma}_1 \widehat{a}_2^2 \cos \gamma_2 \right. \\
& + \frac{\omega_2(8\omega_1^3 + 14\omega_1^2\omega_2 - 17\omega_1\omega_2^2 + 10\omega_2^3)}{32\omega_1^2(\omega_1 + 2\omega_2)} \widehat{a}_1 \widehat{a}_2^2 \\
& - \frac{\omega_2(8\widehat{c}_2\omega_1 + 3\widehat{c}_1\omega_2 - 6\widehat{c}_2\omega_2)}{32\omega_1^2} \widehat{a}_2^2 \sin \gamma_2 \\
& + \delta_{1s} \left(\frac{\widehat{c}_1\widehat{f}_1}{8\omega_1^2} \sin \gamma_1 + \frac{\widehat{\sigma}_2\widehat{f}_1}{4\omega_1^2} \cos \gamma_1 \right) \\
& \left. + \delta_{2s} \frac{(3\omega_2 - 4\omega_1)\widehat{f}_2}{16\omega_1^2} \widehat{a}_2 \cos(\gamma_1 + \gamma_2) \right\} \\
\frac{d\widehat{a}_2}{dt} = & \varepsilon \left\{ -\frac{1}{2}\widehat{c}_2\widehat{a}_2 + \frac{1}{4}(2\omega_1 - \omega_2)\widehat{a}_1\widehat{a}_2 \sin \gamma_2 \right. \\
& + \delta_{2s} \frac{\widehat{f}_2}{2\omega_2} \sin \gamma_1 \left. \right\} \\
& + \varepsilon^2 \left\{ \frac{(2\omega_1 - \omega_2)}{8\omega_2} \widehat{\sigma}_1 \widehat{a}_1 \widehat{a}_2 \sin \gamma_2 \right. \\
& + \frac{(2\widehat{c}_1\omega_1 + 4\widehat{c}_2\omega_1 - 5\widehat{c}_1\omega_2 - 8\widehat{c}_2\omega_2)}{16\omega_2} \widehat{a}_1 \widehat{a}_2 \cos \gamma_2 \\
& + \delta_{1s} \frac{(5\omega_2 - 2\omega_1)\widehat{f}_1}{16\omega_1\omega_2} \widehat{a}_2 \sin(\gamma_1 - \gamma_2) \\
& + \delta_{2s} \left(\frac{3(3\omega_2 - 2\omega_1)\widehat{f}_2}{16\omega_2^2} \widehat{a}_1 \sin(\gamma_1 + \gamma_2) \right. \\
& \left. + \frac{\widehat{c}_2\widehat{f}_2}{8\omega_2^2} \cos \gamma_1 - \frac{\widehat{f}_2}{4\omega_2^2} \widehat{\sigma}_2 \sin \gamma_1 \right) \left. \right\} \\
\widehat{a}_2 \frac{d\beta_2}{dt} = & \varepsilon \left\{ \frac{1}{4}(2\omega_1 - \omega_2)\widehat{a}_1\widehat{a}_2 \cos \gamma_2 - \delta_{2s} \frac{\widehat{f}_2}{2\omega_2} \cos \gamma_1 \right\} \\
& + \varepsilon^2 \left\{ \frac{(2\omega_1 - \omega_2)}{8\omega_2} \widehat{\sigma}_1 \widehat{a}_1 \widehat{a}_2 \cos \gamma_2 - \frac{\widehat{c}_2^2}{8\omega_2} \widehat{a}_2 \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\omega_2(10\omega_1^2 - 15\omega_1\omega_2 + 8\omega_2^2)}{64\omega_1^2} \widehat{a}_2^3 \\
& + \frac{(12\omega_1^4 - 31\omega_1^2\omega_2^2 + 18\omega_1\omega_2^3 + 4\omega_2^4)}{32\omega_1\omega_2(\omega_1 + 2\omega_2)} \widehat{a}_1^2 \widehat{a}_2 \\
& - \frac{(2\widehat{c}_1\omega_1 + 4\widehat{c}_2\omega_1 - 5\widehat{c}_1\omega_2 - 8\widehat{c}_2\omega_2)}{16\omega_2} \widehat{a}_1 \widehat{a}_2 \sin \gamma_2 \\
& + \delta_{1s} \frac{(2\omega_1 - 5\omega_2)\widehat{f}_1}{16\omega_1\omega_2} \widehat{a}_2 \cos(\gamma_1 - \gamma_2) \\
& - \delta_{2s} \left(\frac{\widehat{f}_2}{4\omega_2^2} \widehat{\sigma}_2 \cos \gamma_1 + \frac{\widehat{c}_2 \widehat{f}_2}{8\omega_2^2} \sin \gamma_1 \right. \\
& \left. + \frac{3(3\omega_2 - 2\omega_1)\widehat{f}_2}{16\omega_2^2} \widehat{a}_1 \cos(\gamma_1 + \gamma_2) \right) \quad (24)
\end{aligned}$$

2.1 $\Omega \approx \omega_1$ 인 경우 ($s=1$)

식 (23)과 (24)에 $s=1$ 을 대입하면 다음의 자율상미분방정식(autonomous ordinary differential equation)을 얻게 된다.

$$\begin{aligned}
\dot{a}_1 &= -\frac{1}{2}c_1 a_1 - \frac{3\omega_2^2}{8\omega_1} a_2^2 \sin \gamma_2 + \frac{f_1}{2\omega_1} \sin \gamma_1 \\
& + \frac{c_1 f_1}{8\omega_1^2} \cos \gamma_1 - \frac{\sigma_2 f_1}{4\omega_1^2} \sin \gamma_1 + \frac{3\sigma_1 \omega_2^2}{16\omega_1^2} a_2^2 \sin \gamma_2 \\
& - \frac{\omega_2(8c_2\omega_1 + 3c_1\omega_2 - 6c_2\omega_2)}{32\omega_1^2} a_2^2 \cos \gamma_2 \\
a_1 \dot{\gamma}_1 &= \sigma_2 a_1 - \frac{3\omega_2^2}{8\omega_1} a_2^2 \cos \gamma_2 + \frac{f_1}{2\omega_1} \cos \gamma_1 \\
& + \frac{c_1^2}{8\omega_1} a_1 \\
& - \frac{\omega_2(8\omega_1^3 + 14\omega_1^2\omega_2 - 17\omega_1\omega_2^2 + 10\omega_2^3)}{32\omega_1^2(\omega_1 + 2\omega_2)} a_1 a_2^2 \\
& - \frac{c_1 f_1}{8\omega_1^2} \sin \gamma_1 - \frac{\sigma_2 f_1}{4\omega_1^2} \cos \gamma_1 \\
& + \frac{3\sigma_1 \omega_2^2}{16\omega_1^2} a_2^2 \cos \gamma_2 \\
& + \frac{\omega_2(8c_2\omega_1 + 3c_1\omega_2 - 6c_2\omega_2)}{32\omega_1^2} a_2^2 \sin \gamma_2
\end{aligned}$$

$$\dot{a}_2 = -\frac{1}{2}c_2 a_2 + \frac{1}{4}(2\omega_1 - \omega_2)a_1 a_2 \sin \gamma_2$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\sigma_1(2\omega_1 - \omega_2)}{8\omega_2} a_1 a_2 \sin \gamma_2 \\
& + \frac{(5\omega_2 - 2\omega_1)f_1}{16\omega_1\omega_2} a_2 \sin(\gamma_1 - \gamma_2) \\
& + \frac{(2c_1\omega_1 + 4c_2\omega_1 - 5c_1\omega_2 - 8c_2\omega_2)}{16\omega_2} a_1 a_2 \cos \gamma_2 \\
a_1 a_2 \dot{\gamma}_2 &= a_2 \left[\sigma_1 a_1 - \left\{ \frac{3\omega_2^2}{8\omega_1} a_2^2 - \frac{1}{2}(2\omega_1 \right. \right. \\
& \left. \left. - \omega_2)a_1^2 \right\} \cos \gamma_2 + \frac{f_1}{2\omega_1} \cos \gamma_1 \right. \\
& \left. - \frac{\omega_2(18\omega_1^3 + 19\omega_1^2\omega_2 - 39\omega_1\omega_2^2 + 26\omega_2^3)}{32\omega_1^2(\omega_1 + 2\omega_2)} a_1 a_2^2 \right. \\
& \left. + \frac{(12\omega_1^4 - 31\omega_1^2\omega_2^2 + 18\omega_1\omega_2^3 + 4\omega_2^4)}{16\omega_1\omega_2(\omega_1 + 2\omega_2)} a_1^3 \right. \\
& \left. - \frac{1}{32\omega_1^2\omega_2} \{4\omega_1^2(2c_1\omega_1 + 4c_2\omega_1 - 5c_1\omega_2 - 8c_2\omega_2)a_1^2 \right. \\
& \left. - \omega_2^2(8c_2\omega_1 + 3c_1\omega_2 - 6c_2\omega_2)a_2^2\} \sin \gamma_2 \right. \\
& \left. + \frac{(c_1^2\omega_2 - 2c_2^2\omega_1)}{8\omega_1\omega_2} a_1 - \frac{\sigma_2 f_1}{4\omega_1^2} \cos \gamma_1 \right. \\
& \left. - \frac{c_1 f_1}{8\omega_1^2} \sin \gamma_1 \right. \\
& \left. + \frac{\sigma_1}{16\omega_1^2\omega_2} \{4\omega_1^2(2\omega_1 - \omega_2)a_1^2 + 3\omega_2^2 a_2^2\} \cos \gamma_2 \right. \\
& \left. - \frac{(5\omega_2 - 2\omega_2)f_1}{8\omega_1\omega_2} a_1 \cos(\gamma_1 - \gamma_2) \right] \quad (25)
\end{aligned}$$

여기서 $\dot{}$ 은 d/dt 이다. 식 (23), (11), (16), (22)를 식 (4)에 대입하고 $O(\varepsilon^3)$ 를 무시하면 다음과 같은 근사해를 얻는다.

$$\begin{aligned}
x &= a_1 \cos(\Omega t - \gamma_1) + \frac{\omega_2^2}{4\omega_1^2} a_2^2 \\
\varphi &= a_2 \cos\left(\frac{\Omega}{2}t - \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2}\right) + \frac{f_2}{(\omega_2^2 - \Omega^2)} \cos(\Omega t) \\
& - \frac{\omega_2(2\omega_1 + \omega_2)}{2\omega_1(2\omega_2 + \omega_1)} a_1 a_2 \cos\left\{\frac{3}{2}\Omega t + \frac{1}{2}(\gamma_2 - 3\gamma_1)\right\} \quad (26)
\end{aligned}$$

식 (25)에서 $\dot{a}_1 = \dot{a}_2 = \dot{\gamma}_1 = \dot{\gamma}_2 = 0$ 인 대수방정식의 해 즉 정상상태해는 $a_2 = 0$, $a_2 \neq 0$ 의 해가 있음을 알 수 있다. 즉

좌표 a 와 γ 로 표현된 자율계 (25)를 직각좌표로 변환하기 위하여 우선 식 (23)을 다음과 같이 쓰기로 하자.

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_1 &= \hat{\sigma}_2 T_1 - \gamma_1 \\ \hat{\beta}_2 &= \frac{1}{2}(\hat{\sigma}_2 - \hat{\sigma}_1)T_1 - \frac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma_2)\end{aligned}\quad (27)$$

식 (27)을 식 (22)에 대입하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}A_1 &= \frac{1}{2}\hat{a}_1 \exp[i(\hat{\sigma}_2 T_1 - \gamma_1)] \\ &= \frac{1}{2}(\hat{p}_1 - i\hat{p}_2) \exp(i\hat{\sigma}_2 T_1) \\ A_2 &= \frac{1}{2}\hat{a}_2 \exp\left[i\left\{\frac{1}{2}(\hat{\sigma}_2 - \hat{\sigma}_1)T_1 - \frac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma_2)\right\}\right] \\ &= \frac{1}{2}(\hat{p}_3 - i\hat{p}_4) \exp\left[i\frac{1}{2}(\hat{\sigma}_2 - \hat{\sigma}_1)T_1\right]\end{aligned}\quad (28)$$

여기서

$$\begin{aligned}\hat{p}_1 &= \hat{a}_1 \cos \gamma_1, & \hat{p}_2 &= \hat{a}_1 \sin \gamma_1 \\ \hat{p}_3 &= \hat{a}_2 \cos \left\{\frac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma_2)\right\}, \\ \hat{p}_4 &= \hat{a}_2 \sin \left\{\frac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma_2)\right\}\end{aligned}\quad (29)$$

그리고 $p_n = \varepsilon \hat{p}_n$ 이며 \hat{p}_n 은 $O(1)$ 이다. 식 (14), (19)를 (20)에 대입하고 식 (28)를 이용하면 다음과 같은 자율상미분방정식을 얻게 된다.

$$\begin{aligned}\dot{p}_1 &= -\frac{1}{2}c_1 p_1 - \sigma_2 p_2 + \frac{3\omega_2^2}{4\omega_1} p_3 p_4 \\ &+ \frac{c_1 f_1}{8\omega_1^2} - \frac{c_1^2}{8\omega_1} p_2 - \frac{3\sigma_1 \omega_2^2}{8\omega_1^2} p_3 p_4 \\ &- \frac{\omega_2(3c_1 \omega_2 + 8c_2 \omega_1 - 6c_2 \omega_2)}{32\omega_1^2} (p_3^2 - p_4^2) \\ &+ \frac{\omega_2(8\omega_1^3 + 14\omega_1^2 \omega_2 - 17\omega_1 \omega_2^2 + 10\omega_2^3)}{32\omega_1^2(\omega_1 + 2\omega_2)} p_2(p_3^2 + p_4^2) \\ \dot{p}_2 &= -\frac{1}{2}c_1 p_2 + \sigma_2 p_1 - \frac{3\omega_2^2}{8\omega_1} (p_3^2 - p_4^2) + \frac{f_1}{2\omega_1} \\ &- \frac{\sigma_2 f_1}{4\omega_1^2} + \frac{c_1^2}{8\omega_1} p_1 + \frac{3\sigma_1 \omega_2^2}{16\omega_1^2} (p_3^2 - p_4^2) \\ &- \frac{\omega_2(3c_1 \omega_2 + 8c_2 \omega_1 - 6c_2 \omega_2)}{16\omega_1^2} p_3 p_4 \\ &- \frac{\omega_2(8\omega_1^3 + 14\omega_1^2 \omega_2)}{32\omega_1^2(\omega_1 + 2\omega_2)} p_1(p_3^2 + p_4^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&+ \frac{\omega_2^3(17\omega_1 - 20\omega_2)}{32\omega_1^2(\omega_1 + 2\omega_2)} p_1 p_3^2 \\ &- \frac{10\omega_2^4}{32\omega_1^2(\omega_1 + 2\omega_2)} p_1 p_4^2 \\ \dot{p}_3 &= -\frac{1}{2}c_2 p_3 - \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1)p_4 \\ &- \frac{1}{4}(2\omega_1 - \omega_2)(p_1 p_4 - p_2 p_3) \\ &+ \frac{(5\omega_2 - 2\omega_1)f_1}{16\omega_1 \omega_2} p_4 - \frac{c_2^2}{8\omega_2} p_4 \\ &- \frac{\sigma_1(2\omega_1 - \omega_2)}{8\omega_2} (p_1 p_4 - p_2 p_3) \\ &+ \frac{(2c_1 \omega_1 + 4c_2 \omega_1 - 5c_1 \omega_2 - 8c_2 \omega_2)}{16\omega_2} (p_1 p_3 + p_2 p_4) \\ &- \frac{\omega_2(10\omega_1^2 - 15\omega_1 \omega_2 + 8\omega_2^2)}{64\omega_1^2} p_4(p_3^2 + p_4^2) \\ &+ \frac{(12\omega_1^4 - 31\omega_1^2 \omega_2^2 + 18\omega_1 \omega_2^3 + 4\omega_2^4)}{32\omega_1 \omega_2(\omega_1 + 2\omega_2)} p_4(p_1^2 + p_2^2) \\ \dot{p}_4 &= -\frac{1}{2}c_2 p_4 + \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1)p_3 \\ &- \frac{1}{4}(2\omega_1 - \omega_2)(p_1 p_3 + p_2 p_4) \\ &+ \frac{(5\omega_2 - 2\omega_1)f_1}{16\omega_1 \omega_2} p_3 + \frac{c_2^2}{8\omega_2} p_3 \\ &- \frac{\sigma_1(2\omega_1 - \omega_2)}{8\omega_2} (p_1 p_3 + p_2 p_4) \\ &+ \frac{(2c_1 \omega_1 + 4c_2 \omega_1 - 5c_1 \omega_2 - 8c_2 \omega_2)}{16\omega_2} (p_2 p_3 - p_1 p_4) \\ &+ \frac{\omega_2(10\omega_1^2 - 15\omega_1 \omega_2 + 8\omega_2^2)}{64\omega_1^2} p_3(p_3^2 + p_4^2) \\ &- \frac{(12\omega_1^4 - 31\omega_1^2 \omega_2^2 + 18\omega_1 \omega_2^3 + 4\omega_2^4)}{32\omega_1 \omega_2(\omega_1 + 2\omega_2)} p_3(p_1^2 + p_2^2)\end{aligned}\quad (30)$$

이 자율계(30)은 자율계(25)와 일치하며 다음의 근사해

$$\begin{aligned}x &= p_1 \cos \Omega t + p_2 \sin \Omega t + \frac{\omega_2^2}{4\omega_1^2} (p_3^2 + p_4^2) \\ \varphi &= p_3 \cos \frac{1}{2} \Omega t + p_4 \sin \frac{1}{2} \Omega t + \frac{f_2}{\omega_2^2 - \Omega^2} \cos \Omega t\end{aligned}$$

$$-\frac{\omega_2(2\omega_1+\omega_2)}{2\omega_1(2\omega_2+\omega_1)}\left\{(p_1p_3-p_2p_4)\cos\left(\frac{3}{2}\Omega t\right)+\right. \\ \left.+(p_1p_4+p_2p_3)\sin\left(\frac{3}{2}\Omega t\right)\right\} \quad (31)$$

는 식 (26)과 일치하는 것이다. 식 (31)의 평형해를 구하기 위하여 $\dot{p}_1 = \dot{p}_2 = \dot{p}_3 = \dot{p}_4 = 0$ 인 대수방정식을 수치적으로 풀기로 한다.

2.2 $\Omega \approx \omega_2$ 인 경우 ($s=2$)

식 (23)과 (24)에 $s=2$ 를 대입하면 다음의 자율상미분방정식(autonomous ordinary differential equation)을 얻게 된다.

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 = & -\frac{1}{2}c_1a_1 - \frac{3\omega_2^2}{8\omega_1}a_2^2\sin\gamma_2 \\ & + \frac{(4\omega_1-3\omega_2)f_2}{16\omega_1^2}a_2\sin(\gamma_1+\gamma_2) \\ & + \frac{3\sigma_1\omega_2^2}{16\omega_1^2}a_2^2\sin\gamma_2 \\ & - \frac{\omega_2(8c_2\omega_1+3c_1\omega_2-6c_2\omega_2)}{32\omega_1^2}a_2^2\cos\gamma_2 \\ a_2\dot{\gamma}_1 = & \sigma_2a_2 - \frac{1}{4}(2\omega_1-\omega_2)a_1a_2\cos\gamma_2 + \frac{f_2}{2\omega_2}\cos\gamma_1 \\ & + \frac{c_2^2}{8\omega_2}a_2 - \frac{\sigma_1(2\omega_1-\omega_2)}{8\omega_2}a_1a_2\cos\gamma_2 \\ & - \frac{\sigma_2f_2}{4\omega_2^2}\cos\gamma_1 - \frac{c_2f_2}{8\omega_2^2}\sin\gamma_1 \\ & + \frac{\omega_2(10\omega_1^2-15\omega_1\omega_2+8\omega_2^2)}{64\omega_1^2}a_2^3 \\ & + \frac{3(2\omega_1-3\omega_2)f_2}{16\omega_2^2}a_1\cos(\gamma_1+\gamma_2) \\ & - \frac{(12\omega_1^4-31\omega_1^2\omega_2^2+18\omega_1\omega_2^3+4\omega_2^4)}{32\omega_1\omega_2(\omega_1+2\omega_2)}a_1^2a_2 \\ & + \frac{(2c_1\omega_1+4c_2\omega_1-5c_1\omega_2-8c_2\omega_2)}{16\omega_2}a_1a_2\sin\gamma_2 \\ \dot{a}_2 = & -\frac{1}{2}c_2a_2 + \frac{1}{4}(2\omega_1-\omega_2)a_1a_2\sin\gamma_2 \\ & + \frac{f_2}{2\omega_2}\sin\gamma_1 \end{aligned}$$

$$+ \frac{(2c_1\omega_1+4c_2\omega_1-5c_1\omega_2-8c_2\omega_2)}{16\omega_2}a_1a_2\cos\gamma_2$$

$$+ \frac{c_2f_2}{8\omega_2^2}\cos\gamma_1$$

$$+ \frac{\sigma_1(2\omega_1-\omega_2)}{8\omega_2}a_1a_2\sin\gamma_2 - \frac{\sigma_2f_2}{4\omega_2^2}\sin\gamma_1$$

$$- \frac{3(2\omega_1-3\omega_2)f_2}{16\omega_2^2}a_1\sin(\gamma_1+\gamma_2)$$

$$a_1a_2\dot{\gamma}_2 = \sigma_1a_1a_2$$

$$- \left\{ \frac{3\omega_2^2}{8\omega_1}a_2^2 - \frac{1}{2}(2\omega_1-\omega_2)a_1^2 \right\} a_2\cos\gamma_2$$

$$- \frac{f_2}{\omega_2}a_1\cos\gamma_1 - \frac{(2c_2^2\omega_1-c_1^2\omega_2)}{8\omega_1\omega_2}a_1a_2$$

$$+ \frac{3\sigma_1\omega_2^2}{16\omega_1^2}a_2^3\cos\gamma_2$$

$$+ \frac{\sigma_2f_2}{2\omega_2^2}a_1\cos\gamma_1 + \frac{\sigma_1(2\omega_1-\omega_2)}{4\omega_2}a_1^2a_2\cos\gamma_2$$

$$- \frac{\omega_2(18\omega_1^3+19\omega_1^2\omega_2-39\omega_1\omega_2^2+26\omega_2^3)}{32\omega_1^2(\omega_1+2\omega_2)}a_1a_2^3$$

$$+ \frac{(12\omega_1^4-31\omega_1^2\omega_2^2+18\omega_1\omega_2^3+4\omega_2^4)}{16\omega_1\omega_2(\omega_1+2\omega_2)}a_1^3a_2$$

$$+ \frac{(4\omega_1-3\omega_2)f_2}{16\omega_1^2}a_2^2\cos(\gamma_1+\gamma_2)$$

$$- \frac{3(2\omega_1-3\omega_2)f_2}{8\omega_2^2}a_1^2\cos(\gamma_1+\gamma_2)$$

$$+ \frac{\omega_2(8c_2\omega_1+3c_1\omega_2-6c_2\omega_2)}{32\omega_1^2}a_2^3\sin\gamma_2$$

$$- \frac{(2c_1\omega_1+4c_2\omega_1-5c_1\omega_2-8c_2\omega_2)}{8\omega_2}a_1^2a_2\sin\gamma_2$$

$$+ \frac{c_2f_2}{4\omega_2^2}a_1\sin\gamma_1 \quad (32)$$

식 (23), (11), (16), (22)를 식 (4)에 대입하면 $O(\epsilon^3)$ 를 무시하면 다음과 같은 근사해를 얻는다.

$$\begin{aligned} x = & a_1\cos(2\Omega t - \gamma_2 - 2\gamma_1) \\ & + \frac{f_1}{\omega_1^2 - \Omega^2}\cos\Omega t + \frac{\omega_2^2}{4\omega_1^2}a_2^2 \end{aligned} \quad (33)$$

$$\varphi = a_2 \cos(\Omega t - \gamma_2) - \frac{\omega_2(2\omega_1 + \omega_2)}{2\omega_1(\omega_1 + 2\omega_2)} a_1 a_2 \cos(3\Omega t - (3\gamma_1 + \gamma_2))$$

자율계 (32)를 직각좌표로 변환하기 위하여 우선 식 (23)을 다음과 같이 쓰기로 하자.

$$\beta_1 = (2\hat{\sigma}_2 + \hat{\sigma}_1)T_1 - (2\gamma_1 + \gamma_2) \\ \beta_2 = \hat{\sigma}_2 T_1 - \gamma_1 \quad (34)$$

식 (34)를 이용하면 식 (22)를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$A_1 = \frac{1}{2}(\hat{p}_1 - i\hat{p}_2) \exp[i(2\hat{\sigma}_2 + \hat{\sigma}_1)T_1] \\ A_2 = \frac{1}{2}(\hat{p}_3 - i\hat{p}_4) \exp(i\hat{\sigma}_2 T_1) \quad (35)$$

여기서

$$\hat{p}_1 = \hat{a}_1 \cos(2\gamma_1 + \gamma_2), \quad \hat{p}_2 = \hat{a}_1 \sin(2\gamma_1 + \gamma_2) \\ \hat{p}_3 = \hat{a}_2 \cos \gamma_1, \quad \hat{p}_4 = \hat{a}_2 \sin \gamma_1 \quad (36)$$

이때 $p_n = \varepsilon \hat{p}_n$ 이며 \hat{p}_n 은 $O(1)$ 이다. 식 (14), (19)를 (20)에 대입하고 식 (35)를 이용하면 다음과 같은 자율상미분방정식을 얻게 된다.

$$\dot{p}_1 = -\frac{1}{2}c_1 p_1 - (2\sigma_2 + \sigma_1)p_2 + \frac{3\omega_2^2}{4\omega_1} p_3 p_4 \\ - \frac{c_1^2}{8\omega_1} p_2 - \frac{3\sigma_1 \omega_2^2}{8\omega_1^2} p_3 p_4 \\ + \frac{(3\omega_2 - 4\omega_1)f_2}{16\omega_1^2} p_4 \\ - \frac{\omega_2(8c_2\omega_1 + 3c_1\omega_2 - 6c_2\omega_2)}{32\omega_1^2} (p_3^2 - p_4^2) \\ + \frac{\omega_2(8\omega_1^3 + 14\omega_1^2\omega_2 - 17\omega_1\omega_2^2 + 10\omega_2^3)}{32\omega_1^2(\omega_1 + 2\omega_2)} p_2(p_3^2 + p_4^2) \\ \dot{p}_2 = -\frac{1}{2}c_1 p_2 + (2\sigma_2 + \sigma_1)p_1 - \frac{3\omega_2^2}{8\omega_1} (p_3^2 - p_4^2) \\ + \frac{(4\omega_1 - 3\omega_2)f_2}{16\omega_1^2} p_3 + \frac{3\sigma_1 \omega_2^2}{16\omega_1^2} (p_3^2 - p_4^2) \\ + \frac{c_1^2}{8\omega_1} p_1 - \frac{\omega_2(8c_2\omega_1 + 3c_1\omega_2 - 6c_2\omega_2)}{16\omega_1^2} p_3 p_4 \\ - \frac{\omega_2(8\omega_1^3 + 14\omega_1^2\omega_2 - 17\omega_1\omega_2^2 + 10\omega_2^3)}{32\omega_1^2(\omega_1 + 2\omega_2)} p_1(p_3^2 + p_4^2)$$

$$\dot{p}_3 = -\frac{1}{2}c_2 p_3 - \sigma_2 p_4 - \frac{1}{4}(2\omega_1 - \omega_2)(p_1 p_4 - p_2 p_3) \\ - \frac{c_2^2}{8\omega_2} p_4 + \frac{c_2 f_2}{8\omega_2^2} \\ + \frac{\sigma_1(2\omega_1 - \omega_2)}{8\omega_2} (p_1 p_4 - p_2 p_3) + \frac{3(3\omega_2 - 2\omega_1)f_2}{16\omega_2^2} p_2 \\ + \frac{(2c_1\omega_1 + 4c_2\omega_1 - 5c_1\omega_2 - 8c_2\omega_2)}{16\omega_2} (p_1 p_3 + p_2 p_4) \\ - \frac{\omega_2(10\omega_1^2 - 15\omega_1\omega_2 + 8\omega_2^2)}{64\omega_1^2} p_4(p_3^2 + p_4^2) \\ + \frac{(12\omega_1^4 - 31\omega_1^2\omega_2^2 + 18\omega_1\omega_2^3 + 4\omega_2^4)}{32\omega_1\omega_2(\omega_1 + 2\omega_2)} p_4(p_1^2 + p_2^2) \\ \dot{p}_4 = -\frac{1}{2}c_2 p_4 + \sigma_2 p_3 - \frac{1}{4}(2\omega_1 - \omega_2)(p_1 p_3 + p_2 p_4) \\ + \frac{f_2}{2\omega_2} - \frac{\sigma_2 f_2}{4\omega_2^2} + \frac{c_2^2}{8\omega_2} p_3 + \frac{3(2\omega_1 - 3\omega_2)f_2}{16\omega_2^2} p_1 \\ + \frac{\sigma_1(2\omega_1 - \omega_2)}{8\omega_2} (p_1 p_3 + p_2 p_4) \\ + \frac{(2c_1\omega_1 + 4c_2\omega_1 - 5c_1\omega_2 - 8c_2\omega_2)}{16\omega_2} (p_2 p_3 - p_1 p_4) \\ + \frac{\omega_2(10\omega_1^2 - 15\omega_1\omega_2 + 8\omega_2^2)}{64\omega_1^2} p_3(p_3^2 + p_4^2) \\ - \frac{(12\omega_1^4 - 31\omega_1^2\omega_2^2 + 18\omega_1\omega_2^3 + 4\omega_2^4)}{32\omega_1\omega_2(\omega_1 + 2\omega_2)} p_3(p_1^2 + p_2^2) \quad (37)$$

이 자율계(37)은 자율계(32)와 일치하며 다음의 근사해

$$x = p_1 \cos 2\Omega t + p_2 \sin 2\Omega t \\ + \frac{f_2}{\omega_1^2 - \Omega^2} \cos \Omega t + \frac{\omega_2^2}{4\omega_1^2} (p_3^2 + p_4^2) \\ \varphi = p_3 \cos \Omega t + p_4 \sin \Omega t \\ - \frac{\omega_2(2\omega_1 + \omega_2)}{2\omega_1(2\omega_2 + \omega_1)} \{ (p_1 p_3 - p_2 p_4) \cos 3\Omega t \\ + (p_1 p_4 + p_2 p_3) \sin 3\Omega t \} \quad (38)$$

는 식 (33)과 일치한다.

3. 수치결과

3.1 $\Omega \approx \omega_1$ 인 경우

이 원경동[13]은 일차근사에 의한 결과 즉 참고문헌[13]의

식(31)의 평형해인 정상상태 주기해의 진폭을 구해 두었으므로 본 연구에서는 이차근사에 의한 결과 즉 이 논문의 식(30)의 평형해를 구하였다.

Fig. 2와 Fig. 3은 정상상태 주기해의 진폭들이 가진진폭 f_1 과 외부이탈변수 σ_2 에 따라 각각 어떻게 변화하는지를 보여주고 있다. 이 두 그림에서 (a)와 (b)는 각각 일차근사와 이차근사에 의한 결과를 나타내고 있으며 그림의 원(o)은 원래계(본논문의 식(1) 혹은 [13]의 식(5))를 직접 수치적분하여 구한 결과 즉 완전해의 진폭을 나타낸다. 이 결과로부터 응답의 진폭에 관한 한, 두 근사방법에 의한 결과가 잘 일치함을 알 수 있다. 따라서 이차근사의 효용성은 두드러지게 나타나고 있지 않다. Fig. 2(a)와 (b)에서는 f_B 에서 Hopf분기가 발생하여 f_1 이 f_B 보다 큰 경우에는 안정한 정상상태 주기응답이 존재하지 않으므로 변조운동과 혼돈운동이 가능하다. Fig 3(a)에서는 a_{22} 의 불안정한 branch와 a_{12} 의 안정한 branch가 짝을 이루어 불안정한 해를 구성하는 반면에, Fig 3(b)에서는 a_{22} 의 불안정한 branch와 짝을 이루는 a_{12} 의 불안정한 branch가 별도로 존재한다는 점이 두 그림의 차이점이다. 두 그림에서 σ_{2c} 와 σ_{2c} 에서는 Hopf분기가 발생하여 $\sigma_{2c} \leq \sigma_2 \leq \sigma_{2c}$ 구간 내에서는 안정한 정상상태 주기응답이 존재하지 않으므로 변조운동과 혼돈운동이 가능함을 알 수 있다.

f_1 이 f_B 보다 큰 경우에 대해서는 이원경동[13]은 일차근사에 의한 근사화계([13]의 식(31))의 평형해가 불안정해지는 반면 새로운 안정한 주기해가 발생하고 이 주기배가분기를 거둬들이어 결국 혼돈운동에 도달함을 보여주었다. 이를 위해, 위상공간(p 공간)내에서의 근사화계의 여러 정상상태해의 Poincaré map을 얻기 위하여 단면을 $p_2 = -0.5p_1 + 0.0004$ 로 구성하였다. 이 map에서의 p_1 좌표와 가진진폭 f_1 과의 관계를 그린 Fig. 4(a)는 분기도(bifurcation diagram)를 나타내고 있다. 한편 이차근사에 의한 근사화계(본연구의 식(30))에 대해서도 같은 단면에 의한 Poincaré map으로부터 구한 분기도가 Fig. 4(b)에 나타나 있다. 언뜻 보기에 이 두 그림은 매우 흡사해 보이지만 자세히 관찰해 보면 Fig. 4(a)에서는 f_1 이 0.0005보다 약간 작은 곳에서 주기해가 존재하는, 비교적 넓은 f_1 영역을 가지는 반면에 Fig. 4(b)에서는 f_1 이 0.0005보다 약간 큰 곳에서 주기해가 존재하는, 비교적 넓은 f_1 영역을 가짐을 알 수 있다. 그 외에도 주기해가 존재하는 f_1 영역의 위치가 다를 수 있다.

해의 초기조건에 대한 민감도를 확인해 보기 위하여 가장 큰 Lyapunov지수를 구하였다. Fig. 5(a), (b), (c)는 각각 일차근사에 의한 근사화계, 이차근사에 의한 근사화계, 원

래계의 정상상태 해로부터 구한 Lyapunov지수를 보여주고 있다. Fig. 5(a), (b)를 Fig. 4(a), (b)와 각각 비교해보면 주기해가 존재하는 영역에서 이 Lyapunov지수가 0이 됨을 알 수 있다. 이제 이 연구의 본질은 이 이차근사에 의한 결과(Fig. 5(b))가 일차근사에 의한 결과(Fig. 5(a))에 비해 원래계의 결과(Fig. 5(c))와 얼마나 더 잘 일치하느냐에 놓여 있다. 전반적으로 Fig. 5(a)도 Fig. 5(c)와 잘 일치하긴 하지만 Fig. 5(c)에서도 f_1 이 0.0005보다 약간 큰 값에서 Lyapunov 지수값이 0이 되어 주기해의 존재를 암시해 준다는 점에서 Fig. 5(a)보다는 Fig. 5(b)가 Fig. 5(c)와 잘 일치함을 알 수 있다. 따라서 이차근사해가 계의 혼돈응답을 예측하는 데도 매우 유효하다고 말할 수 있다.

3.2. $\Omega \approx \omega_2$ 인 경우

이 원경동[13]은 일차근사에 의한 결과 즉 참고문헌[13]의 식(40)의 평형해인 정상상태 주기해의 진폭을 구해 두었으므로 본 연구에서는 이차근사에 의한 결과 즉 이 논문의 식(37)의 평형해를 구하였다.

Fig. 6와 Fig. 7은 정상상태 주기해의 진폭들이 가진진폭 f_2 와 외부이탈변수 σ_2 에 따라 각각 어떻게 변화하는지를 보여주고 있다. 이 두 그림에서 (a)와 (b)는 각각 일차근사와 이차근사에 의한 결과를 나타내고 있으며 그림의 원(o)은 원래계(본논문의 식(1) 혹은 [13]의 식(5))를 직접 수치적분하여 구한 결과 즉 완전해의 진폭을 나타낸다. Fig. 6(a)와 (b)에서는 f_A 에서 Hopf분기가 발생하여 f_2 가 f_A 보다 큰 경우에는 안정한 정상상태 주기응답이 존재하지 않으므로 변조운동과 혼돈운동이 가능하다. Fig. 7(a)와 (b)에서 보시다시피 σ_{2c} 와 σ_{2c} 에서는 Hopf분기가 발생하여 $\sigma_{2c} \leq \sigma_2 \leq \sigma_{2c}$ 구간내에서는 안정한 정상상태 주기응답이 존재하지 않으므로 변조운동과 혼돈운동이 가능함을 알 수 있다. Fig. 7(a)와 (b)를 비교하면 a_{22} 즉 가진모드의 진폭이 서로 다름을 알 수 있으며 이차근사결과가 완전해에 더 잘 일치함을 알 수 있다.

f_2 가 f_A 보다 큰 경우에 대해서는 이원경동[13]은 일차근사에 의한 근사화계([13]의 식(40))의 평형해가 불안정해지는 반면 새로운 안정한 주기해가 발생하고 이 주기배가분기를 거둬들이어 결국 혼돈운동에 도달함을 보여주었다. 이를 위해, 위상공간(p 공간)내에서의 근사화계의 여러 정상상태해의 Poincaré map을 얻기 위하여 단면을 $p_2 = -0.2p_1 + 0.037$ 로 구성하였다. 이 map에서의 p_1 좌표와 가진진폭 f_2 와의 관계를 그린 Fig. 8(a)는 분기도(bifurcation diagram)를 나타내고 있다. 한편 이차근사에 의한 근사화계(본연구의 식(37))에 대해서도 같은 단면에 의한 Poincaré map으로부터 구한 분기도가 Fig. 8(b)에 나

타나 있다. 이차근사에 의한 결과 (Fig. 8(b))는 다음의 세가지 측면에서 일차근사에 의한 결과 (Fig. 8(a))와는 현저한 차이가 있다. 첫째, 주기배가분기에 이어 혼돈운동이 처음으로 발생하는 f_3 의 값(0.8근방)이 다르며 둘째, 혼돈운동이 발생하는 f_3 영역사이에서 주기해가 존재하는 f_3 영역의 크기와 위치가 다르며 셋째, $0.85 < f_3 < 1.0$ 에서 Fig. 8(b)에서는 p_3 가 존재한다는 점이다.

해의 초기조건에 대한 민감도를 확인해 보기 위하여 가장 큰 Lyapunov지수를 구하였다. Fig. 9(a), (b), (c)는 각각 일차근사에 의한 근사화계, 이차근사에 의한 근사화계, 원래계의 정상상태 해로부터 구한 Lyapunov 지수를 보여주고 있다. Fig. 9(a), (b)를 Fig. 8(a), (b)와 각각 비교해보면 주기해가 존재하는 영역에서 이 Lyapunov 지수가 0이 됨을 알 수 있다. 또한 원래계로부터 구한 결과(Fig. 9(c))는 다음의 세가지 측면에서 일차근사에 의한 결과(Fig. 9(a))보다는 이차근사에 의한 결과(Fig. 9(b))와 더 잘 일치함을 알 수 있다. 그 세가지 측면이란 첫째, 혼돈운동이 처음으로 발생하는 f_3 의 값(0.8근방), 둘째, $f_3=1.0$ 을 전후하여 주기해가 존재하는 f_3 영역의 크기와 위치, 셋째, f_3 가 1.0보다 큰 영역에서의 Lyapunov지수의 크기 등이다. 이상의 결과로부터 $\Omega \approx \omega_1$ 인 경우보다는 $\Omega \approx \omega_2$ 인 경우에 이차근사의 효용성이 더 현저하다고 말할 수 있다.

4. 결론

고차근사가 혼돈운동에 미치는 영향을 조사하기 위하여 비선형문제의 전형인 탄성진자계를 집중적으로 조사하였다. 조화가진력을 가진 탄성진자계는 비자유계(원래계)로 나타나는데 다중시간범을 사용하여 이 계를 이차근사에 의한 자유계(근사화계)로 변환하였다. 점근해의 초기조건에 대한 민감도의 척도인 Lyapunov지수를 통하여 비교해 본 결과, 이차근사에 의한 근사화계가 일차근사에 의한 근사화계보다 원래계를 더 잘 반영하고 있음을 확인하였다. 이로써 고차근사가 정상상태 주기응답 뿐만 아니라 혼돈응답을 더 정확하게 예측하는 데도 유용함을 알 수 있었다.

참고문헌

[1] Miles, J., 1984, "Resonant Motion of a Spherical Pendulum", *Physica* 11D, 309-323.
 [2] Miles, J., 1984, "Resonantly Forced Motion of Two Quadratically Coupled Oscillators", *Physica* 13D, 247-260.
 [3] Tousi, S. and Bajaj, A. K., 1985, "Period-Doubling Bifurcations and Modulated Motions in Forced Mechanical Systems", *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 52, 1985, 446-452.

[4] Maewal, A., 1986, "Chaos in a Harmonically Excited Elastic Beam", *ASME Journal of Applied Mechanics*, 53, 625-632.
 [5] Nayfeh, A. H., 1987, "Parametric Excitation of Two Internally Resonant Oscillators", *Journal of Sound and Vibration*, 119(1), 95-109
 [6] Nayfeh, A. H. and Raouf, R. A., 1987, "Nonlinear Forced Response of Infinitely Long Circular Cylindrical Shells", *ASME Journal of Applied Mechanics*, 54, 571-577.
 [7] Nayfeh, A. H. and Raouf, R. A. and Nayfeh, J. F., 1991, "Nonlinear Response of Infinitely Long Circular Cylindrical Shells to Subharmonic Radial Loads", *ASME Journal of Applied Mechanics*, 58, 1033-1041.
 [8] Nayfeh, T. A., Asrar, W. and Nayfeh, A. H., 1992, "Three-Mode Interactions in Harmonically Excited Systems with Quadratic Nonlinearities", *Nonlinear Dynamics* 3, 385-401.
 [9] Nayfeh, A. H., Balachandran, B., Colbert, M. A. and Nayfeh, M. A., 1989, "An Experimental Investigation of Complicated Responses of a Two-degree-of Freedom Structure", *ASME Journal of Applied Mechanics*, 56, 960-967.
 [10] Nayfeh, A. H. and Zavodney, L. D., 1988, "Experimental Observation of Amplitude- and Phase-Modulated Responses of Two Internally Coupled Oscillators to a Harmonic Excitation", *ASME Journal of Applied Mechanics*, 55, 706-710.
 [11] Nayfeh, A. H. and Balachandran, B., 1990, "Experimental Investigation of Resonantly Forced Oscillations of a Two-Degree-of Freedom Structure", *International Journal of Nonlinear Mechanics*, 25(2/3), 199-209.
 [12] Nayfeh, A. H., Balachandran, B., 1989, "Modal Interactions in Dynamical and Structural System", *Applied Mechanics Review*, 42(11), part 2, s175-s210.
 [13] 이원경, 박해동, C. S. Hsu, 1993, "근사화계의 혼돈운동이 원래계의 혼돈운동을 보장하는가?", 한국소음진동공학회, 추계학술대회논문집, pp. 61-75.
 [14] Lee, W. K., and C. S. Hsu, 1994, "A Global Analysis of a Harmonically Excited Spring-Pendulum System with Internal Resonance", *Journal of Sound and Vibration*, 171(3), pp. 335-359.
 [15] Nayfeh, A. H., 1973, *Perturbation Methods*. John

Wiley & Sons.

- [16] Rahman, Z. and Burton, T. D., 1989, "On Higher Order Methods of Multiple Scales in Non-linear Oscillations-Periodic Steady State Response", *Journal of Sound and Vibration*, 133, 369-379.
- [17] Christopher L. Lee and Noel C. Perkins, 1992, "Nonlinear Oscillations of Suspended Cables Containing a Two-to-One Internal Resonance", *Nonlinear Dynamics* 3, 465-490.

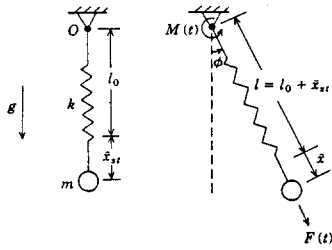


Fig. 1 A harmonically excited spring-pendulum system.

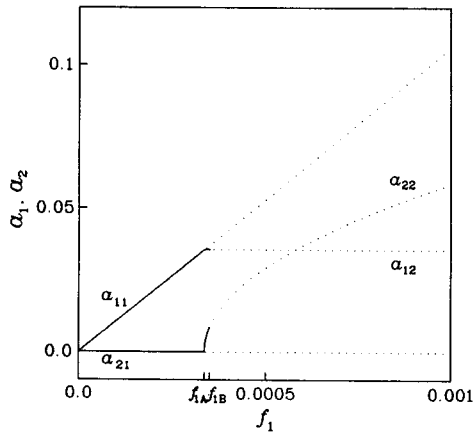
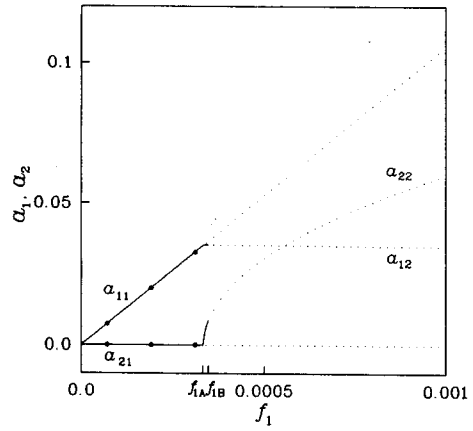


Fig. 2 Modal amplitudes as functions of the amplitude of the excitation, f_1 , for $(\omega_1, \sigma_1, \sigma_2, c_1, c_2, f_2) = (1.0, 0.03, 0.004, 0.005, 0.005, 0.0)$, —, stable; ---, unstable. When $\Omega \approx \omega_1$.

(a) The first-order approximation[13].



(b) The second-order approximation.

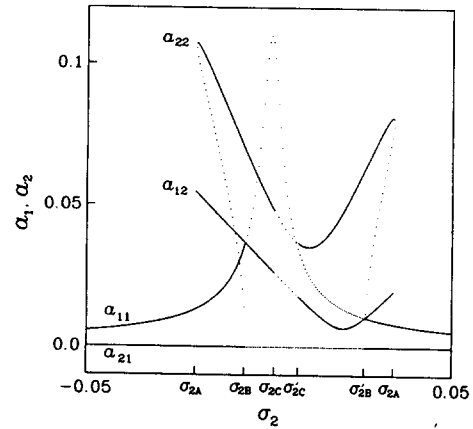
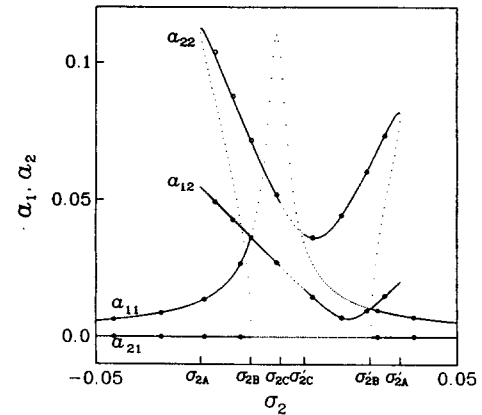


Fig. 3 Modal amplitudes as functions of external detuning parameter, σ_2 , for $(\omega_1, \sigma_1, c_1, c_2, f_1, f_2) = (1.0, 0.02, 0.005, 0.005, 0.00055, 0.0)$, —, stable; ---, unstable. When $\Omega \approx \omega_1$.

(a) The first-order approximation[13].



(b) The second-order approximation.

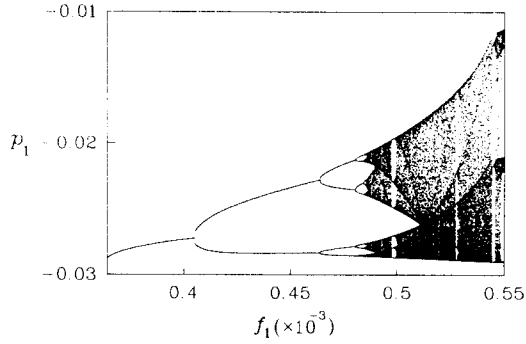
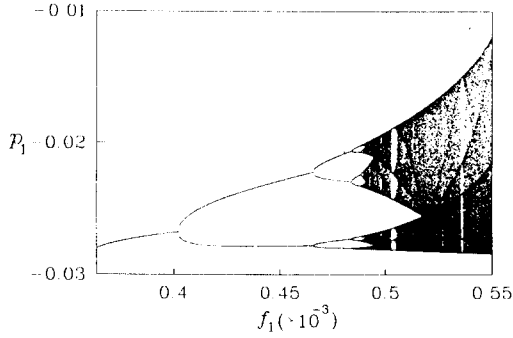


Fig. 4 Bifurcation diagram for the Poincaré map of solutions. When $\Omega \approx \omega_1$.

(a) The first-order approximation[13].



(b) The second-order approximation.

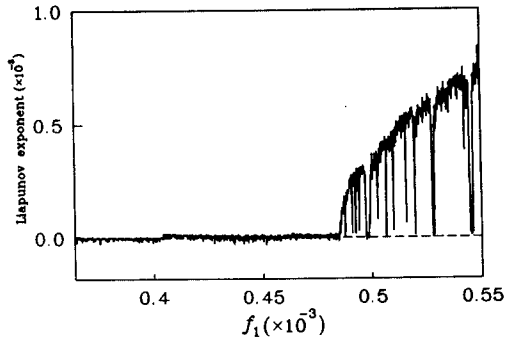
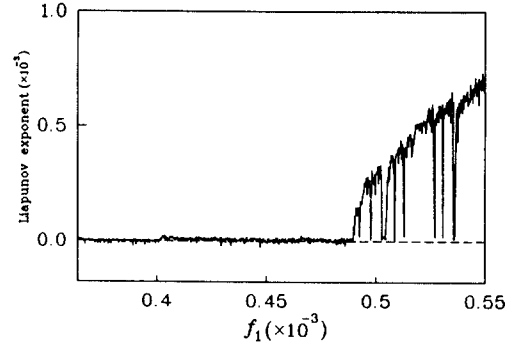
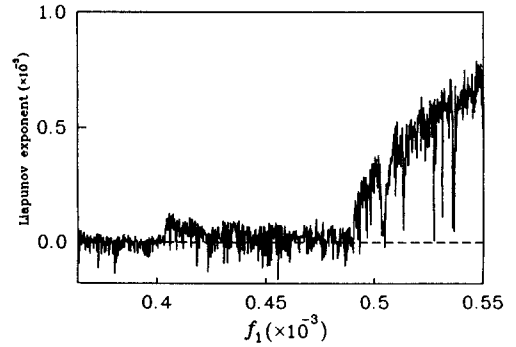


Fig. 5 Lyapunov exponent versus f_1 for the solutions. When $\Omega \approx \omega_1$.

(a) The first-order approximation[13].



(b) The second-order approximation.



(c) The original system.

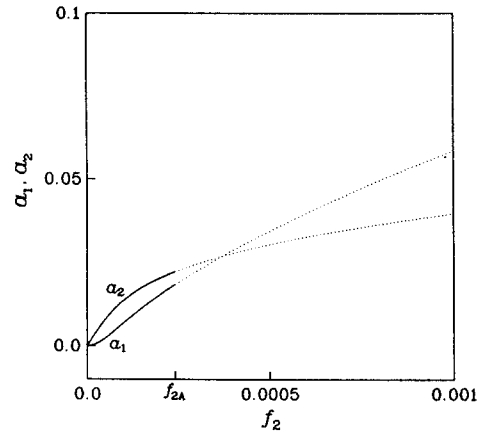
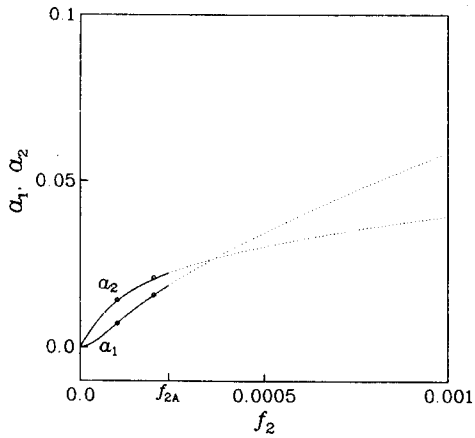


Fig. 6 Modal amplitudes as functions of the amplitude of the excitation, f_2 , for $(\omega_2, \sigma_1, \sigma_2, c_1, c_2, \hat{f}) = (0.5, -0.01, 0.005, 0.005, 0.005, 0.0)$, —, stable; ---, unstable. When $\Omega \approx \omega_2$.

(a) The first-order approximation[13].



(b) The second-order approximation.

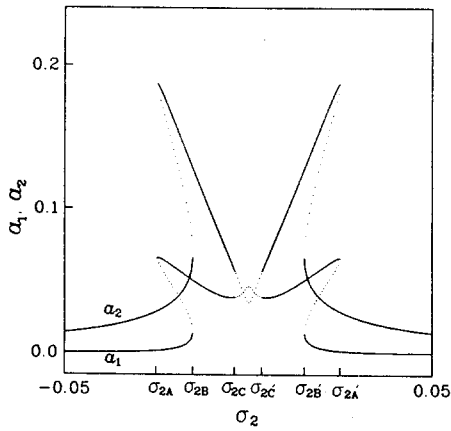
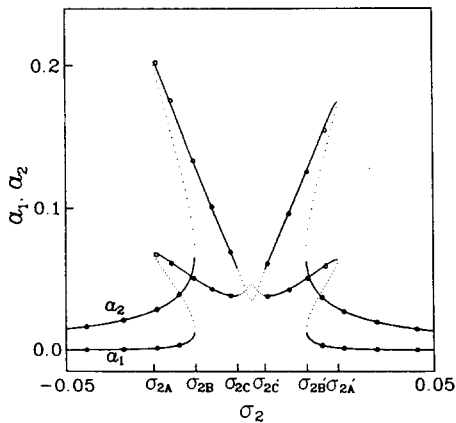


Fig. 7 Modal amplitudes as functions of external detuning parameter, σ_2 , for $\{\omega_2, \sigma_1, c_1, c_2, f_1, f_2\} = (0.5, 0.0, 0.0005, 0.0005, 0.0, 0.0007)$, —, stable; ---, unstable. When $\Omega \approx \omega_2$.

(a) The first-order approximation[13].



(b) The second-order approximation.

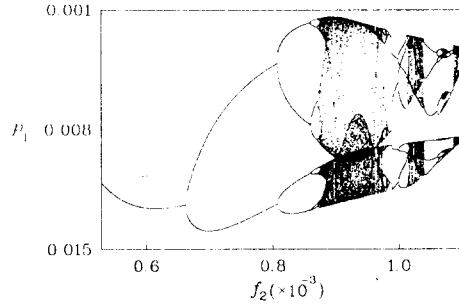
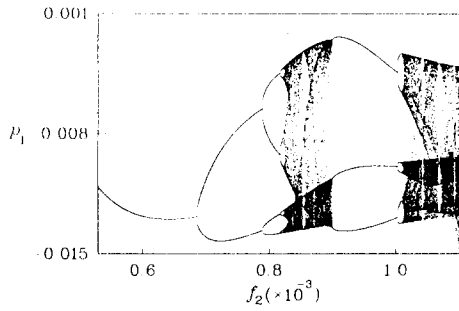


Fig. 8 Bifurcation diagram for the Poincaré map of solutions. When $\Omega \approx \omega_2$.

(a) The first-order approximation[13].



(b) The second-order approximation.

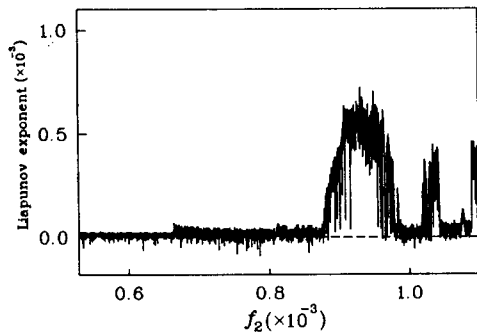
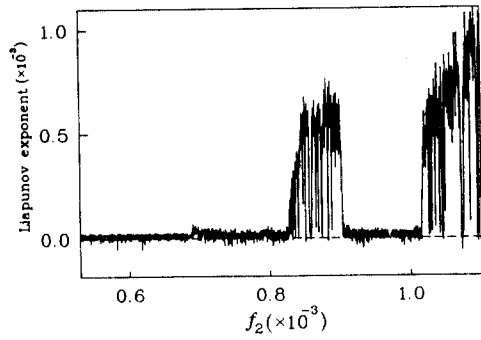
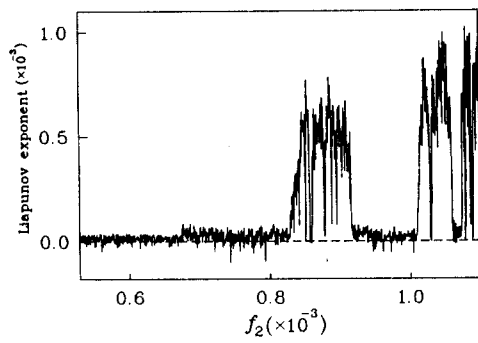


Fig. 9 Lyapunov exponent versus f_2 for the solutions. When $\Omega \approx \omega_2$.

(a) The first-order approximation[13].



(b) The second-order approximation.



(c) The original system.