

두 정현파 소음에 대한 Filtered-X LMS 알고리즘의 특성연구

김 현석*, 박영진*

(Chararcteristics of Filtered-X LMS Algorithm for Two Tone Noise)

Hyoun-Suk Kim, Youngjin Park

Abstract: For the systems such as ANC(Active Noise Control) systems having auxiliary path after FIR type adaptive filter, Filtered-X LMS algorithm is effective. However behaviors of this algorithm has not been fully understood. The convergence property of this algorithm depends on not only cross correlation matrix between the filtered signals through model and real auxiliary path but also dynamics of the auxiliary path itself. Steady state solution of weight vector in Filtered-X LMS algorithm is investigated for under-determined case, over-determined case, and nonsingular case. Also, the convergence speed in case of two tone noise is investigated based on the eigenvalue spread of cross correlation matrix.

두개의 주파수 ω_1/ω_s , ω_2/ω_s , \hat{H} 가 가지고 있는 모델에러 등이된다.

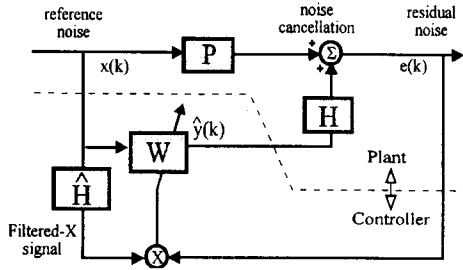


그림1. 능동소음제어 시스템의 블록선도

1. 서론

Filtered-X LMS 알고리즘은 능동소음제어 분야에서 피드포워드 제어 방법으로 많이 쓰인다. 이 방법은 LMS 알고리즘의 일반화된 방법으로 제어기 출력부와 에러신호 감지기 사이에 부가적 경로인 오차계가 존재할 때를 고려한다. H로 표현되는 오차계가 존재함으로써 Filterd-X LMS 알고리즘은 LMS 알고리즘보다 한층 복잡한 성질을 갖게 되며[1,2], 오차계모델 \hat{H} 과 오차계 H가 수렴속도와 정상상태에 미치는 영향이 이에 포함된다.

본 논문에서는 첫째로 그림1과 같은 능동 소음 제어 시스템에서 Filterd-X LMS 알고리즘의 FIR 가중치 W가 정상상태에서 어떠한 값을 갖는가에 대해서 연구하였다. 원소음신호 x_k 가 N개의 서로 다른 주파수 성분으로 이루어져 있으며 이 소음이 그림1과 같은 시스템의 입력이고, 잔류소음신호 e_k 에는 다른 추가적인 잡음은 없다고 가정한다. 정상상태의 W가 어떤 경우에 W의 초기치나 오차계모델 \hat{H} 의 영향을 받을 수 있는가에 초점을 맞추었다. 또한 본 논문에서는 주파수가 각각 ω_1, ω_2 인 두개의 정현파 소음에 대하여, Filterd-X LMS 알고리즘의 수렴 속도에 영향을 줄 수 있는 변수들은 무엇이며, 그들 변수가 수렴속도에 어떻게 영향을 주는가를 연구 하였다. 수렴속도는 Filterd-X LMS 알고리즘의 수렴상수 μ 와 상관행렬의 특성치 분포정도에 의하여 결정되므로[3] 고려할 수 있는 변수들은 수렴상수 μ , W의 길이 L+1, 샘플링 주파수 ω_s 로 정규화된다

2. 본론

2.1 기울기의 표현 (Gradient Description)

원소음신호 x_k 가 N개의 다른 주파수 성분을 가지고 있을 때, k 스텝에서의 목적함수 J_k 를 잔류소음신호 e_k 의 제곱으로 정의하고, 다음과 같이 주파수 영역으로 근사하여 표현하자.

$$J_k = e_k^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \bar{e}_k(\omega_i) e_k(\omega_i) \quad (1)$$

여기에서 복소수 $e_k(\omega_i)$ 는 k 스텝에서의 잔류소음신호 e_k 의 ω_i 주파수 성분이며, 윗첨자 $-$ 는 공액 복소수를 나타낸다. 그림1의 블록 선도로 부터 $e_k(\omega_i)$ 는

$$e_k(\omega_i) = \{P(j\omega_i) + H(j\omega_i)W_k(j\omega_i)\} x_k(\omega_i) \quad (2)$$

이다. 복소수 $P(j\omega_i)$, $H(j\omega_i)$, $W_k(j\omega_i)$ 는 각각 대상계 P, 오차계 H, 가중치 W의 주파수 ω_i 에서의 전달함수이다. $W_k(j\omega_i)$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$W_k(j\omega_i) = Z^{-1}(j\omega_i)W_k \quad (3)$$

여기에서 W_k 는 길이 L+1인 FIR 형태의 가중치 행벡터이며, $Z(j\omega_i)$ 는 W_k 에서 주파수 ω_i 성분을 얻어내기 위해 다음과 같이 정의된 길이 L+1인 행벡터이다. $T(=2\pi/\omega_s)$ 는 샘플링 시간 간격이다.

$$Z(j\omega_i) = \frac{1}{\sqrt{L+1}} [1 \ e^{-j\omega_i T} \ e^{-j2\omega_i T} \ \dots \ e^{-jL\omega_i T}]^T \quad (4)$$

* 한국과학기술원 기계공학과 NoViC 센터

식 (2)를 식 (1)에 대입하고 J_k 를 W_k 에 대하여 편미분하면 실제 기울기 ∇W_k 는:

$$\nabla W_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N 2 \operatorname{Re} \{ \bar{e}_k(\omega_i) H(j\omega_i) Z(j\omega_i) x_k(\omega_i) \} \quad (5)$$

그러나, 실제의 오차계 H 대신 오차계 모델 \hat{H} 을 쓰게 되므로 기울기 예측치 $\hat{\nabla} W_k$ 는

$$\hat{\nabla} W_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N 2 \operatorname{Re} \{ \bar{e}_k(\omega_i) \hat{H}(j\omega_i) Z(j\omega_i) x_k(\omega_i) \} \quad (6.1)$$

$$= \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N |x_k(\omega_i)|^2 \operatorname{Re} \{ \bar{P}(j\omega_i) \hat{H}(j\omega_i) Z(j\omega_i) \} \quad (6.2)$$

$$+ \bar{H}(j\omega_i) \hat{H}(j\omega_i) Z(j\omega_i) \bar{Z}'(j\omega_i) W_k \}$$

기울기 예측치 $\hat{\nabla} W_k$ 에서의 네개의 전달 함수를 실수부와 허수부로 나누어 표현하면

$$Z(j\omega_i) = Z_{xi} + jZ_{yi}, \quad P(j\omega_i) = P_{xi} + jP_{yi},$$

$$\hat{H}(j\omega_i) = \hat{H}_{xi} + j\hat{H}_{yi}, \quad H(j\omega_i) = H_{xi} + jH_{yi} \quad (7)$$

이고, $\hat{\nabla} W_k$ 는 행렬을 이용하여 다음과 같이 표현된다.

$$\hat{\nabla} W_k = \frac{2}{N} \left\{ \sum_{i=1}^N \{ q_i^2 S_i \bar{H}_i \hat{H}_i S_i' \} W_k + \sum_{i=1}^N \{ q_i^2 S_i \hat{H}_i \bar{P}_i' \} \right\} \quad (8.1)$$

$$= \frac{2}{N} \{ \bar{S} \bar{H} \hat{H} S' W_k + \bar{S} \hat{H} \bar{P}' \} \quad (8.2)$$

여기에서

$$q_i = |x_k(\omega_i)|$$

$$S_i' = \begin{bmatrix} Z_{xi} \\ Z_{yi} \end{bmatrix}, \quad \bar{H}_i = \begin{bmatrix} H_{xi} & -H_{yi} \\ H_{yi} & H_{xi} \end{bmatrix} \quad (9.1)$$

$$\hat{H}_i = \begin{bmatrix} \hat{H}_{xi} & \hat{H}_{yi} \\ -\hat{H}_{yi} & \hat{H}_{xi} \end{bmatrix}, \quad \bar{P}_i' = \begin{bmatrix} P_{xi} \\ P_{yi} \end{bmatrix}$$

$$S' = \begin{bmatrix} S_1' \\ \vdots \\ S_N' \end{bmatrix}, \quad \bar{H} = \begin{bmatrix} q_1 \bar{H}_1 & & & 0 \\ & q_2 \bar{H}_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & q_N \bar{H}_N \end{bmatrix} \quad (9.2)$$

$$\hat{H} = \begin{bmatrix} q_1 \hat{H}_1 & & & 0 \\ & q_2 \hat{H}_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & q_N \hat{H}_N \end{bmatrix}, \quad \bar{P}' = \begin{bmatrix} q_1 \bar{P}_1' \\ q_2 \bar{P}_2' \\ \vdots \\ q_N \bar{P}_N' \end{bmatrix}$$

수렴상수 μ 와 기울기 예측치 $\hat{\nabla} W_k$ 로 부터 Filterd-X LMS 알고리즘은:

$$W_{k+1} = W_k - \mu \hat{\nabla} W_k \quad (10)$$

식 (8.2)에서 W_k 의 계수 $\bar{S} \bar{H} \hat{H} S'$ 는 수렴과정과 정상상태 모두에 영향을 주는 행렬로서 H 와 \hat{H} 을 통과한 두 filtered-x 신호의 상관행렬이다. 그리고 식 (8.2)의 행렬 $\bar{S} \hat{H} \bar{P}'$ 는 수렴과정에는 무관하며 정상상태에만 영향을 주는 항이다.

2.2 정상상태의 가중치값

정상상태에서는 가중치의 기울기가 0 이어야 하므로

$$\hat{\nabla} W_k = 0 \quad (11)$$

이다. Filterd-X 신호가 충분히 생성된 후 가중치의 갱신을 시작한다고 가정하고, 가중치 초기치 W_0 로부터의 가중치 변화 $W_k - W_0$ 를 고려하면 정상상태의 해 W_{ss} 는

$$W_{ss} = -(\bar{S} \bar{H} \hat{H} S')^{-1} \bar{S} \hat{H} \bar{P}'$$

$$+ [I - (\bar{S} \bar{H} \hat{H} S')^{-1} \bar{S} \bar{H} \hat{H} S'] W_0 \quad (12)$$

과 같다. 여기에서 윗첨자 '는 일반 역행렬 (pseudo inverse)을 나타낸다. W_{ss} 는 $2N < L+1$ 인 under-determined 경우, $2N > L+1$ 인 over-determined 경우 그리고 $2N = L+1$ 인 nonsingular 경우의 세가지로 나누어 생각하면 더욱 간략화될 수 있다. 이러한 분류는 FIR 형태의 가중치 2개가 한개의 주파수 성분과 대응된다는 사실에 기초한다.

Under-determined 경우 ($2N < L+1$)

$L+1$ 행 $2N$ 열의 행렬 S 는 SVD(Singular Value Decomposition)를 이용, 분해하여

$$S = U \Sigma V^T \quad (13)$$

로 쓸 수 있으며, 여기에서 U 는 $L+1$ 행 $2N$ 열, Σ 는 $2N$ 행 $2N$ 열, V^T 는 $2N$ 행 $2N$ 열의 행렬이다. $U^T U = I$, $V^T V = I$, $V V^T = I$ 의 성질과 \hat{H} 와 \bar{H} 가 서로 교환 가능함을 이용하면 식 (12)로부터 W_{ss} 는

$$W_{ss} = -U \Sigma^{-1} V^T \bar{H}^{-1} \bar{P}' + [I - U U^T] W_0 \quad (14)$$

이며, 이 경우 오차계 모델 \hat{H} 는 W 의 수렴과정에 영향을 줄수는 있어도 정상상태의 가중치 W_{ss} 에는 영향을 주지 못한다. 그러나 가중치의 초기치 W_0 의 영향이 식 (14)의 두번째 항에서와 같이 S 행렬의 null 공간을 통해 남아있다. 식 (14)에서 W_0 와 $W_{ss} - W_0$ 는 서로 수직이다. 따라서 $\|W\|$ 를 최소화 하기 위해서, 즉 필터를 통한 에너지의 전달을 최소화 하기 위해서는 W_0 를 영벡터로 해야한다.

Over-determined 경우 ($2N > L+1$)

이 경우에도 행렬 S 는 식(13)와 같이 SVD 형태로 나타낼 수 있고, U 는 $L+1$ 행 $L+1$ 열, Σ 는 $L+1$ 행 $L+1$ 열 V^T 는 $L+1$ 행 $2N$ 열이며, $U^T U = I$, $U U^T = I$, $V^T V = I$ 의 성질이 있다. 이러한 성질을 이용하면 식 (12)로부터 W_{ss} 는

$$W_{ss} = -U \Sigma^{-1} [V^T \hat{H} \bar{H} V]^{-1} V^T (\hat{H} \bar{P}') \quad (15)$$

이며, under-determined 경우와는 반대로 W_{ss} 는 W_0 에

영향을 받지 않고 \hat{H} 의 영향을 받는 것으로 나타났다. 따라서 이 경우 \hat{H} 은 W 의 수렴과정과 정상상태의 값 모두에 연관되므로 더욱 중요하다.

Nonsingular 경우(2N=L+1)

소음의 주파수 성분 갯수의 두배와 필터 길이가 같은 경우에 W_{∞} 는

$$W_{\infty} = -U\Sigma^{-1}V^T\bar{H}^{-1}P^{-1} \quad (16)$$

로 표현되어 W_0 과 \hat{H} 모두에 영향을 받지 않는다.

2.3 정현파 소음에 대한 수렴특성

식 (8.2)의 상관행렬 $S\bar{H}\hat{H}S'$ 의 특성치 분포는 Filterd-X LMS 알고리즘의 수렴속도에 영향을 주게 된다. 항상 안정된 범위에서 최대의 수렴상수 μ 를 사용한다고 가정하면, 가장 느린 시정수(time constant)는 다음과 같은 r 값의 역수에 비례한다.

$$r = \left\{ \text{Re}\{\lambda_i\} / |\lambda_i|^2 \right\}_{\min} \cdot \left\{ \text{Re}\{\lambda_i\} \right\}_{\min} \quad (17)$$

특히 특성치가 실수일 경우 $r = \lambda_{\min} / \lambda_{\max}$ 가 된다. 따라서 r 이 1에 가까울수록 상관행렬의 특성치 분포정도는 작아지며 수렴은 빨라진다.

먼저 간단한 경우인 한개의 정현파 소음이 존재할 경우를 고려하고, 이를 바탕으로 두개의 정현파 소음이 존재할 경우를 고려하겠다.

한개의 정현파 소음인 경우(N=1)

주파수 ω 인 정현파 소음이 존재할 경우 오차계 H 와 오차계 모델 \hat{H} 의 ω 성분에 대한 전달함수가 각각 $he^{j\omega n}$, $\hat{h}e^{j\omega n}$ 이라 하면 식 (8.2)의 $\bar{H}\hat{H}$ 은 다음과 같이 표현된다

$$\bar{H}\hat{H} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (18)$$

여기에서 $\theta (= \phi_{\hat{h}} - \phi_h)$ 는 ω 에서의 오차계 모델과 실제 오차계의 위상 지연 차이이며, $c (= q^2 h \hat{h})$ 는 세계의 항 즉 ω 에서의 원소음신호의 파워, 오차계 모델의 이득, 실제 오차계의 이득의 곱에 해당한다.

$\sin\theta$ 항은 행렬 $S\bar{H}\hat{H}S'$ 에 비대칭성을 유발하기 때문에 이 행렬의 특성치를 음이되게 할 우려가 있다. θ 가 커질수록 즉 오차계 모델과 실제 오차계의 위상 지연 차이가 커질수록 행렬 $S\bar{H}\hat{H}S'$ 의 특성치는 RHP에서 LHP으로 이동하며, θ 가 90° 이상이 되면 양수의 수렴상수 μ 로는 수렴이 불가능하게 된다. 이 현상은 다른 방식으로 접근된다. [2]

$N=1$ 인 경우에 $S\bar{H}\hat{H}S'$ 의 0이 아닌 특성치의 수는 최대 두개이며 그 값은 다음과 같이 정리된다

$$\lambda_{1,2} = c \frac{(1 \pm \alpha')}{2} \quad (19)$$

여기에서

$$\alpha' = \sqrt{(\alpha^2 - 1) / \cos^2\theta + 1} \quad (20)$$

$$\alpha = \frac{\sin(L+1)\omega T}{(L+1)\sin\omega T}$$

식 (20)에서 $\alpha^2 < \sin^2\theta$ 일때 α' 이 복소수가 되므로 두개의 특성치는 모두 복소수이다. 식 (18)로부터 특성치가 실수일 경우와 복소수일 경우를 고려하면 비율 r 값은 다음과 같다.

$$r = \begin{cases} \frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{1-\alpha'}{1+\alpha'} & ; \text{real } \lambda \\ \left\{ \frac{\text{Re}\{\lambda_i\}}{|\lambda_i|} \right\}^2 = \frac{\cos^2\theta}{1-\alpha'^2} & ; \text{complex } \lambda \end{cases} \quad (21)$$

빠른 수렴을 위해서는 r 이 1에 가까워야, 즉 α' 이 0에 가까워야 한다 또한 이 조건은 α 가 $\sin\theta$ 에 가까워야 함을 의미한다.

여기에서 주목할 사실은 모델오차가 존재할 경우 이는 수렴속도에 영향을 미치며, 상황에 따라서는 모델오차가 없는 경우보다 수렴속도를 빠르게할 수 있는 조건이 존재한다는 것이다. 예로 그림4(a)에서 필터길이가 2일때 주파수에 따른 r 값을 보면 $\theta = 0$ 일 경우 가장 빠른수렴을 위해서는 샘플링 주파수 ω_s 가 줄이고자 하는 주파수의 4배이어야 하며, 만일 줄이고자 하는 정규화된 주파수가 1/4 지점에서 벗어나 있더라도 그 차이가 $\theta / 2\pi$ 이도록 모델 \hat{H} 의 ω 에서의 위상지연을 조정, θ 를 생성하여 r 을 1이 되게 할 수 있다.

그림4(b),(c),(d)는 필터길이가 각각 3, 4, 5일경우 θ 와 ω/ω_s 에 대한 r 값의 변화를 보여주고 있다. 필터의 길이가 길어질수록 주어진 샘플링 주파수 ω_s 에 대하여 r 을 1이 되게 할 수 있는 정현파의 주파수 갯수가 많아짐을 알 수 있다. 또한 θ 가 커질수록 r 이 1인 주파수 값이 변화하며, θ 가 90° 로 접근할수록 r 이 1인 주파수 값은 정규화된 주파수로 볼때 0과 1/2에 접근한다.

두개의 정현파 소음인 경우(N=2)

상관행렬 $S\bar{H}\hat{H}S'$ 의 0이 아닌 특성치의 갯수는 이 경우 최대 4개이다. 여기에서는 해석적으로 이 4개의 값들을 구하여 어떤 변수들이 어떻게 특성치 분포에 영향을 주는가를 알아보려한다.

주파수가 ω_1, ω_2 인 두 정현파 소음에 대한 H 와 \hat{H} 의 두 주파수에서의 각각의 전달함수가 $h_1e^{j\omega_1 n}$, $\hat{h}_1e^{j\omega_1 n}$, $h_2e^{j\omega_2 n}$, $\hat{h}_2e^{j\omega_2 n}$ 라 하면 $\bar{H}\hat{H}$ 은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\bar{H}\hat{H} = \begin{bmatrix} c_1 \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & c_2 \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (23)$$

여기에서

$$\begin{aligned} \theta_i &= \phi_{in} - \phi_{hn} \quad ; \omega_i \text{에서 } \hat{H} \text{와 } H \text{의 위상 지연 차이} \\ c_i &= q_i^2 h_i \hat{h}_i \quad ; \omega_i \text{에서 원소음신호의 파워 값과} \\ &\quad \hat{H} \text{와 } H \text{의 이득의 곱} \end{aligned} \quad (24)$$

S 행렬의 SVD 형태를 고려하면 Σ^2 과 V 는 다음과 같다.

$$\Sigma^2 = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & & 0 \\ & \sigma_2^2 & & \\ & & \sigma_3^2 & \\ 0 & & & \sigma_4^2 \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$= \text{diag} \left[\begin{array}{l} \frac{1}{2} + \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)}{4} + \frac{1}{4} \sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + 4(\alpha_1 + \alpha_2)^2} \\ \frac{1}{2} + \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)}{4} - \frac{1}{4} \sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + 4(\alpha_1 + \alpha_2)^2} \\ \frac{1}{2} - \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)}{4} + \frac{1}{4} \sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + 4(\alpha_1 - \alpha_2)^2} \\ \frac{1}{2} - \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)}{4} - \frac{1}{4} \sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + 4(\alpha_1 - \alpha_2)^2} \end{array} \right]$$

$$V = V_{12} X = \begin{bmatrix} \left[\text{rot}\left(\frac{L\omega_1 T}{2}\right) \right] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \left[\text{rot}\left(\frac{L\omega_2 T}{2}\right) \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & x_4 \\ x_5 & x_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_7 & x_8 \end{bmatrix} \quad (25)$$

여기에서

$$\left[\text{rot}(\phi) \right] = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \quad ; \text{회전변환} \quad (26.1)$$

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \beta_{1,2} / \sqrt{1 + \beta_{1,2}^2}, \quad x_{3,4} = 1 / \sqrt{1 + \beta_{1,2}^2} \\ x_{5,6} &= \beta_{3,4} / \sqrt{1 + \beta_{3,4}^2}, \quad x_{7,8} = 1 / \sqrt{1 + \beta_{3,4}^2} \end{aligned} \quad (26.2)$$

$$\begin{aligned} \beta_{1,2} &= -\frac{1}{2} k_1 \pm \frac{1}{2} \sqrt{k_1^2 + 4}, \quad k_1 = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \\ \beta_{3,4} &= \frac{1}{2} k_2 \pm \frac{1}{2} \sqrt{k_2^2 + 4}, \quad k_2 = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2} \end{aligned} \quad (26.3)$$

$$\alpha_1 = \frac{\sin(L+1)\omega_1 T}{(L+1)\sin\omega_1 T}, \quad \alpha_2 = \frac{\sin(L+1)\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) T}{(L+1)\sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) T} \quad (26.4)$$

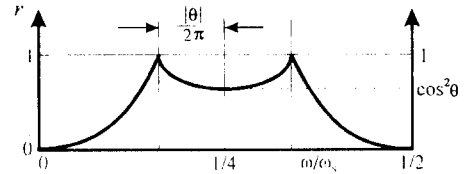
즉 x_1, x_2, x_3, x_4 는 k_1 의 함수이고, x_5, x_6, x_7, x_8 는 k_2 의 함수이다.

네 행렬 $V_{12}^t, \bar{H}, \hat{H}, V_{12}$ 가 서로 교환가능하고, $S = U \Sigma X^t V_{12}^t$ 임을 이용하면 상관 행렬 $S \bar{H} \hat{H} S^t$ 는

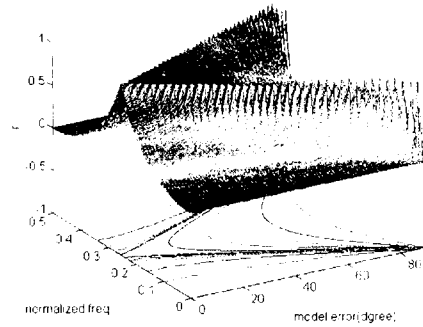
$$\begin{aligned} S \bar{H} \hat{H} S^t &= U \Sigma X^t \bar{H} \hat{H} X \Sigma U^t \\ &= U Q U^t \end{aligned} \quad (27)$$

이다. 4행 4열의 행렬 Q 는 $Q = \Sigma X^t \bar{H} \hat{H} X \Sigma$ 로 정의된 것이며 이 행렬의 특성치는 $S \bar{H} \hat{H} S^t$ 의 특성치와 같다. Q 는 오차계 H , 오차계 모델 \hat{H} , 소음신호와 관계되는 행렬 $\bar{H} \hat{H}$ 과, 두개의 정규화된

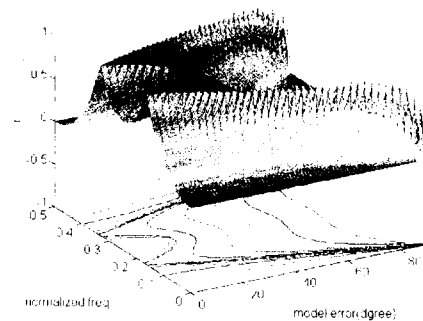
주파수 $\omega_1/\omega_s, \omega_2/\omega_s$, 필터길이 $L+1$ 의 세개의 변수들의 함수 행렬인 $X \Sigma$ 로 이루어져 있다. 따라서 행렬 Q 의 특성치 분포에 영향을 미치는 변수들은 $c_1, c_2, \theta_1, \theta_2, \omega_1/\omega_s, \omega_2/\omega_s, L+1$ 의 7개이다.



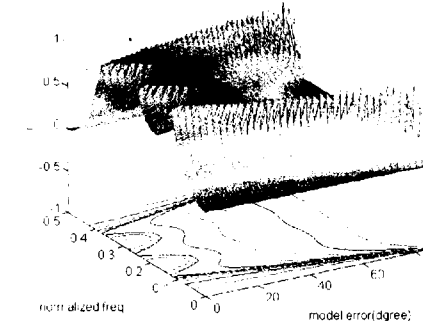
(a) L+1 = 2



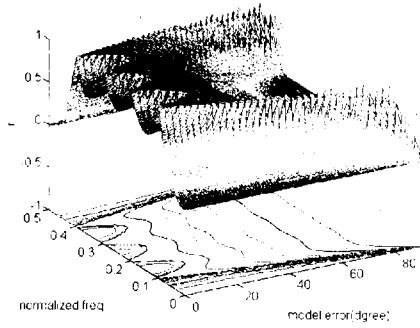
(a) L+1 = 2



(b) L+1 = 3



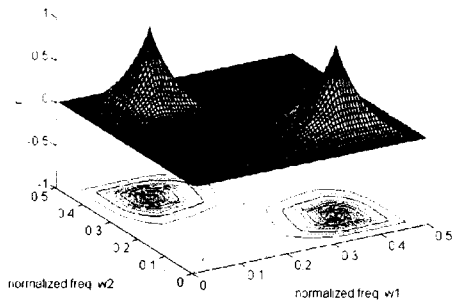
(c) L+1 = 4



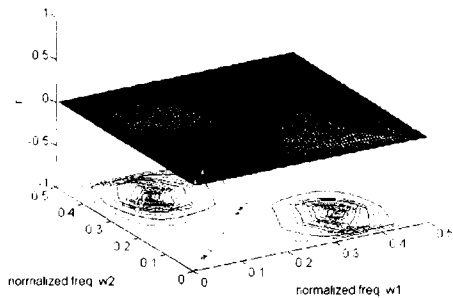
(d) $L+1=5$

그림4. 한개의 정현파 소음에 대한 r 값
(a) $L+1=2$ (b) $L+1=3$, (c) $L+1=4$, (d) $L+1=5$

각 변수에 의한 r 값의 변화를 알아보기 위해 우선 $\theta_1 = \theta_2 = 0$ 이며, $L+1=4$ 인 경우에 c_1/c_2 의 크기비에 따른 ω_1/ω_s 대 ω_2/ω_s 평면에 대한 r 값의 변화를 그림6에 그렸다. c_1/c_2 의 비율이 1에서 멀어질수록 r 값의 최대치는 1에서 점점 0으로 다가가 수렴이 대체적으로 느려질 것임을 보여준다. 이 현상을 반대로 응용한다면 오차계 모델이 $c_1 = c_2$ 즉, $q_1^2 \hat{h}_1 \hat{h}_1 = q_2^2 \hat{h}_2 \hat{h}_2$ 이도록 각 주파수에서의 이득을 조절함으로써 빠른 수렴을 얻을 수 있다.



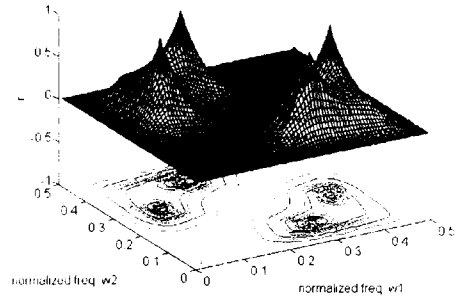
(a) $c_1/c_2=1$



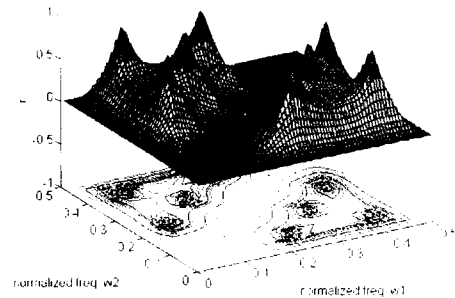
(b) $c_1/c_2=4$

그림6. $\theta_1 = \theta_2 = 0$, $L+1=4$ 일 경우의 r 값
(a) $c_1/c_2=1$, (b) $c_1/c_2=4$

$c_1=c_2$ 이며, $\theta_1 = \theta_2 = 0$ 인 경우에 필터길이 $L+1$ 값에 따른 ω_1/ω_s 대 ω_2/ω_s 평면에 대한 r 값의 변화가 그림7에 그려져 있다. 그림5(a)와 연계하여 보면 필터의 길이가 길어질수록 r 값이 1이 되는 지점이 많아져 수렴이 빨라질 수 있는 확률이 커짐을 알 수 있다.



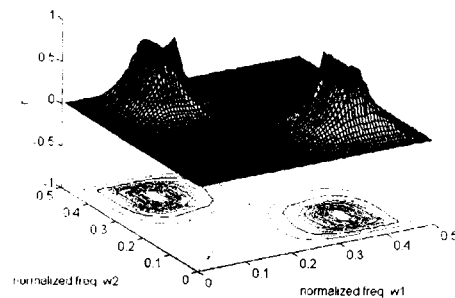
(a) $L+1=5$



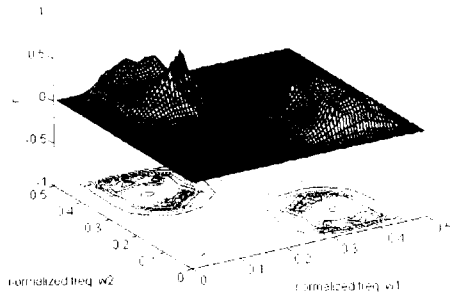
(b) $L+1=6$

그림7. $c_1=c_2$, $\theta_1 = \theta_2 = 0$ 일 경우의 r 값
(a) $L+1=5$ (b) $L+1=6$

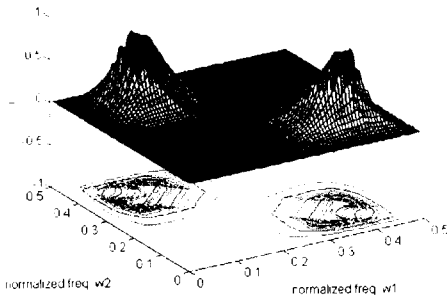
또한, $c_1=c_2$ 이며 $L+1=4$ 인 경우에 θ_1 와 θ_2 의 값에 따른 ω_1/ω_s 대 ω_2/ω_s 평면에 대한 r 값의 변화를 그림8에 그렸다. r 값이 1이 되는 두 정규화된 주파수 값이 θ_1 와 θ_2 의 도입으로 변화됨을 볼 수 있다. 한개의 정상파의 경우와 같이 단순한 경향이 아니라, 대체적으로 θ_1 와 θ_2 가 커질수록 점점 큰 변화를 유발한다.



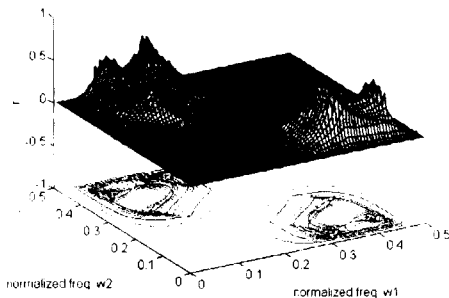
(a) $\theta_1=30^\circ$, $\theta_2=0^\circ$



(b) $\theta_1=60^\circ, \theta_2=0^\circ$



(c) $\theta_1=30^\circ, \theta_2=30^\circ$



(d) $\theta_1=60^\circ, \theta_2=30^\circ$

그림8. $c_1=c_2, L+1=4$ 일 경우의 r_k 값
 (a) $\theta_1=30^\circ, \theta_2=0^\circ$, (b) $\theta_1=60^\circ, \theta_2=0^\circ$,
 (c) $\theta_1=30^\circ, \theta_2=30^\circ$, (d) $\theta_1=60^\circ, \theta_2=30^\circ$

3. 결론

Filtered-X LMS 알고리즘에 의한 정상상태의 가중치 W 는 세가지 경우로 나누어 생각될 수 있다. 이들은 소음원의 주파수 성분 갯수가 필터길이의 반보다 적은 under-determined, 큰 over-determined, 같은 nonsingular 경우이다.

해석결과 정상상태의 W 는 under-determined 경우, 오차계 모델 \hat{y} 에 영향을 받지 않으나 W 의 초기치에 영향을 받는 것으로 나타났다. 따라서 적응 필터를 통한 잡음의 최소화를 위해서는 W 의 초기치로서 영벡터가 권장된다. 그러나 over-determined 경우, 오차계 모델 \hat{y} 이 정상상태의 W 를

변화시키는 반면, W 의 초기치는 정상상태의 W 에 영향을 주지 않는다. 주파수 성분의 갯수가 필터길이와 같은 nonsingular 경우 정상상태의 가중치는 \hat{y} 과 W 의 초기치 모두에 영향을 받지 않는다.

소음이 하나의 정현파로 이루어져 있을때엔 필터길이를 늘이면 대체적으로 수렴 속도를 빠르게 할 수 있으며, 특히 필터길이가 짝수 일 경우 단일 오차계의 오차계 모델이 정확하다면 소음원이 가지고있는 주파수의 네배에 가깝게 함으로써 수렴속도를 빠르게 할 수 있다. 다른 관점에서 결과를 응용한다면, 필터길이가 짝수 일때 목표로 하는 소음의 주파수가 샘플링 주파수의 1/4 지점이 아니더라도 오차계 모델을 수정 함으로써 빠른 수렴을 얻을 수 있다.

소음이 두개의 정현파로 이루어져 있을 경우 정규화된 두 주파수의 위치가 수렴속도에 큰 영향을 미친다. 이 경우도 대체적으로 필터의 길이를 늘이면 빨리 수렴할 수 있는 확률이 커지며, 모델링 오차나 상대적인 두 소음의 크기비도 수렴속도에 영향을 준다. 이 경우에도 단일 정현파 소음의 경우와 같이 모델링 오차를 역이용하여 빠른수렴을 얻는 방법이 존재한다.

참고문헌

- [1] S.D.Snyder, C.H.Hansen, "The Influence of Transducer Transfer Functions and Acoustic Time Delays on the Implementation of the LMS Algorithm in Active Noise Control System," J.Sound Vib Vol.141(3),409-424,1990
- [2] Dennis R.Morgan, "An Analysis of Multiple Correlation Cancellation Loops with a Filter in Auxiliary Path," IEEE, ASSP Vol.28 No.4 August, 1980
- [3] Simon Haykin, "Adaptive Filter Theory," Second Edition, Prentice-hall, Inc, 1991, pp285-295