

非線形不規則波의 群速度의 統計學的 特性

Statistical Properties of Group Velocity in Nonlinear Random Waves

趙 容 駿*

1. 서언

최근 천해역에서의 파랑의 변화양상에 대한 많은 연구가 수행되어 괄목할만한 진전을 보였으나 그 연구범위가 단일한 형태의 파랑을 대상으로한 확정론적인 접근 방법에 치우쳐 있었다. 그러나 海面의 상당 부분은 언제나 불규칙한 波浪에 의해 점유되어 있다. 이러한 불규칙성은 바람의 mechanical energy가 해수면으로 전이되는 과정에 기인하는 데 [Phillips, 1980] 따라서 파랑장의 해석에는 통계적인 방법이 이용되곤한다. 이제까지의 風波에 대한 통계학적인 기술은 대개 선형파랑이론과 Gaussian 확률분포를 따른다는 가정하에 수행되었다. 완만한 기상조건하에서는 선형파랑이론은 상당한 신뢰성을 갖는 것으로 알려졌으나 험한 기상조건하에서 생성된 파랑은 급한 경사를 갖게되고 성분파랑간의 상호작용이란 문제가 대두됨으로써 선형파랑이론은 그 정당성을 상실하게된다. 또한 선형파랑이론과 더불어 흔히 행해지는 가정은 파랑의 頻度 스펙트럼이 narrow banded하다는 것인데 이러한 narrow banded 가정 역시 험한 기상조건하에서 생성된 파랑에 대한 정확한 기술은 되지못한다. 따라서 악천후에서 생성된 파랑에 대한 모형이 갖추어야할 조건은 첫째 narrow banded 가정은 해제되어야하며 둘째 비선형 불규칙 파랑모형이 확립되어야한다. 단일한 주파수로 구성된 파랑의 경우 비선형 파랑은 파랑의 경사가 작고 攝動理論이 적용될 수있다는 가정하에 Stokes waves에 의해 기술될 수 있으며 많은 성분파로 구성된 파랑의 경우 Longuet-Higgines [1963] 가 섭동이론을 사용하여 파랑현상으로인한 해수면의 변위에 대한 모형을 유도해냈다. 이 모형에 따르면 해수면의 변위는 선형 성분파와 선형 성분파들간의 非共振 상호작용에 의해 야기된 2차 보정항의 和로 구성되는데 2차보정항은 다시 단파 와 장파로 구분되며 이때 해수면의 변위는 단파의 영향으로 연직방향으로 왜곡되며 평균해수위는 장파에의해 파랑의 振幅이 큰 영역에서는 저하되고 그밖의 영역에서는 상승한다. 이와같이 2차 보정항으로 인한 變調는 파랑예보, 파랑특성의 해석, 해양구조물의 동적거동등에 증대한 영향을 미치게되며 따라서 2차 보정항으로 인한 變調가 비선형 불규칙 파랑장에 미치는 영향의 통계적 특성에 대해 규명하는 것은 상당히 의미있는 일이라 하겠다. 1963년에 Longuet-Higgines의 비선형 불규칙 파랑모형이 제안된 이래 이 모형이 갖는 복잡성으로 인해 비선형 불규칙 파랑장의 통계적

* 서울 시립대학교 토목공학과

특성에 대한 연구는 큰 진척을 보지 못했으나 Tayfun [1986] 이 파랑의 頻度 스펙트럼이 narrow banded 할 경우 비선형 불규칙 파랑은 진폭이 변조되는 carrier wave의 형태로 간략화될 수 있다는 것을 증명한 이후 threshold crossing rate, 해수면의 변위가 정점에 이르는 stochastic event의 확률밀도함수 (PDF)가 밝혀지는 등 많은 발전을 보았으나 위에서 언급한대로 narrow banded 가정은 풍파가 그 생성영역을 벗어나 전이해 가면서 side band instability등으로 인해 頻度 스펙트럼의 폭은 증가한다는 사실을 고려할 때 비현실적이다 [Hwang, 1983]. 최근에 임의의 band 폭을 갖는 비선형 불규칙 파랑에 대한 Longuet-Higgines의 모형보다 간략한 형태의 모형을 찾고자하는 연구가 진행되어 [Tung, 1989] 심해에서 2차 보정항으로 인한 變調중 장파에 의한 기여부분이 상대적으로 작은 에너지를 갖는다는 관측자료를 바탕으로 임의의 band폭을 갖는 비선형 파랑에도 적용이 가능한 모형이 제시되었고 이 모형을 바탕으로 Cho [1992] 등은 해양구조물 설계에 중요한 자료를 제공하는 파봉의 확률밀도함수를 유도해냈다. 최근에 Tayfun [1992]은 Gram-Charlier series를 사용하여 2차보정항중 단파변조만을 고려하여 파랑의 包絡線과 위상함수에 대한 확률밀도함수를 유도하였으며 비선형 항으로 인해 위상함수는 nonuniform하게 분포한다는 사실을 규명하여 Tsunami 혹은 태풍으로 인한 풍파의 예경보에 필수적인 群速度 (group velocity)의 통계적 특성에 2차보정항의 장파와 단파 변조가 미치는 영향이 지대하리라 예상되어 이에 대한 연구가 시급한 실정이다.

2. 研究內容 및 方法

Tick [1959], Longuet-Higgins [1963], Sharman과 Dean [1979]등에 의하면 파랑현상으로 인한 해수면의 변위 ζ 는 다음과 같이 주어지며

$$\zeta = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cos \chi_i + \frac{1}{2g} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_i a_j \omega_i^2 \cos(\chi_i + \chi_j) - \frac{1}{2g} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j>1}^{\infty} a_i a_j (\omega_j^2 - \omega_i^2) \cos(\chi_j - \chi_i) \quad (1)$$

여기서 total phase χ 는 $k \cdot x - \omega \cdot t + \varepsilon$ 로 주어지며 k 와 ω 는 각각 파수와 파빈도수이며 ε 은 $[0, 2\pi]$ 구간에 균등하게 분포되어있는 random phase이다. 방정식 (1)에서 2차보정항은 두번째 항과 세번째 항의 和로 구성되는데 이 중 두번째 항은 단파 변조를 나타내며 세번째 항은 장파 변조를 설명하는 데 wave group, beat의 형성과 관련하여 잘 알려져 있으며 그 생성과정은 Radiation stress [Longuet-Higgins 와 Stewart, 1964] 로 설명된다. 방정식 (1)은 다음과 같이 표현할 수 있으며 [M. A. Tayfun, 1992]

$$\zeta(t) = A(t) \cos \varphi(t) \quad (2)$$

여기서 $A(t)$, $\varphi(t)$ 는 각각 nonlinear random waves의 envelope process 와 total phase process 이며 이때 $A(t)$ 는 nondissipative media 에 대해 다음과 같은 evolution 방정식을 만족시키며

$$\frac{\partial A}{\partial t} + C_g \frac{\partial A}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

따라서 군속도 C_g 는 다음과 같이 주어진다.

$$C_g = -P / Q$$

여기서 P 와 Q 는 다음과 같다.

$$P = \frac{\partial A}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial A}{\partial t}$$

이상과 같이 nonlinear random wave field에서 C_g 의 확률밀도함수와 같은 통계적 특성을 구하기 위해서는 envelope process의 spatial, temporal variation rate 가 필요한 데 이 물리량은 방정식 (1)과 (2)에서 구할 수 있으며 Mapping technique [Cho외, 1992]을 적용하면 nonlinear random wave field에서 군속도의 확률밀도함수를 구할 수 있으리라 사료되며 그 물리적 특성 또한 그 모습을 들어내게 된다. 즉, mapping technique을 적용하면 군속도의 확률밀도함수는 다음과 같이 주어지며

$$\text{PDF of } C_g = \int \text{PDF of } P \text{ and } Q \cdot \text{Jacobian}^{-1}[(P, Q)/(C_g, \text{Dummy})] d \text{ Dummy}$$

여기서 Dummy는 보조적으로 도입된 불규칙 변수이다.

3. 國內外 研究動向

風波는 그 생성과정의 특성과 전이과정에서 야기되는 instability 등으로 인해 항상 불규칙하다. 따라서 풍파에 대한 정확한 기술은 여러 통계적인 방법을 이용하는 것인 데 그 중 확률밀도함수가 가장 기본적이라 하겠다. 그러나 충분한 이론의 부재등으로인해 그동안 풍파의 통계적 성질에 대한 연구는 선형파랑이론과 Gaussian 확률분포를 근간으로 하여 수행되었다. 완만한 기상조건하에서는 선형파랑이론은 상당한 신뢰성을 갖는 것으로 알려졌으나 험한 기상조건하에서 생성된 파랑은 급한 경사를 갖게되고 성분파랑간의 상호작용이란 문제가 대두됨으로써 선형파랑이론은 그 정당성을 상실하게된다. 또한 선형파랑이론과 더불어 흔히 행해

지는 가정은 파랑의 頻度 스펙트럼이 narrow banded하다는 것인데 이러한 narrow banded 가정 역시 side band instability 등을 고려할 때 風波에 대한 정확한 기술은 되지못한다. 단일주파수로 구성된 파랑의 경우 비선형 파랑은 파랑의 경사가 작고 擾動理論이 적용될 수있다는 가정하에 Stokes waves에 의해 기술될 수 있으며 많은 성분파로 구성된 파랑의 경우 Longuet-Higgines [1963] 가 섭동이론을 사용하여 파랑현상으로인한 해수면의 변위에 대한 모형을 유도해냈다. 1963년에 Longuet-Higgines의 비선형 불규칙 파랑모형이 제안된 이래 이 모형이 갖는 복잡성으로 인해 비선형 불규칙 파랑장의 통계적 특성에 대한 연구는 큰 진척을 보지 못했으나 Tayfun [1986] 이 파랑의 頻度 스펙트럼이 narrow banded 할 경우 비선형 불규칙 파랑은 진폭이 변조되는 carrier wave의 형태로 간략화될 수 있다는 것을 증명한 이후 threshold crossing rate, 해수면의 변위가 정점에 이르는 stochastic event의 확률밀도함수가 밝혀지는 등 많은 발전을 보았으나 위에서 언급한대로 narrow banded 가정은 풍파가 그 생성영역을 벗어나 전이해 가면서 Stokes wave의 side band instability등으로 인해 頻度 스펙트럼의 폭은 증가한다는 사실을 고려할 때 비현실적이다 [Hwang, 1983]. 최근에 Longuet-Higgines의 모형보다 간략한 형태의 모형을 찾고자하는 연구가 진행되어 [Tung, 1989] 심해에서 2차 보정항으로 인한 變調중 장파에 의한 기여부분이 상대적으로 작은 에너지를 갖는다는 관측자료를 바탕으로 임의의 band폭을 갖는 비선형 파랑에도 적용이 가능한 모형이 제시되었고 이 모형을 바탕으로 Cho [1992] 등은 해양구조물 설계에 중요한 자료를 제공하는 파봉의 확률밀도함수를 유도해냈다. 최근에 Tayfun [1992]은 Gram-Charlier series를 사용하여 2차보정항중 단파변조만을 고려하여 파랑의 包絡線과 위상함수에 대한 확률밀도함수를 유도하였고 비선형 항으로 인해 위상함수는 nonuniform하게 분포한다는 사실을 규명하였다. 그러나 이제까지의 연구는 Stokes wave 모형의 채택으로 인하여 Radiation stress에 의해 야기된 장파 변조항을 무시함으로써 비선형 항이 미치는 영향에 대한 局地적인 (small length scale) 해석에 치우칠 수밖에 없어 Tsunami 혹은 풍파의 예경보에 정확성을 기할 수 없었다.

4. 참고문헌

Abramowitz, M., and I. A. Stegun, Handbook of mathematical Functions, Dover Publications, New York, 1968

Battjes, J. A., Computation of set-up, longshore currents, run-up and overtopping due to wind-generated waves, in Communications on hydraulics, Rep. 74-2, Dept. of Civil Eng., Delft Univ. of Technol., Delft, The Netherlands, 1974.

- Borgman, L. E., A statistical theory for hydrodynamic forces on objects, Tech. Rep. HEL-9-6, Hydraul. Eng. Lab., Univ. of California, Berkely, 1965
- Cartwright, D. E., and M. S. Longuet-Higgins, The statistical distribution of the maximum of a random function, Proc. R. Soc. London, Ser. A, 237, 212-232, 1956
- Cho, Y. J., and T. H. Yoon, Peak distribution of nonlinear random waves of finite bandwidth, Proceedings of the Sixth IAHR international symposium on stochastic hydraulics, 299-312, 1992
- Hung, N. E., S. R. Long, C. C. Tung, Y. Yuen and L. F. Bliven, A unified two parameter wave spectral model for a general sea state, J. fluid Mech., 112, 203-224, 1981
- Longuet-Higgins, M. S., The effect of nonlinearities on statistical distributions in the theory of sea waves, J. Fluid Mech., 17, 459-480, 1963.
- Papoulis, A., Probability, random variables, and stochastic processes, Mcgraw-Hill Book Co., New York, 1965
- Phillips, O. M., The dynamics of the upper ocean, Cambridge University Press, New York, 1980
- Tayfun, M. A., R. A. Dalrymple and C. Y. Yang, Random wave-current interactions in water of varying depth, Ocean Engineering, Vol. 3, No. 6, 403-420, 1976
- Tayfun, M. A., J. M. Lo, Envelope and Phase in a nonlinear wave field, J. Geophysical Research (appeared)
- Tung, C. C., N. E. Huang, Y. Yuen and S. R. Long, Probability function of breaking limited surface elevation, J. of Geophysical Research, to appear
- Yoo, D. H., Mathematical modeling of wave-current interacted flow in shallow waters, A thesis submitted to the Univ. of Manchester in partial fulfilment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy, 1896