

유도전동기의 전자장 해석

장 석명\*, 진 상구\*\*, 홍 성일\*\*, 김 영관\*\*, 김 태수\*\*\*  
 \*충남대학교, \*\*이천전기, \*\*\*한전기술연구원

The Analysis of a Induction Motor by using  
 Electromagnetic Field Theory

S.M. Jang\*, S.G. Jin\*\*, S.I. Hong\*\*, Y.G. Kim\*\*, T.S. Kim\*\*\*  
 \*Chungnam Nat'l Univ., \*\*Korea Electric Power Co.  
 \*\*Leechun Electric MFG. Co. LTD

Abstract

In this paper, for optimum design and good efficiency, the characteristics of a induction motor is analyzed by using electromagnetic field theory, Maxwell'equation with consideration of slot-teeth shape, materials, etc.

1. 서론

유도전동기의 효율적인 응용을 위해서는 치, 슬롯, 회전자/고정자/권선의 형상등 제반 물리현상을 세밀하게 포함하는 자기회로의 기하학적현상과 재질등을 충분히 고려하여 막스웰 방정식을 기본으로하는 전자장이론에 의하여 특성방정식을 유도하여 정밀하게 해석한 후, 이를 바탕으로 한 회로정수의 결정 및 등가회로를 구성하여 각종 주요 운전특성을 종합적으로 해석하는 것이, 최적설계를 위한 파라미터의 최적추출은 물론이고 더 나아가 시스템의 종합적인 최적화에 필수적이다. 즉 전자기적은 물론 기계동력학적인 특성해석을 통하여 유도전동기의 공급전원세어, 속도 및 위치등의 부하특성제어를 효율적으로 구현하게 된다. 또한 역으로 최적화기법을 통하여 설계파라미터의 최적결정등, 최적형상설계를 하였다 하더라도 최적성의 검증은 정밀하게 유도된 특성식을 토대로 한 시물레이션이 아니고서는 그 신뢰성을 검증하기는 어렵다. 본 연구에서는 이러한 필요성을 감안하여 운전특성에의 민감도를 고려한 최적의 설계파라미터 결정, 최적화 설계자료의 검증등이 가능하도록 시물레이션 할 수 있는 특성방정식을 전자장이론을 적용하여 유도한다.

2. 전자장 해석법의 적용

精密解析에 의하여 設計파라미터를 추출하는 설계값과 제작 후, 出力값의 誤差率의 최소화를 위하여 필수적인 사항이다. 즉

- (1) 최적화 설계기법에 의해 얻은 파라미터값이 운전특성에 어떤 정도로 영향이 있는 가를 보는 민감도를 검토한다.
- (2) 특성을 시물레이션 하기위한 알고리즘을 개발하여, 설계 파라미터를 최적으로 추출한다.

2.1 支配方程式과 解

전동기의 고정자와 회전자의 표면에는 슬롯과 치가 있어서 기하학적 구조 그대로는 해석할 수가 없다. 따라서 특성이 크게 영향받지 않는 범위 안에서 해석이 가능하도록 간이화한다. 이때의 일반적인 조건은 아래와 같다.

- ①자성체의 포화, 누설자속을 무시한다.
- ②변위전류를 무시한다.
- ③end effect / edge effect를 무시한다.
- ④여자전류는 z방향으로만 흐르며, 시간적, 공간적으로 정현적이다. 슬롯내부에 離散的으로 분포되어 있어서 그대로 취급하기가 어려우므로 아래와 같은 등가의 면전류가 분포된 것으로 취급한다. 또한 1, 5, 7...의 고조파항이 있지 만 기본 파만 생각하기로 하면

$$J_s = J_m e^{j(\omega t - \frac{\pi}{\tau} z)} \quad (2-1)$$

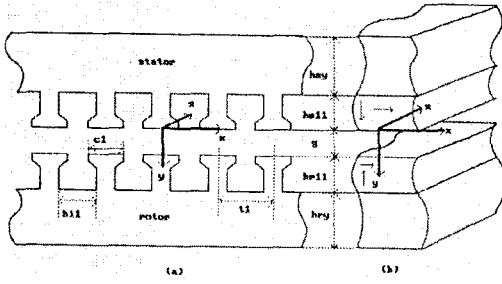
$$J_m = \frac{m(2W\sqrt{2} I_1)}{2p\tau} k_{wl} = \frac{\sqrt{2} mWI_1 k_{wl}}{p\tau} \quad [A/m] \quad (2-2)$$

m: 상 수, P: 극 쌍, W: 1상의 적렬도체수,  
 τ: 극간격, f: 주파수, q: 매상 매극당의 슬롯수

2.2. 해석 모델과 투자율, 도전율

해석을 용이하게 하기 위하여 원통형의 유도전동기를 축방향으로 그림(2.1)과같이 전개하여 펼친 구조로 취급한다. 즉 고정자와 회전자에는 齒와 슬롯이 주기적으로 배치되어 있으므로, 자속분포, 전류분포등이 달라지 투자율과 reluctance, 도전율등이 주기적으로 變한다. 투자율과 도전율이 x방향으로 주기적 4각펄스 형태의 함수가 되므로 이를 고려하여 특별한 취급을 해야한다. 또한 그림(a)를 그대로 취급하기가 매우 어려우므로 위의 조건 ④에서와 같이 면전류가 분포된 것으로 보며, 그림(b)와 같이 주기적 조건에 따라 영역을 분할한다.

- I 영역 ; 고정자의 철심부분
- II 영역 ; 고정자의 치-슬롯부분
- III 영역 ; 공 극 부분



(a) 유도전동기 실제모양의 적선형 전개도,  
 (b) 해석을 위한 모델과 영역분할도

그림 2.1 유도전동기의 실제모양과, 해석모델 및 영역분할도.

- IV 영역 ; 회전자 치-슬롯부분
- V 영역 ; 회전자의 철심부분
- VI 영역 ; 고정자의 코일단부분
- VII 영역 ; 코일단아래의 공극부분

으로 나누어 해석하기로 한다.

### 2.3. Ollendorff 의 모델과 Carter계수를 동시에 고려한 투자율, 도선율모델

#### 2.3.1 Ollendorff 모델

##### 1. 해석모델의 (II), (IV)영역에서 슬롯과 치의 배치를 고려한 투자율

전동기는 일반적으로 1차와 2차측에 치와 슬롯이 있는 구조이기 때문에 그 위치에 따라 자속분포, 자기저항, 도선율등이 달라지 맥동이 된다. 자성재료와 도선재료 자체가 비등방성의 투자율과 도선율로 이루어진 것이 되는데 이를 그대로 취급하기는 어렵기 때문에 특별한 취급이 요구된다. 이 경우 Ollendorff가 정의한 투자율과 도선율모델이 적용된다. 즉 x와 y방향으로 값이 일정하지 않은, 비투자율  $\mu_x, \mu_y$ 의 등방성 磁性體와 도체가 채워 지 실체의 자속과 같은 모양, 같은 크기의 등자속, 등자전류가 분포되는 것으로 취급한다. 슬롯-치를 고려한 비투자율 모델은 아래와 같다.

$$\mu_{i_x} = \frac{1 + \frac{b_{i_x}}{b_{i_s}}}{1 + \frac{b_{i_x}}{\mu_{i_m} \cdot b_{i_s}}} \quad (2-3)$$

$$\mu_{i_y} = \frac{1 + \mu_{i_m} \left( \frac{b_{i_y}}{b_{i_s}} \right)}{1 + \left( \frac{b_{i_y}}{b_{i_s}} \right) + \frac{(\mu_{i_m} - 1)(g' - g)}{h_{i_s} \cdot b_{i_s}}} \quad (2-4)$$

$$\mu_i = \sqrt{\mu_{i_x}^2 + \mu_{i_y}^2} \quad (2-5)$$

슬롯과 치를 고려한 도선율:

$$\sigma_i = \frac{k_{i_s}}{1 + \left( \frac{b_{i_s}}{h_{i_s}} \right)} \cdot \bar{\sigma} \quad (2-6)$$

i=1인 경우; 고정자측 파라미터

i=2인 경우; 회전자측 파라미터

### 2.3 支配方程式

#### 2.3.1 誘導

고정자면의 유효폭내에서 전류는 z방향으로 만 흐르므로 벡터포텐셜도 마찬가지로이다. 따라서 Maxwell의 電磁場方程式으로부터 유도된, 각 영역에서의 지배방정식은 아래와 같다.

(1) 슬롯과 치가 있는 (II), (IV)영역

1) (II)영역에서는 다상전선이 시행되어 회전자계를 발생하는 여자전류가 분포되어 있으므로

$$\nabla^2 A_{2z} = \mu_0 \mu_1 \cdot \sigma_1 \left[ \frac{\partial A_{2z}}{\partial t} \right] \quad (2-7)$$

2) (IV)영역은 회전자부분으로 V[m/s]로 운동을 하므로

$$\nabla^2 A_{4z} = \mu_0 \mu_2 \cdot \sigma_2 \left[ \frac{\partial A_{4z}}{\partial t} - V \times (\nabla \times A_{4z}) \right] \quad (2-8)$$

(2) 규소강판의 철심으로 이루어진 고정자의 (I), 공극의 (III), 회전자 (V)영역의 지배방정식은

$$\nabla^2 A_{jz} = 0 \quad (2-9)$$

j=1, 3, 5

(3) VI영역은 고정자의 코일단부분이므로

$$\nabla^2 A_{6z} = \mu_0 \mu_2 \cdot \sigma_2 \left[ \frac{\partial A_{6z}}{\partial t} \right] \quad (2-10)$$

(4) VII영역은 코일단 아래의 공극부분이므로

$$\nabla^2 A_{7z} = 0 \quad (2-11)$$

#### 2.3.2 지배방정식

그런데 (II), (IV)영역에서의 일반해는 시간적, 공간적으로 정현적이므로 지배방정식(2-8)은 아래와 같이 표현 된다.

$$A_z = A(y) e^{j(\omega t - \frac{x}{\tau})} \quad (2-12)$$

따라서 식( )은 아래와 같다.

$$\frac{d^2 A(y)}{dy^2} - a_k^2 A(y) = 0 \quad (2-13)$$

$$a_k = \frac{\pi}{\tau} \left( 1 + j \frac{\mu_0 \mu_k \cdot \sigma_k \cdot S_k \cdot V_y}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}}$$

단, k=1; 고정자의 2영역, k=2; 회전자의 4영역, k=3; 코일단 있는 6영역. 따라서 1에서는 고정자측이므로

$$\text{상대속도가 없어서 } s_1 = 1, \text{ 3에서는 } \mu_3 = 1, \sigma_3 = \bar{\sigma},$$

또한 (I), (III), (V), (IV), (VII)영역에서의 지배방정식은

$$\frac{d^2 A(y)}{dy^2} - \left( \frac{\pi}{\tau} \right)^2 A(y) = 0 \quad (2-14)$$

(4)각 영역 해의 종합표현

각 영역에서 벡터포텐셜에 관한 일반해를 종합적으로 나타내

기 위하여 매트릭스시스템으로 표현하면 아래와 같다.

$$\begin{bmatrix} A_{1z} \\ A_{2z} \\ A_{3z} \\ A_{4z} \\ A_{5z} \\ A_{6z} \\ A_{7z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & & & & & & \\ & C_2 & & & & & \\ & & C_3 & & & & \\ & & & D_2 & & & \\ & & & & D_3 & & \\ & & & & & D_4 & \\ & & & & & & D_5 \\ & & & & & & & D_6 \\ & & & & & & & & D_7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e^{\frac{\pi}{\tau}y} \\ e^{-a_{1y}} \\ e^{\frac{\pi}{\tau}y} \\ e^{-a_{2y}} \\ e^{-a_{3y}} \\ e^{-a_{4y}} \\ e^{-\frac{\pi}{\tau}y} \\ e^{-a_{5y}} \\ e^{-\frac{\pi}{\tau}y} \\ e^{-a_{6y}} \\ e^{-\frac{\pi}{\tau}y} \end{bmatrix} \cdot e^{j(\omega t - \frac{\pi}{\tau}x)} \quad (2-15)$$

#### 2.4.4 경계조건

앞절에서 구한 각 영역의 해에 포함된 상수들 결정하기 위하여, 각 영역에서의 물리적인 조건과, 자속밀도와 벡터퍼텐셜의 관계인  $B = \nabla \times A$ 로부터  $H_x = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial A}{\partial y}$ ,  $B_y = -\frac{\partial A}{\partial x}$  이므로 아래와 같은 경계조건 등식이 설정된다.

(1)  $y = -h_{1r}$

$$\frac{1}{\mu_0 \mu_m} \cdot \frac{\partial A_{1z}}{\partial y} \Big|_{y=-h_{1r}} = \frac{1}{\mu_0 \mu_1} \cdot \frac{\partial A_{2z}}{\partial y} \Big|_{y=-h_{1r}} \quad (2-16)$$

$$\frac{\partial A_{1z}}{\partial x} \Big|_{y=-h_{1r}} = \frac{\partial A_{2z}}{\partial x} \Big|_{y=-h_{1r}} \quad (2-17)$$

(2)  $y=0$

$$\frac{1}{\mu_0 \mu_1} \cdot \frac{\partial A_{2z}}{\partial y} \Big|_{y=0} - \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{\partial A_{3z}}{\partial y} \Big|_{y=0} = J_m \quad (2-18)$$

$$\frac{\partial A_{2z}}{\partial x} \Big|_{y=0} = \frac{\partial A_{3z}}{\partial x} \Big|_{y=0} \quad (2-19)$$

(3)  $y=g'$

$$\frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{\partial A_{3z}}{\partial y} \Big|_{y=g'} = \frac{1}{\mu_0 \mu_2} \cdot \frac{\partial A_{4z}}{\partial y} \Big|_{y=g'} \quad (2-20)$$

$$-\frac{\partial A_{3z}}{\partial x} \Big|_{y=g'} = -\frac{\partial A_{4z}}{\partial x} \Big|_{y=g'} \quad (2-21)$$

(4)  $y = g' + h_{2r}$

$$\frac{1}{\mu_0 \mu_2} \cdot \frac{\partial A_{4z}}{\partial y} \Big|_{y=(g'+h_{2r})} = \frac{1}{\mu_0 \mu_m} \cdot \frac{\partial A_{5z}}{\partial y} \Big|_{y=(g'+h_{2r})} \quad (2-22)$$

$$-\frac{\partial A_{4z}}{\partial x} \Big|_{y=(g'+h_{2r})} = -\frac{\partial A_{5z}}{\partial x} \Big|_{y=(g'+h_{2r})} \quad (2-23)$$

#### 2.4.6 전계 및 자계

자속밀도와 벡터퍼텐셜의 관계인  $B = \nabla \times A$  에서

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y}, \quad B_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x} \quad (2-23)$$

#### 2.4.7 와전류분포특성

회전자에서의, 침투깊이를 고려한 와전류분포현상을 식 (2-17)로부터 파악할 수 있다.

$$J_{4z} = -\sigma_2 \left( \frac{\partial A_{4z}}{\partial t} \right) + V \frac{\partial A_{4z}}{\partial x} \\ = j\sigma_2 \frac{\pi}{\tau} s V_s (C_4 e^{-a_{1y}} + D_4 e^{a_{2y}}) \cdot e^{j(\omega t - \frac{\pi}{\tau}x)} \quad (2-24)$$

#### 2.4.7 임피던스와 회로정수

전자장이론을 적용하여 유도한 벡터퍼텐셜, 자계, 전계, 전류에 의하여 등가회로 소자인 임피던스, 저항, 인덕턴스를 구하고 이들이 속도등의 제반조건에 따른 변화특성을 검토한다. 진기적인 에너지가 기계적인 회전력으로 변환되는 2차측 표면에서의 파동임피던스는 전계와 자계의 점진성분의 비이므로 아래와 같이 표현 할 수 있다.

$$Z = \frac{E}{H} \quad (2-25)$$

또한 전계의 세기 E 는 벡터퍼텐셜 A와 아래와 같은 관계가 있다.

$$Z = R + j X \quad (2-26)$$

따라서 저항과 리액턴스는

$$R = \text{Re}(z) \quad (2-28)$$

$$X = \text{Im}(z) \quad (2-29)$$

#### 2.4.8 回轉力 特性

4영역의 공극과 회전자의 경계면에서는 공극자속밀도와, 회전자측에 유기되는 와전류가 서로 작용하여 힘을 발생시키는 데, 포인팅정리에 의한 그 시간 평균값은 아래와 같이 표현된다.

$$f_x = \frac{1}{2} \text{Re}(-J_{4z} B_{4y}^*) \quad [N/m^2] \quad (2-30)$$

따라서 유도전동기 전체에서 발생되는 회전력은 아래와 같이 구할수있다.

$$T = \int_0^{2\pi} \int_0^L f_x \cdot d\theta \cdot d\omega \quad (2-31)$$

단 D는 회전자 직경[m], L:회전자의 동풍토크를 고려하지 않은 적층 두께[m]

#### 2.4.9 손실특성

표피효과를 고려 한 와전류손실을 4영역의 와전류식으로 부터 구 할 수 있다.

표피효과는 속도에 따라 다르므로 속도 또는 슬립의 함수이다.

$$P_L = \int \int \int \rho J^2 dV \quad [W] \quad (2-32)$$

참고문헌

1. E.Mishkin "Theory of the squirrel cage induction machine derived directly from Maxwell's field equations" Quartly Journal Mech. and Applied Maths. VII, pt.4, 1954.

본 연구는 한국전력공사 지원의 일부에 의하여 수행되었음