

SRM의 위치-속도 추정을 위한 관측자 설계

이 태규 °, 김 정태, 허 옥열
 인하대학교 전기공학과 제어 시스템 연구실

Observer Design of SRM for Position-Velocity Estimation

Tae-Gyoo LEE °, Jung-Tae KIM, Uk-Youl HUH
 Inha University Dept., Electrical Eng., Control System Lab.

Abstract

This thesis describes an observer of Switched Reluctance Motor for position, velocity and torque estimation using current sensing.

Inductance of SRM varies trapezoidally with respect to the rotor position. This means that the inductance of each phase is a periodic function with the same period. Under this condition, the observer with a constant gain can be developed though SRM has nonlinear characteristics. Because SRM has equivalent physical meaning with each period.

The stability of error system which is the difference between actual system and observer system, is analyzed using Lyapunov and variable structure theory.

The effectiveness of the proposed estimation is shown by various simulation.

1. 서론

스위치드 리럭턴스 모터(Switched Reluctance Motor)의 구조는 그림1과 같다. 전동기의 구조를 살펴보면 전동기의 회전자와 고정자가 모두 극을 갖는 구조로 회전자의 위치에 따라 공극의 자기저항이 달라진다. 이러한 자기저항의 변화는 공극에 저장된 자기 에너지의 변화를 초래하게 되고 에너지 보존의 법칙에 의하여 자기 에너지의 변화만큼 기계적인 에너지로 바뀌게 된다. 전동기의 회전은 자기저항을 최소로 하는 방향으로 움직이게 된다[1][2][3]. 따라서 이러한 전동기를 효율적으로 운전하기 위해서는 회전자의 위치를 파악하여야 하고, 이를 위하여 전동기의 축에 위치를 측정하는 장치가 필요하다. 또한 정속도의 제어를 위해서는 속도에 대한 정보가 필연적이다. 그런데 이러한 위치 측정 소자는 전동기의 단가, 중량, 관성 모멘트 등에 영향을 미치며 회전속도에 따라 신뢰도가 불분명하다. 이러한 문제의 해결을 위하여 여러 연구에서 직접적으로 위치 측정 소자를 사용하지 않고 전동기의 전기적인 요소인 상 전류와 전압을 이용하여 회전자의 위치를 추정하는 방법이 연구되고 있다[4][5][6]. 또한 위치 측정 장치를 사용한 상태에서 그 오차를 보정하는 다양한 방법이 연구되고 있다.

직접적인 위치-속도 측정 장치를 사용하지 않고 이들을 추정하는 대표적인 방법이 관측자 이론이다[4]. 그런데 전동기는 비선형 특성을 가지며, 전기적 동특성과 기계적 동특성이 내부 연결 상태를 갖는 시스템(Interconnected system)이어서 전기적인 요소인 상 전류와 전압을 이용하여 위치-속도를 추정하는 데는 많은 어려움을 갖는다. 또한 기계적인 부분의 입력에 해당하는 토크를 결정하는데 어려움이 있다.

본 연구에서는 SRM의 위치-속도를 위한 관측자 구성하기 위하여, SRM의 인덕턴스가 위치에 대한 주기 함수인점과 전류와 자속과의 관계를 이용하여 관측자를 구성하고 실제 시스템과의 차에 의하여 결정되는 오차 시스템의 안정성을 파악하여 그 타당성을 보인다.

2. SRM의 모델링

SRM은 수학적으로 다음과 같이 모델링된다.

$$\frac{d\phi_p}{dt} = -R H_p(\theta) \phi_p + V_p \quad (1)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega$$

$$\frac{d\phi}{dt} = -\frac{B}{J} \omega + \frac{1}{J} [T - T_L] \quad (2)$$

$$T = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^p \frac{\partial H_j(\theta)}{\partial \theta} \phi_j^2$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^p \frac{\partial L_j(\theta)}{\partial \theta} i_j^2 \quad [\text{Nm}] \quad (3)$$

$$i_p = H_p(\theta) \phi_p \quad (4)$$

$$H_p(\theta) = \frac{1}{L_p(\theta)} \quad (5)$$

- θ : 회전자의 위치[Rad]
- ω : 각속도[Rad/sec]
- B : 점성 마찰 계수[Nm/rad sec⁻¹]
- J : 관성 모멘트[Kg m²]
- T : SRM 전체 토크
- T_L : 부하 토크
- p : 전동기 상수
- L_j(θ) : j상의 인덕턴스[H]
- i_j : j의 전류[A]
- V_p : 인가 전압[V]
- R : 권선 저항[Ω]

식(1)에서 인덕턴스(L(θ))는 자기포화, 히스테리시스 그리고 프링징(Fringing)효과를 무시하면 근사적으로 회전자 위치에 대하여 사다리꼴의 형태로 변한다고 할 수 있다. 그림2에 SRM의 일반적인 인덕턴스 형태와 이에 따른 여자 전압을 도시하였다.

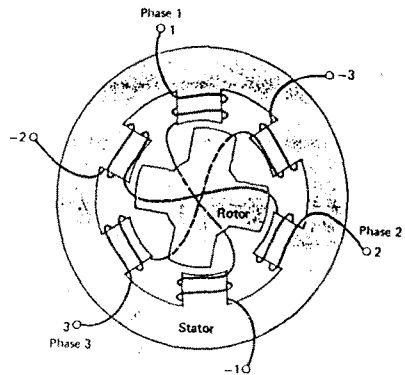


그림1 스위치드 리럭턴스 모우터의 구조

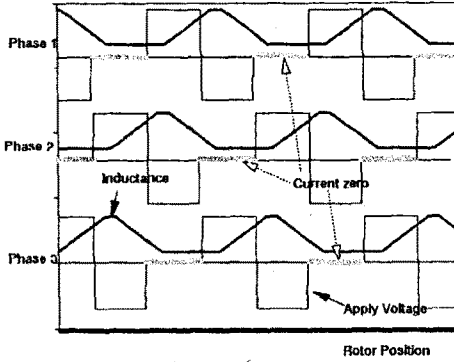


그림2 SRM의 인덕턴스 형상과 여자 형태

이때 회전자의 치면이 여자된 고정자의 치면과 완전히 일치하는 경우가 인덕턴스가 최대이며, 완전히 어긋난 경우가 인덕턴스는 최소이다. 그리고 인덕턴스는 회전자와 고정자 극의 폭 크기에 따라 형상을 달리하며, 회전자 위치에 대한 주기 함수이다.

그리고 식(3)에서 알 수 있듯이 회전자 위치에 대한 인덕턴스의 미분이 토오크의 부호를 결정하고 토오크의 크기와 형태는 전류의 제곱에 의하여 결정되며 전류의 극성에는 관계가 없다. 따라서 정(+)의 토오크의 발생을 위해서는 그림2과 같이 인덕턴스의 미분이 0보다 큰 영역에서 전압을 인가하여 전류를 구성해 한다. 따라서 SRM의 효율적인 회전을 위해서는 회전자의 위치를 파악해야 한다.

3. 관측자의 구성

SRM의 상 전류를 측정하여 위치와 속도를 추정하는 관측자는 다음과 같이 구성할 수 있다[4][7].

$$\frac{d\hat{\phi}_p}{dt} = -R H_p(\hat{\theta}) \hat{\phi}_p + V_p + L_p (i_p - \hat{i}_p) \quad (6)$$

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = \hat{\omega} + L_1 (i_{n-e} - \hat{i}_{n-e}) \quad (7)$$

$$\frac{d\hat{\omega}}{dt} = -\frac{B}{J} \hat{\omega} + \frac{1}{J} (T - T_L) + L_2 (i_{n-e} - \hat{i}_{n-e}) \quad (8)$$

$$T = -\frac{\kappa}{J\omega} \frac{\partial H_j(\hat{\theta})}{\partial \hat{\theta}} \hat{\phi}_j \quad (9)$$

$$\hat{i}_p = H_p(\hat{\theta}) \hat{\phi}_p \quad (10)$$

윗식에서 $\hat{\cdot}$ 는 시스템의 추정치를 나타내며, i_{n-e} 가장 최근에 여자된 상의 전류이다. L_1 과 L_2 는 관측자 이득으로 오차가 0이 되도록 설계된다.

만약, 인덕턴스의 주기를 θ_r 라 하면, $H(\theta)$ 의 주기 역시 θ_r 이다. 이를 이용하여 식(6), (9), (10)은 다음과 같이 표현 가능하다.

$$\frac{d\hat{\phi}_p}{dt} = -R H_p(\hat{\theta} + \theta_T) \hat{\phi}_p + V_p + L_p (i_p - \hat{i}_p) \quad (11)$$

$$T = -\frac{\kappa}{J\omega} \frac{\partial H_j(\hat{\theta} + \theta_T)}{\partial \hat{\theta}} \hat{\phi}_j \quad (12)$$

$$\hat{i}_p = H_p(\hat{\theta} + \theta_T) \hat{\phi}_p \quad (13)$$

물론, 식(1), (3), (4), (5) 역시 위와 같은 방법으로 표현할 수 있다. 여기서 SRM의 실제식과 관측자 식을 이용하면 추정 오차 시스템을 다음과 같다.

$$\frac{d\hat{\phi}_p}{dt} = -R [H_p(\theta) \phi_p - H_p(\hat{\theta}) \hat{\phi}_p] - L_p \hat{i}_p \quad (14)$$

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = \hat{\omega} - L_1 \hat{i}_{n-e} \quad (15)$$

$$\frac{d\hat{\omega}}{dt} = -\frac{B}{J} \hat{\omega} + \frac{1}{J} T - L_2 \hat{i}_{n-e}$$

$$\hat{i}_p = i_p - \hat{i}_p = H_p(\theta) \phi_p - H_p(\hat{\theta}) \hat{\phi}_p \quad (16)$$

$$\hat{\theta} = \theta - \hat{\theta}, \hat{\omega} = \omega - \hat{\omega}, T = T - \hat{T}$$

식(14), (15), (16)의 오차시스템이 안정하도록 관측자 이득 L_1, L_2 를 정하면, 추정 오차는 0이 된다.

우선, L_p 를 $-R$ 로 하면 $\frac{d\hat{\phi}_p}{dt} = 0$ 이다[4]. 상 자속에 대한

미분이 0이므로 모델링 오차와 자속의 초기 오차가 0이면,

$\hat{\phi}_p = \phi_p - \hat{\phi}_p = 0$ 이다. 만약 고정자 저항과 인가 전압의 모델링 오차가 없다면, 그림2에서 각 상이 여자되는 순간에서는 자속과 전류가 0이 되므로 초기 오차가 0이다. 따라서 자속에 대한 추정 오차는 항상 없다고 할 수 있다. 그리고 식(16)에 의하여 자속과 전류의 초기 오차가 0이 되도록 선정된 \hat{i}_{n-e} 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\hat{i}_{n-e} = \begin{bmatrix} H_{n-e}(\theta) - H_{n-e}(\hat{\theta}) \\ H_{n-e}(\theta) - H_{n-e}(\hat{\theta}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{n-e} \\ \hat{\phi}_{n-e} \end{bmatrix} \quad (17)$$

즉, 전류의 오차는 $H_{n-e}(\theta) - H_{n-e}(\hat{\theta})$ 에 의하여 발생하고 이것은 곧 회전자 위치 θ 의 오차를 의미한다. 점차 $n-e$ 는 가장 최근에 여자된 상의 변수들을 의미한다. ϕ_{n-e} 는 상이 여자된 상태의 자속이므로 0보다 크다.

따라서 $\text{sgn}(\hat{i}) = \text{sgn}[H_{n-e}(\theta) - H_{n-e}(\hat{\theta})]$ 가 성립한다. 그리고 위치에 대한 오차가 어느정도 작으면 다음식이 성립한다.

$$\frac{\partial H_{n-e}(\theta)}{\partial \theta} \approx \frac{\partial H_{n-e}(\hat{\theta})}{\partial \hat{\theta}} = \kappa \quad (18)$$

따라서 다음 식이 성립한다.

$$\hat{i}_{n-e} = \kappa [\theta - \hat{\theta}] \begin{bmatrix} \phi_{n-e} \\ \hat{\phi}_{n-e} \end{bmatrix} \quad (19)$$

또한, 식(18)에 의하여 $T - \hat{T} = 0$ 이다.

위의 결과를 이용하면 식(15)는 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{\theta}} \\ \dot{\hat{\omega}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\kappa L_1 \hat{\phi}_{n-e} & 1 \\ -\kappa L_2 \hat{\phi}_{n-e} & -\frac{B}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\theta} \\ \hat{\omega} \end{bmatrix} \quad (20)$$

그런데 윗식은 식(19)의 선형적인 관계가 성립할 만큼 위치 오차가 작아야 한다.

식(17)을 식(13)에 의하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\hat{i}_{n-e} = \begin{bmatrix} H_{n-e}(\theta) - H_{n-e}(\hat{\theta} + \theta_T) \\ H_{n-e}(\theta) - H_{n-e}(\hat{\theta} + \theta_T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{n-e} \\ \hat{\phi}_{n-e} \end{bmatrix} \quad (21)$$

그리고 SRM은 인덕턴스의 주기에 해당하는 θ_r 를 주기로 회전자 위치의 물리적인 의미는 같으므로 $|\theta - \hat{\theta}| \leq \theta_T$ 이다. 따라서 식(21)의 변수가 어떠한 값을 가진 관계없이 다음식이 성립한다.

$$\ddot{\theta}_{n-e} = \kappa(\cdot) [\theta - \hat{\theta} + \theta_T], \quad \kappa(\cdot) > 0 \quad (22)$$

즉, 측정 전류의 오차와 $H(\theta)$ 에 관계 없이 위치 오차는 0보다 크다. $\kappa(\cdot)$ 는 시변을 의미한다. 그리고

$$-\frac{\partial H_{n-e}(\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial H_{n-e}(\hat{\theta} + \theta_T)}{\partial \hat{\theta}} = \kappa'(\cdot) [0 - \hat{\theta} + \theta_T] \quad (23)$$

$$\kappa'(\cdot) > 0$$

따라서 식(15)는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{\theta}} \\ \dot{\hat{\omega}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a(t) & 1 \\ -b(t) & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\theta} \\ \hat{\omega} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a(t) \\ -b(t) \end{bmatrix} \theta_T \quad (24)$$

$$a(t) = \kappa(\cdot)L_1 \hat{\phi}_{n-e}$$

$$b(t) = \kappa(\cdot)L_2 \hat{\phi}_{n-e} - \kappa'(\cdot) \frac{1}{J} \phi_{n-e}^2$$

$$c = \frac{B}{J}$$

식(24)은 $\theta_T=0$ 으로 놓았을 때 시스템이 안정하면, θ_T 수렴한다. 이를 위한 L_1, L_2 를 구하기 위하여 Lyapunov함수를 다음과 정의하고, 시간에 대한 그 미분을 구한다.

$$V(\hat{\theta}, \hat{\omega}, t) = \frac{1}{2} (\hat{\theta}^2 + \hat{\omega}^2) > 0 \quad (25)$$

$$\dot{V}(\hat{\theta}, \hat{\omega}, t) = -a(t) \left[\hat{\theta}^2 - \frac{(1-b(t))}{a(t)} \hat{\theta} \hat{\omega} + \frac{c}{a(t)} \hat{\omega}^2 \right] \quad (26)$$

시스템이 안정하기 위하여 식(26)이 0보다 작아야 한다[8]. 따라서 $b(t)=1$ 로 하고, $L_1 > 0$ 이면 시스템은 안정하다. 그런데 $b(t)=1$ 을 만족하기 위해서는 L_2 가 시변의 값을 가져야 한다. 이를 피하기 위하여 L_2 를 임의의 상수(constant)의 값으로 정하고 $a(t)$ 즉 L_1 의 값을 충분히 큰 값으로 정하면 시스템은 안정하다. 따라서 식(24)는 θ_T 수렴한다.

그런데 식(20)에서 L_1 을 정(+)의 값을 취할 경우 κ 가 부(-)의 값이면 불안정하게 된다. 따라서 식(18)을 만족하고, $\kappa < 0$ 으로 되는 시점을 $\theta_T = \Delta\theta$ 라 하면, 이 경우 $\theta_T = \Delta\theta$ 인 선을 따라 슬라이딩이 이루어진다. 그런데 $\theta, \hat{\theta}$ 는 계속 변화하는 값이므로 $\theta_T = \Delta\theta$ 의 값을 유지하여 $\kappa > 0$ 인 관계를 갖는 영역에 도달하여 수렴한다. 이러한 관계를 그림3에 도시하였다.

결론적으로 $\hat{\theta} = \theta - \hat{\theta}$ 는 0 또는 θ_T 로 수렴한다. 이들 두 위치에 대한 SRM 회전자의 물리적 의미는 동일하다.

4. 시뮬레이션

시뮬레이션 데이터는 표1과 같다.

회전자 극수	4 [개]
고정자 극수	6 [개]
권선 저항	1.68 [Ω]
최대 인덕턴스	35 [mH]
최소 인덕턴스	8 [mH]
관성 모멘트	0.09543 [Kg cm^2]
점성 마찰 계수	1.0205×10^{-4} [Nm/rad sec^{-1}]
부하 토크	0.205 [N cm]

표1 시뮬레이션 데이터

그림4는 초기 위치 오차에 따른 추정 오차의 수렴을 나타내고 있다. 그림에서 알 수 있듯이 0° 와 -90° 로 수렴하는 것을 볼 수 있다. 90° 는 6/4 SRM의 인덕턴스의 한 주기이다. 그림3의 (b)의 형태로 수렴하는 것을 알 수 있으며, (a)에 의하여 순간적인 변화를 갖는 부분이 생기는 것을 파악할 수 있다. 이때 $L_2=0$ 이다. 그림5는 L_1 값에 따른 추정 오차의 수렴 특성을 나타내었다. 식(26)에서 알 수 있듯이 L_1 의 값이 증가함에 따라 빠르게 수렴하는 것을 볼 수 있다. 그림6은 추정 토크의 수렴을 나타내고 있다. L_1 값에 따라 위치 추정 오차의 수렴이 달라지는 것을 알 수 있으며, 이는 위치 오차에 대한 빠른 보상에 의하여 가까운

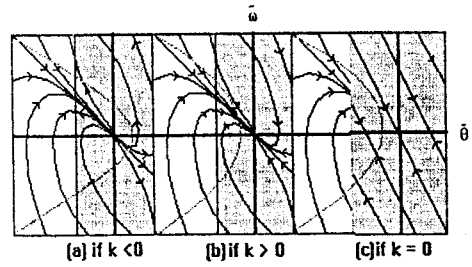


그림3 추정 오차의 상 계적

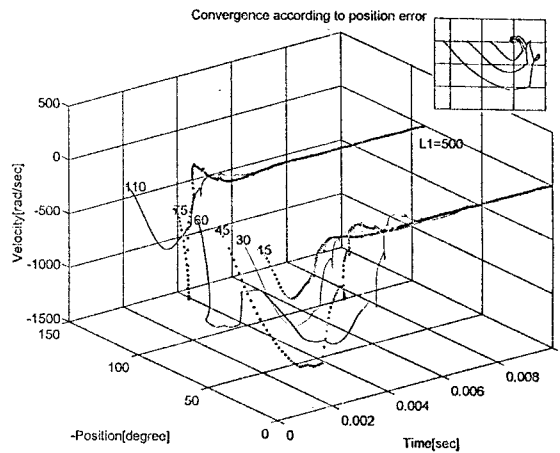


그림4 초기 오차에 따른 추정 오차의 수렴

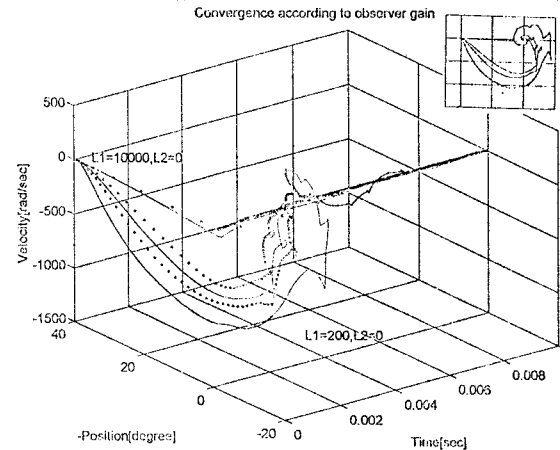


그림5 관측자 이득(L_1)에 따른 추정 오차의 수렴

곳으로 수렴함을 의미한다. 결국 L_1 의 값을 크게하면 가까운 위치로 수렴하게 할 수 있음을 알 수 있다. 그림7은 L_2 값에 의하여 진동을 하면서 수렴하는 것을 나타내었다. 식(20)에서 알 수 있듯이 L_2 에 의하여 진동이 이루어질 수 있다. 그리고 그림8은 전류의 추정 과정을 나타내고 있다.

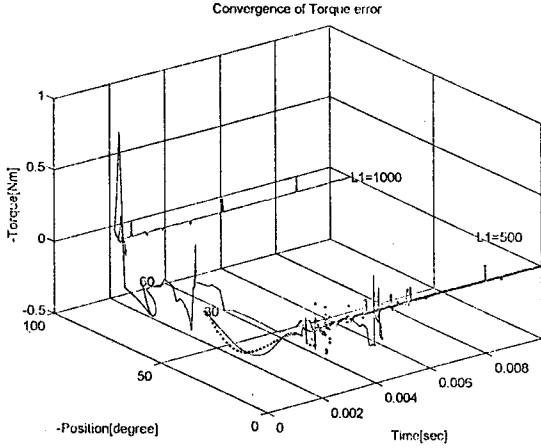


그림6 토크오차의 수렴

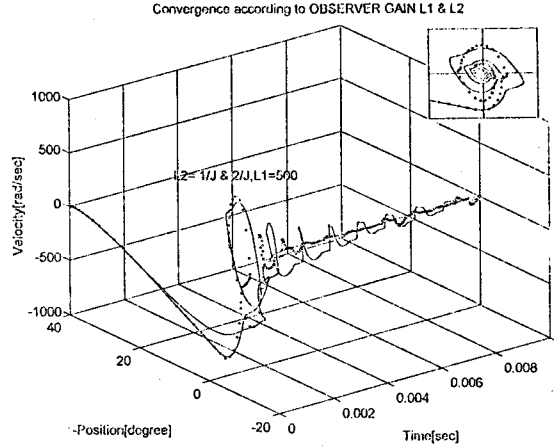


그림7 관측자 이득(L1)에 따른 추정 오차의 수렴

5. 결론

SRM은 효율적인 회전을 위하여 회전자 위치 정보가 필요하다. 따라서 본 연구는 직접적인 위치 측정 장비를 사용하지 않고 관측자 이론을 이용하여 회전자의 위치와 속도를 추정하는 방법을 다루었다.

전개된 연구에 따른 시뮬레이션 결과 관측자 이득(L_1)을 크게 할 경우 추정 오차가 빠르게 0 또는 한 주기 앞선 점으로 수렴함을 알 수 있었다. 이러한 주기에 대한 오차는 SRM 회전자의 물리적인 의미가 같으므로 속도의 제어를 목적으로 할 경우 문제가 되지 않는다. 그리고 이러한 방법으로 실험을 할 경우 관측자 이득이 너무 큰 경우 문제가 발생할 소지가 있으므로 저 이득의 경우에 대하여도 그 특성을 파악하였어 그 타당성을 보였다.

그런데 본 연구는 회전자 위치에 따른 인덕턴스 프로파일을 정확히 알고 있어야 하며, 자속과 인덕턴스가 선형적인 영역에서 동작하여야 한다. 이러한 문제가 발생하면 정상 상태 추정 오차가 발생한다. 이를 위한 연구와 실험이 진행 중에 있다.

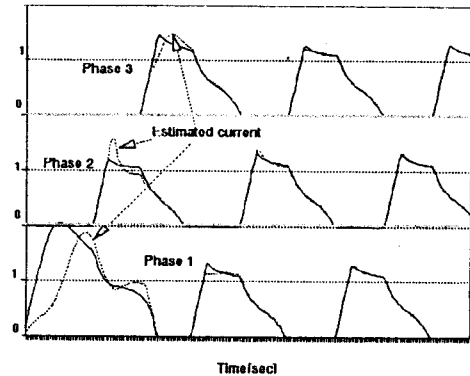


그림8 상 전류의 추정 오차

참고 문헌

- [1] T.J.E.Miller, *Brushless Permanent-magnet and Reluctance Motor Drives*, CLERENDON PRESS, OXFORD, 1989, pp.149-191.
- [2] R.Krishnan, "Switched Reluctance Motor Drives : Theory, Practice and Applications", An invited paper for publication in the first issue of MOTIONTECHNICS, September, 1989.
- [3] G.S.Buja, R.Memis and M.I.Valla, "Variable Structure Control of an SRM Drive", IEEE Trans. on Industrial Electronics, Vol.40, No.1, pp.56-63, FEB 1993.
- [4] Andrew Lumsdaine and Jeffrey H. Lang, "State Observer for Variable-Reluctance Motors", IEEE Trans. on Industrial Electronics, Vol.37,NO.2, pp.133-142, APR 1990
- [5] W.D.Harris, "Practical Indirect Position Sensing for a Variable Reluctance Motor", Master of Science in Electrical Engineering at the Massachusetts Institute of Technology, May 1987.
- [6] M.Ehsani, I.Musain, K.R.Ramani, S.Mahajan, "Sensor Elimination in SRM : an overview and stator of the art", Proc. of ISPE, pp.378-386, 1992.
- [7] D.G.Luenberger, "An Introduction to observers", IEEE Trans. Automat. Contr., Vol.AC-16, pp.596-602, 1971.
- [8] J.L.Salle and S.Lefschetz, *Stability by Liapunov's Direct Method with Applications*, ACADEMIC PRESS, London, 1961, pp.37-73.