

# 배기계 진동해석에서의 굴곡부 모델링 기법

김윤영\*, 이장명\*\*, 김영호\*\*, 김진홍\*

## (The Bend Modelling Technique in the Vibration Analysis of the Exhaust System)

(Yoon Young Kim, Chang Myung Lee, Young Ho Kim, Jin Hong Kim)

### 1. 서론

승용차 엔진 진동이 차체에 전달되는 경로는 다양하다. 이러한 여러 경로 중에서 엔진배기계가 실내소음과 차체진동에 끼치는 영향은 엔진출력의 증가와, 차량의 전류구동화 추세에 따라 더욱 중요하게 인식되고 있다. 따라서 차체 설계시 엔진 배기계의 진동이 차체에 전달되는 것을 최소화하기 위한 노력의 일환으로 배기계를 차체에 매다는 행거(hanger)의 최적위치를 결정하기 위한 노력도 경주되고 있다.<sup>(1)</sup>

이를 위해서는 배기계의 자유진동 및 강제진동해석을 수행하여 필요한 데이터(고유진동수, 모드 등)를 얻어야 하는데, 전체 배기계를 셀 등과 같은 구조요소를 이용하여 상세하게 모델링하기 보다는 보, 집중질량, 스프링 등과 같이 비교적 간단한 구조요소로 모델링하여 계산시간도 단축하고 해석모델링 변경 및 수정을 용이하게 하는것이 매우 중요하다. 통상적으로는 배기계의 형상은 CAD데이터를 이용하고, 물성치는 실험이나 도면을 통해 얻게 된다. 또한 모델링시 발생할 수 있는 질량의 차이는 집중질량을 이용하여 모델링 한다. 배기계의 구조를 보면 대체로 3개의 구조로 구성되어 있는데(다기관은 제외), 촉매 전환장치(Catalyst Converter) 예소음기(pre-silencer), 그리고 머플러(muffler, 또는 Main Silencer)를 포함한 중공의 얇은 파이프 구조들로 구성된다.

이러한 파이프 구조는 직선부와 굴곡부로 만들어지는데 굴곡부를 직선부와 동일하게 보모델링하면 실제의 구조보다

훨씬 낮은 유연성을 갖게되어, 계산된 고유진동수가 실제값보다 매우 높게 평가된다. 굴곡부의 유연성을 계산한 논문들을<sup>(2-10)</sup> 살펴보면 이들 대부분은 복잡한 셀 방정식을 유한요소해석이나 이론적 방법을 도입하여 해석한 것으로 주 관심사는 정적문제에서의 최대 응력을 구하는 것이다. 이러한 연구결과로부터 굴곡부의 유연성을 평가할 수 있으나, 해석방법이 실제 현장에서 쓰기에는 너무 복잡하고 많은 제약조건이 따른다. 따라서 현장의 엔지니어들이 손쉽게 접근할 수 있고, 이론적으로 타당한 굴곡부 모델링 기법의 개발이 매우 중요하게 됨을 알 수 있다.

굴곡부 이외에도 배기계 모델링시 주의를 요하는 부위는 벨로즈(Bellows) 등이 있는데 본 연구에서는 굴곡부의 모델링 기법만을 중점적으로 다루고자 한다. 본 논문에서는 변형에너지개념을 이용한 굴곡부의 보모델링 기법을 제시하고자 하는데, 그 기법자체가 비교적 간단하여 현장의 엔지니어들이 실제문제에 적용할 수 있도록 하였다. 이를 위해 예소음기(pre-silencer)를 갖는 중앙파이프부재에 대해서만 해석을 수행한 후 실험과 비교 검토하였다. 이 중앙파이프를 연구대상으로 삼는 이유는 이 부재의 모델링시 굴곡부 이외 부분의 모델링이 대체로 평이하고 굴곡부의 올바른 모델링의 중요성을 명확하게 인식할 수 있기 때문이다.

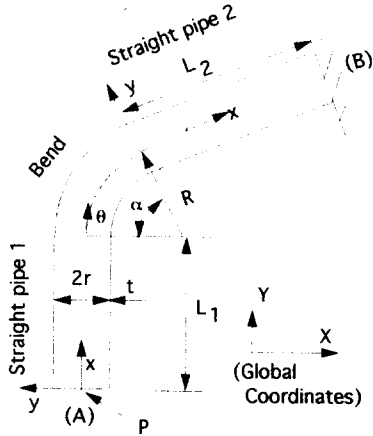
### 2. 모델링 기법

서론에서도 언급한 바와 같이 굴곡부를 포함한 배기계를 셀 등과 같이 상세모델링을 수행하면 상당히 정확한 결과를 얻을 수 있으나 계산 및 모델링 효율성을 위해 보모델링을

\*서울 대학교 기계설계학과

\*\*기아 자동차

우선적으로 고려하게 한다. 따라서, 본 절에서는 굴곡부를 보로 모델링할 때 그 굴곡부의 유연성을 바르게 평가하여 모델링하는 기법을 다음의 그림 1에서 살펴보고자 한다. 특히 실제해석을 수행하는 엔지니어들이 비교적 손쉽게 사용할 수 있고, 이론적으로 타당한 효율적 기법을 제안하고자 한다.



- thickness =  $t$
- Young's Modulus =  $E$
- Radius of Bend =  $R$
- Bend Angle =  $\alpha$
- Radius of Straight Pipes =  $r$
- Length of Straight Pipes =  $L_1, L_2$

그림 1. 굴곡부를 갖는 파이프 구조물

만약 그림 1에 있는 얇은 파이프를 보요소로 모델링하게 되면 파이프의 모든 단면 크기가 같으므로 굴곡부를 포함한 모든 보요소의 단면특성치  $I_y, I_z, J$ 는 다음과 같으며

$$I_y = \pi r^4, I_z = \pi r^4, J = I_y + I_z = 2\pi r^4 \quad (1)$$

여기서  $x, y, z$ 는 그림 1에서처럼 각 단면에 정의된 국부좌표계이며  $I_y, I_z$ 는 휨강성에 관련된 단면특성치이며,  $J$ 는 비틀림강성에 관련된 단면특성치이다.

실제로 그림 1과 같이 휘어진 파이프를 셸로 모델링한 유한요소 진동해석 결과와 보로 모델링한 유한요소 진동해석 결과를 비교해 보면 고유진동수에서 상당히 차이가 남을 알 수 있는데, 그 주 원인은 굴곡부위의 곡률에 의해 실제 굴곡

부가 단순히 직선보로 가정된 굴곡부위보다 훨씬 더 큰 유연성을 갖게 되기 때문이다. 따라서 그림 1과 같은 구조를 단순히 직선보로 가정하면 매우 부정확한 결과를 얻게 되므로 굴곡부의 단면특성치(휨강성, 비틀림 강성에 관련된 값)를 적절히 수정해 주어야 하는데, 본 논문에서는 정적하중에 의해 저장되는 변형에너지 개념을 이용하고자 한다. 즉, 상세 셸모델링에 의해 그림 1의 구조에 저장되는 변형에너지와, 통상의 보 모델링에 의해 그림 1의 구조에 저장되는 변형에너지가 같도록 굴곡부의 강성값을 수정하고자 한다.

이 과정을 수행하기 위해 먼저 그림 1의 파이프를 셸로 상세 모델링한 후 끝단(B)를 고정하고, 또다른 단(A)의 중심에 3방향의 정적모멘트  $M_x, M_y, M_z$ 를 (여기서  $x, y, z$ 의 방향은 끝단 A에서 설정된 국부좌표계의 방향이다) 가한다. 이에 대한 모델링은 자유단인 A의 단면 중심에 한 점(P)을 도입하고, 이 점과 A 단면의 셸 원주상에 있는 유한요소절점을 강체보(rigid bar)로 연결하는데, NASTRAN의 RBE2 요소를 사용하였다. 이때 A의 중심점 P에서 모멘트가 가해지는 방향으로의 회전각을 셸 유한요소해석으로 얻게되면 이 값으로부터 전체 구조물에 저장된 전체 변형에너지를 구할 수 있다.

실제 수치해석은 NASTRAN을 사용하였고, P에 가해지는 모멘트의 조합이 각각 ( $M_z = M_3, M_x = M_y = 0$ ) ( $M_y = M_2, M_x = M_z = 0$ ) ( $M_x = M_1, M_y = M_z = 0$ )인 3 경우에 대해 해석을 수행하였다. 먼저 가장 간단한 경우인 ( $M_z = M_3, M_x = M_y = 0$ )의 경우에 대해서 살펴보자. 셸모델링된 그림 1의 구조에 모멘트  $M_3$ 를 가할 때, 저장된 총 변형에너지는 다음과 같다.

$$E_{shell} = \frac{1}{2} M_3 \phi_3 \quad (2)$$

여기서  $\phi_3$ 은 P 점에  $M_3$ 만을 가했을 때 그점에서  $z$ 방향으로의 회전각을 나타낸다.

만약, 직선부와 굴곡부 모두에 대해 직선보에서 사용되는 단면특성치를 적용하여 보모델링을 수행하면 이때 저장되는 총 변형에너지가 식(2)에서 구해진 저장변형에너지보다 상당히 적게 나타남을 알 수 있다.(경계조건 및 하중조건은 셸해석시와 동일함) 따라서 변형에너지 관점에서 식(2)로 표시된 에너지와 보모델링에 의한 에너지가 같도록 굴곡부의

강성을 조정한다. P점에서  $M_z$  만이 0이 아닌 하중상태에 대해서는 보 모델링에 의한 변형에너지가 강성값  $EI_z$  값으로 표시되므로 이 해석을 통해 그 값을 수정할 수 있다. 이렇게 하여 얻어진 굴곡부의 강성값을  $(EI_z)^*$ 로 표시하며, 나머지 직선부에 대해서는 식(1)의 값을 그대로 활용한다.

지금부터  $(EI_z)^*$  를 구하는 구체적인 절차를 살펴보자. 먼저 보 이론에 의해 저장한 총 변형에너지  $E_{Beam}$  를 구하기 위해 모든 보에서의 굽힘모멘트가  $M_y$  로 일정하다는 사실을 이용하자 :

$$E_{Beam} = \int_0^{L_1} \frac{1}{2} \frac{M_y^2}{EI_z} dx + \int_0^{\alpha} \frac{1}{2} \frac{M_y^2}{(EI_z)^*} R d\theta + \int_0^{L_2} \frac{1}{2} \frac{M_y^2}{EI_z} dx$$

$$= \frac{1}{2} \frac{M_y^2}{EI_z} (L_1 + L_2) + \frac{M_y^2}{2(EI_z)^*} R\alpha \quad (3)$$

식(2)와 식(3)이 같아야 한다는 조건으로부터  $(EI_z)^*$  를 구할 수 있다.

$$\left[ \frac{\phi_2}{M_2} \right]_{at A} = \left[ \frac{L_1 + L_2}{EI_z} + \frac{R\alpha}{(EI_z)^*} \right] \quad (4)$$

다음으로 P에 가해진 모멘트가 ( $M_y = M_2$ ,  $M_x = M_z = 0$ )인 경우에 해석을 수행해 보자. 먼저 쉘 해석에 의해 계산되는 저장변형에너지는 식(2)와 유사하게 A의 중심점에서 가해진 모멘트  $M_2$ 와 그 점에서 y 방향으로 측정된  $\phi_2$ 의 향으로 표시된다.

$$E_{Shell} = \frac{1}{2} M_2 \phi_2 \quad (5)$$

이 경우에 대해 보 모델링했을 때의 저장에너지를 구하기 위해서 그림 2의 자유물체도를 살펴보자.

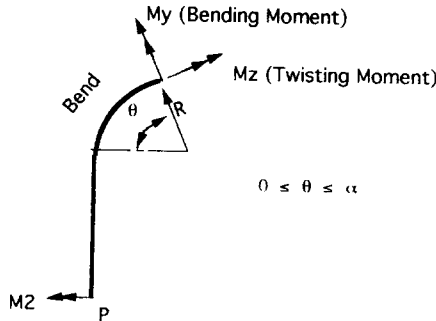


그림 2. 끝단 P의 중심에 모멘트  $M_y = M_2$  가해졌을 때의 굴곡부의 자유물체도

그림 2로부터 굴곡부의 비틀림모멘트  $M_x$ 와 굽힘모멘트  $M_y$ 를 구하면

$$M_y = M_2 \cos \theta ; M_x = M_2 \sin \theta \quad (0 \leq \theta \leq \alpha) \quad (6)$$

또한 직선파이프 1에서는

$$M_y = M_2 ; M_x = 0 \quad (7)$$

직선파이프 2에서는 다음과 같이 간단한 식으로 표시된다.

$$M_y = M_2 \cos \alpha ; M_x = M_2 \sin \alpha \quad (8)$$

식(6, 7, 8)을 이용하여 보이론에 의해 저장되는 총 변형에너지  $E_{Beam}$ 를 구하면 다음과 같다.

$$E_{Beam} = E_{Pipe 1} + E_{Bend} + E_{Pipe 2}$$

$$= \int_0^{L_1} \frac{1}{2} \left( \frac{M_y^2}{EI_y} + \frac{M_z^2}{GJ} \right) dx + \int_0^{\alpha} \frac{1}{2} \left( \frac{M_y^2}{(EI_y)^*} + \frac{M_z^2}{(GJ)^*} \right) R d\theta + \int_0^{L_2} \frac{1}{2} \left( \frac{M_y^2}{EI_y} + \frac{M_z^2}{GJ} \right) dx$$

$$= \frac{M_2^2}{2} \left[ \frac{L_1 + L_2 \cos^2 \alpha}{EI_y} + \frac{L_2 \sin^2 \alpha}{GJ} \right] + \frac{M_2^2}{2} \left[ \frac{R(2\alpha + \sin 2\alpha)}{4(EI_y)^*} + \frac{R(2\alpha - \sin 2\alpha)}{4(GJ)^*} \right] \quad (9)$$

이제 식(5)와 식(9)가 같다는 조건으로부터 다음의 식을 얻는다.

$$\left[ \frac{\phi_2}{M_2} \right]_{at A} = \frac{L_1 + L_2 \cos^2 \alpha}{EI_y} + \frac{L_2 \sin^2 \alpha}{GJ} + \frac{R}{(EI_y)^*} \left( \frac{\alpha + \sin 2\alpha}{2} \right) + \frac{R}{(GJ)^*} \left( \frac{\alpha - \sin 2\alpha}{2} \right) \quad (10)$$

마지막으로 P에 ( $M_x = M_1$ ,  $M_y = M_z = 0$ )가 가해진 경우에도 식(10)을 얻을 때 사용되는 절차를 적용하면 다음 식을 유도할 수 있다.

$$\left[ \frac{\phi_1}{M_1} \right]_{at A} = \frac{L_1 + L_2 \cos^2 \alpha}{GJ} + \frac{L_2 \sin^2 \alpha}{EI_y} + \frac{R}{(EI_y)^*} \left( \frac{\alpha - \sin 2\alpha}{2} \right) + \frac{R}{(GJ)^*} \left( \frac{\alpha + \sin 2\alpha}{2} \right) \quad (11)$$

최종적으로 굴곡부의 수정된 강성값  $(EI_y)^*$ 와  $(GJ)^*$ 는 식(10)과 (11)을 연립하여 구할 수 있다.

이 점에서 제시된 기법은 정적해석을 통해, 굴곡부의 강성을 수정하였기 때문에 비교적 낮은 고유진동수 영역에 적용된다. 만약 굴곡부가 있는 파이프를 쉘 요소에 의한 동적 유한요소해석 결과와 보 요소에 의한 동적 유한요소해석 결

과를 활용한다면 좀 더 정확한 결과를 얻을 수 있을 것이다. 그러나 이 해석자체가 상당한 노력과 시간을 요하고, 재현성이 어렵다고 판단되므로 본 연구에서는 중요한 물리적 특성만을 고려하여 간단하면서, 상당히 정확한 결과를 얻을 수 있는 기법을 제시하였다.

### 3. 수치예제

2절에서 제안한 해석기법을 실제 배기계 적용하기 전에 먼저 다음과 같은 데이터값을 갖는 그림 1의 파이프구조물에 대해 적용해 보았다.

$$L_1 = L_2 = 1000\text{mm}, R = 120\text{mm}, r = 25.4\text{mm},$$

$$t = 1.6\text{mm}, \alpha = 77.32^\circ,$$

$$E = 2 \times 10^5 \text{ N/mm}^2, \nu = 0.3, \rho = 8 \times 10^{-5} \text{ kg/mm}^3$$

상기의 데이터로부터 직선 파이프의 단면특성치를 구하면 다음과 같다.

$$I_y = I_z = 82370.35\text{mm}^4; J = 164740.70\text{mm}^4 \quad (12)$$

(Shear Correction Factor  $k = 0.6047$ )

먼저 정적해석을 수행하였는데, 그림 1의 파이프구조물은 쉘로 모델링하되 (B)를 고정하고 (A)에서  $M_1, M_2, M_3$ 를 차례로 가하는 경우 각각에 대해 NASTRAN을 사용하여 다음과 같은 값을 얻었다.

$$\frac{\Phi_1}{M_1} = 1.735 \times 10^{-7} \text{ (Rad / N}\cdot\text{mm)}$$

$$\frac{\Phi_2}{M_2} = 1.776 \times 10^{-7} \text{ (Rad / N}\cdot\text{mm)} \quad (13)$$

$$\frac{\Phi_3}{M_3} = 1.719 \times 10^{-7} \text{ (Rad / N}\cdot\text{mm)}$$

식(13)의 결과를 식(4, 10, 11)에 대입하면 굴곡부의 수정된 보 강성값  $(E, I_y)^*, (E, I_z)^*, (G, J)^*$ 를 구할 수 있는데, 여기서 E, G는 상기에서 기술한 값을 사용하여 단순히 수정된 단면특성치  $(I_y)^*, (I_z)^*, (J)^*$ 만 평가해 보았다.

$$I_y^* = 16049.26; I_z^* = 14935.98; J^* = 119532.8 \quad (14)$$

굴곡부가 갖는 부가의 유연성을 평가해 보기 위해 직선 파이프의 단면특성치 (12)와 수정된 단면특성치 (14)를 비교해 보면 다음에서처럼 보의 휨 유연성은 큰데 반해 비틀림 유연성은 그리 크지 않다는 것을 알 수 있다.

$$I_y^* / I_y = 5.13; I_z^* / I_z = 5.51; J^* / J = 1.38$$

이 결과로부터 굴곡부가 직선보로 모델링될 때의 고유진동수가 실제보다 크게 나타나리라는 사실외에 보의 모델링개선시 E 값 1개만으로 수정해 나가는 통상적 방법으로는 좋은 결과를 얻을 수 없음을 알 수 있다. 따라서 실제 모델링변경 또는 굴곡부의 강성을 변화시켜야 할 때 E, G 값을 원 재료의 값을 사용하고  $I_y, I_z, J$ 를 변화시켜야 할 것이다.

그러나 식 (14)의 결과를 보면  $I_y^*$ 와  $I_z^*$ 의 값이  $J^*$ 의 값에 비해 매우 가까우므로 실제 문제에 적용할때  $I_y, I_z, J$ 의 3개의 값 대신에 E, G의 2개의 값만을 사용하여도 거의 같은 효과를 기대할 수 있을 것이다. 이러한 관찰은 상기에서 다른 예제 등에서도 적용해 본 바, 그 타당성을 입증할 수 있었다. 그러므로 수정해야 할 파라미터의 수가 3개에서 2개로 줄었다는 사실외에도 실제 구조물에서  $I_y, I_z$ 를 일일이 바꾸어 준다는 것은 매우 성가신 일임에 틀림없기 때문에 실제 적용에도 많은 도움을 줄 수 있다.

식(14)의 값을 이용하여 그림 1의 파이프 구조물의 고유진동해석을 수행하였는데, 양단 자유인 경계조건을 선택해 보았다. 표 1은 그림 1의 파이프에 대해 쉘 유한요소해석, 굴곡부의 단면특성치를 수정하지 않은 직선보 유한요소해석, 그리고 굴곡부의 단면특성치를 식(14)의 값으로 대체하여, 보 유한요소해석을 수행한 결과를 나타낸다. (괄호안은 쉘 모델링에 대한 상대적인 오차를 나타낸다.)

표 1. 그림 1의 굴곡부가 있는 파이프의 고유진동수(단위 : Hz)

모드번호	셸 모델링	보 모델링 (수정 후)	보 모델링 (수정 전)
1	$3.93 \times 10^{-2}$	$5.42 \times 10^{-2}$ (38%)	$3.86 \times 10^{-2}$ (1.7%)
2	$1.76 \times 10^{-1}$	$1.82 \times 10^{-1}$ (3.4%)	$1.79 \times 10^{-1}$ (1.6%)
3	$1.86 \times 10^{-1}$	$1.89 \times 10^{-2}$ (1.6%)	$1.87 \times 10^{-1}$ (0.4%)
4	$2.50 \times 10^{-1}$	$2.95 \times 10^{-1}$ (18%)	$2.51 \times 10^{-1}$ (0.3%)

표 1로부터 굴곡부를 단순히 직선보로 모델링하면 매우

큰 오차가 발생함을 알 수 있고, 본 논문에서 제시한 기법으로는, (특히 저주파수 영역에서) 좋은 결과를 얻을 수 있음을 확인할 수 있다. 본 기법으로 구한 구조물의 모드형상도 쉘유한요소해석결과와 거의 같음을 확인했다. 상기 예제외에 다른 여러 형상의 굴곡부를 갖는 파이프에 대해서도 유사한 결과를 얻을 수 있었다.

#### 4. 중앙파이프 해석

1절에서 언급한 바와 같이 배기계의 3개 주요 구조요소 중 중앙파이프에 대해 본 기법을 적용해 보았다. 그 이유는 타 부위보다 구조가 간단하면서 물리적으로 볼 때 앞 절에서 고려한 굴곡부의 영향이 전체 해석 결과에 가장 중요한 영향을 끼치리라 보았고, 실제 해석결과도 이를 뒷받침해 주었다.

이 중앙파이프에는 예소음기(pre-silencer)가 있는데 그 부위는 그림 3에 3개의 원으로 표시되어 있다. 전체 모델링은 약 30개의 보요소(NASTRAN의 CBAR)로 이루어졌으며 이 중앙파이프에는 2개의 주요 굴곡부가 있다. 이 굴곡부에 대해서 2절에서 제안한 기법을 적용하여 수정된 보강성값을 구했다. 굴곡부의 단면계수를 수정하기 전과 후의 고유진동수 해석 결과를 실제 실험을 수행하여 얻은 결과와 비교해 보았고, (양단은 자유상태유지) 각 고유모드의 형태는 그림 3(모드번호 1), 그림 4(모드번호 2), 그림 5(모드번호 3), 그림 6(모드번호 4)에 실어 놓았으며, 실험결과와 잘 일치함을 알 수 있었다.

표 2. 센터파이프 (그림 3)의 고유진동수 (단위 : Hz)  
(괄호안은 쉘모델링에 대한 상대적인 오차를 나타낸다)

모드 번호	실험	보 모델링 (수정 전)	보 모델링 (수정 후: 도면데이터)	보 모델링 (수정 후: 실측)
1	37.5	67.98 (80%)	46.1 (23%)	40.43 (7.8%)
2	67.5	100.23 (48%)	74.4 (10%)	70.93 (5.1%)
3	86.3	175.43 (103%)	106.0 (23%)	99.37 (15%)
4	217.5	261.24 (20%)	246.1 (13%)	239.01 (9.9%)
5	235.0	277.9 (18%)	267.4 (15%)	263.66 (12%)

표 2의 결과에서 보듯이 굴곡부의 단면특성을 수정하지 않고 해석을 수행하면 최대 100% 이상의 오차를 유발함을 알 수 있다. 그러나 본 논문에서 제시한 기법에 따라 굴곡부의 단면특성을 수정하면 모든 모드에 대해 오차가 10~23% 이내로 줄어들음을 알 수 있다. 특히 도면으로부터의 굴곡부 형상 데이터와 실측한 데이터가 실제 제작상의 이유로 조금 차이가 나는데, 실제 고유진동수를 비교해 보면 두 데이터에 의한 값이 최고 10%이상 차이가 남을 알 수 있다. 이 결과는 굴곡부의 곡률이 전체계의 유연성에 매우 큰 영향을 줄 수 있음을 보여주고 있다. 따라서 초기 설계 모델링시에 이러한 사항을 충분히 고려하지 않으면 안된다.

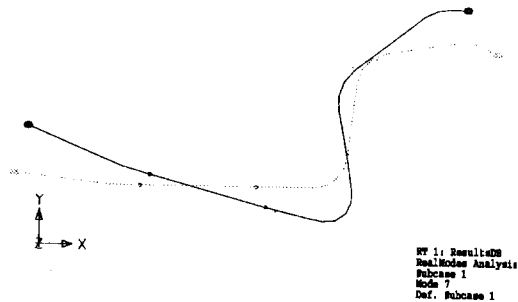


그림 3. 중앙파이프의 1번째 고유모드

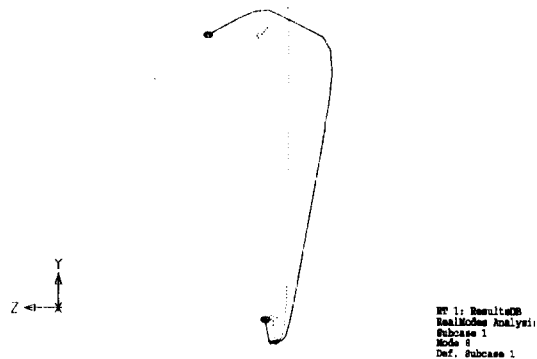
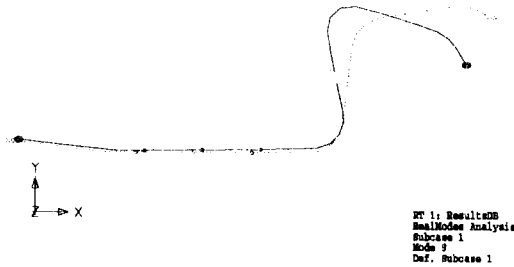


그림 4. 중앙파이프의 2번째 고유모드

기계모델링과 실험수행시 많은 협조를 해 주신 이승섭 대리,  
김만복씨께도 감사드립니다.



<참고분헌 생략>

그림 5. 중앙파이프의 3번째 고유모드

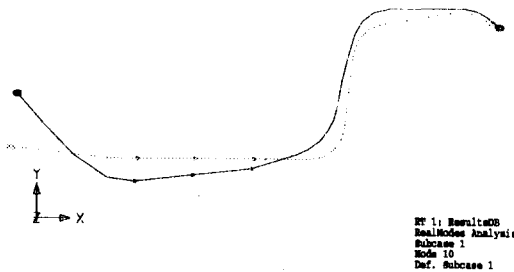


그림 6. 중앙파이프의 4번째 고유모드

## 5. 결론

본 연구에서는 배기계의 진동해석과 관련하여, 배기계 파이프에 대한 보 모델링기법을 제안하였다. 굴곡부가 통상의 직선부로 모델링될 때는 실제보다 고유진동수가 상당히 높게 평가되므로, 이 굴곡부의 강성을 적절히 수정해 주어야만 한다. 따라서 본 논문에서는 정적 변형에너지개념을 이용하여 실제 엔지니어들이 사용할 수 있을 정도로 간단하면서도, 합리적인 기법을 제시하였다. 실제 배기계의 중앙파이프의 진동해석에 적용해 본 결과 이 기법의 타당성과 효율성을 입증할 수 있었다.

< 후 기 >

본 연구는 기아자동차 산학협동프로그램의 일환으로 수행되었으며, 이에 관계자 제위께 감사드립니다. 아울러 배