最大 엔트로피方法에 의한 스펙트럼 推定에 관한 小考

A Note on Spectral Estimation by the Method of Maximum Entropy

朴恩珍*, 吳世範*, 韓相大* 片宗根*

1. 緖 論

學問의 어느 分野든, 어느 分野의 어느 한 가지든 그 出發点으로 거슬러 올라 가기란 결코 쉬운 일이 아니다. 不規則 資料의 스펙트럼分析이야 古典的인 方法이지만 그 分析方法중 Burg(1967)에 의해 제안된 엔트로피(entropy) 概念을 利用한 方法은 그 出發点을 明確하게 理解하기가 손쉽지 않다. 차제에 最大엔트로피方法(Maximum Entropy Method : MEM)을 復習하고, 그것이 어떻게 스펙트럼 推定에 應用되는가를 整理함은 나름대로 의의가 있을 것이다. 本 稿는 주로 A. Papoulis의 論文(1981)과 敎科書(1991)를 참고하였음을 밝히는 바이다.(이하에서 쪽수만 적어 놓으면 Papoulis교과서의 쪽수임을 주지하기 바란다.)

2. 豫 測

不規則 信號 $s(n)$의 미래値 $s(n+1)$을

$$\hat{s}_N(n+1)=a_1^N s(n)+\cdots+a_N^N s(n-N+1)=\sum_{k=1}^{N} a_k^N s(n-k+1) \tag{2.1}$$

과 같이 N個의 가장 최근値 $s(n-k)$들로 나타내고자 한다. 豫測誤差의 自乘平均을 最小化하는 加重値組 a_k^N는 $s(n)$의 前方豫測量(1段階)으로 불리우는 크기 N의 FIR濾過函數(pp. 411,500)를 定義한다. a_k^N의 上添字 N은 豫測量의 크기를 나타낸다. $s(n)$이 定常이므로 最適 a_k^N은 n과 독립이다. 그러므로 式(2.1)의 n에 우리는 임의의 값을 줄 수 있다. 前方豫測量誤差를

$$\hat{e}_N(n)=s(n)-\hat{s}_N(n) \tag{2.2}$$

와 같이 나타내면

$$E[\hat{e}_N(n)s(n-k)]=0 \qquad 1\le k\le N \tag{2.3}$$

이고, 이는

$$\begin{aligned}
R(0)\,a_1^N &+ R(1)\,a_2^N+\cdots+R(N-1)\,a_N^N=R(1)\\
R(1)\,a_1^N &+ R(0)\,a_2^N+\cdots+R(N-2)\,a_N^N=R(2)\\
&\vdots\\
R(N-1)\,a_1^N &+ R(N-2)\,a_2^N+\cdots+R(0)\,a_N^N=R(N)
\end{aligned} \tag{2.4}$$

와 같이 豫測量係數 a_k^N을 $s(n)$의 $N+1$個의 自己相關 $R(m)$ $(m=0,\cdots,N)$ 으로 나타내고 있다.

式(2.4)의 解를 구하려면 다음 行列의 逆行列을 구하여야 한다.

$$\begin{bmatrix} R(0) & R(1) & \cdots & R(N-1)\\ R(1) & R(0) & \cdots & R(N-2)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ R(N-1) & R(N-2) & \cdots & R(0)\end{bmatrix} \tag{2.5}$$

---

* 明知大學校 土木工學科 (Department of Civil Eng., Myong Ji Univ.,Seoul 120-728 Korea)

이 行列은 Toeplitz型이라 불리우는 特殊形態이고, Levinson 演算方式으로 알려져 있는 單純反復法에 의해 쉽게 逆行列이 구해진다.

自乘平均推定誤差 P_N은

$$\hat{P}_N = E[\ \hat{e}_N^2(n)] = E[\hat{e}_N(n)s(n)] = R(0) - \sum_{k=1}^{N} a_k^N R(k) \tag{2.6}$$

이고, 豫測誤差는 式(2.2)에서 보다시피

$$\hat{e}_N(n) = s(n) - \sum_{k=1}^{N} a_k^N s(n-k) \tag{2.7}$$

으로서 入力 $s(n)$과 系函數

$$\hat{H}_N(z) = 1 - \sum_{k=1}^{N} a_k^N z^{-k} \tag{2.8}$$

을 가진 系의 出力이다. 이 系는 前方誤差濾過函數로 불리울 것이다.

3. 自己回歸過程

크기 M의 自己回歸過程(Autoregressive Process: AR)이란 다음의 漸化式을 만족하는 不規則信號 $s(n)$을 말한다.

$$s(n) - c_1 s(n-1) \cdots c_M s(n-M) = \zeta(n) \tag{3.1}$$

여기서 $\zeta(n)$은 定常白色雜音으로서

$$R_{\zeta\zeta}(m) = \sigma^2 \delta(m) \qquad S_{\zeta\zeta}(z) = \sigma^2 \tag{3.2}$$

을 가진다.(pp.324, 320)(Brigham 1974 pp 225-230)

定義상 $s(n)$은 入力 $\zeta(n)$과 系函數

$$T(z) = \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^{M} c_k z^{-k}} \tag{3.3}$$

를 가진 線形系의 出力이다.

이 系가 安定하다면 $s(n)$은

$$s(n) = \sum_{r=0}^{\infty} h(r)\zeta(n-r) \tag{3.4}$$

로 되는 定常過程이고, 여기서 $h(n)$은 $T(z)$의 因果性逆變換이다. 이는 어떤 $k \geq 1$에 대해서도 確率變數 $s(n-k)$는 $\zeta(n)$의 과거値만의 線形組合이라는 사실을 意味하므로

$$E[s(n-k)\zeta(n)] = 0 \qquad\qquad k \geq 1 \tag{3.5}$$

이 된다.

$s(n)$의 豫測量 $\hat{s}_N(n)$ $(N \geq M)$을

$$\hat{s}(n) = c_1 s(n-1) + \cdots + c_M s(n-M) \tag{3.6}$$

으로 하면 豫測量誤差 $\hat{e}_N(n) = s(n) - \hat{s}_N(n)$이 $\zeta(n)$過程이 되어

$$\hat{e}_N(n) = \zeta(n) \tag{3.7}$$

이다. 그러므로 直交條件(式(2.3))이 자동으로 만족되고 自乘平均誤差

$$P_N = \hat{E}[e_N^2(n)] = E[\zeta^2(n)] = \sigma^2 \tag{3.8}$$

이 된다.

式(3.6)의 표기를 式(2.1)과 같이 하면

$$a_k^N = \begin{cases} c_k & 1 \le k \le M \\ 0 & M < k \le N \end{cases} \tag{3.9}$$

이다.

그리고 式(2.8)에서 정의한 $\hat{H}_N(z)$를 상기하면

$$T(z) = \frac{1}{\hat{H}_N(z)} \tag{3.10}$$

임을 알 수 있다.

분명히 $s(n)$은 $\zeta(n)$入力에 대한 $T(z)$의 出力이다. $S(z)$를 $s(n)$의 動力스펙트럼이라 하면 式(3.10)로 부터

$$S(z) = \frac{S_{\zeta\zeta}(z)}{\hat{H}_N(z)\hat{H}_N(1/z)} \tag{3.11}$$

임을 알 수 있고, $S_{\zeta\zeta}(z) = \sigma^2$이므로

$$\overline{S(w)} \equiv S(e^{iwt}) = \frac{\sigma^2}{\left| 1 - \sum_{k=1}^{M} c_k e^{-ik\omega T} \right|^2} \tag{3.12}$$

이다.

4. 最大 Entropy

마지막으로 全極模型이 最大엔트로피原理의 結果임을 보일 것이다. 問題를 反復하면 不規則過程 $s(n)$의 自己相關 $R(m)$의 $N+1$個의 값들 $R(0) \cdots R(N)$이 주어져 있고, 動力스펙트럼 $\overline{S}(w)$를 推定하고자 한다. $s(n)$의 統計量은 確率變數 $s(n), s(n-1), \cdots, s(n-r)$의 結合密度函數로 결정된다. 따라서 最大엔트로피方法을 적용하기 위해서는, 이러한 RV의 엔트로피 $H(s_0 \cdots s_r)$를 最大化하고, $r \to \infty$일 때의 極限値를 구하기 위해 未知의 $R(m)$값들을 결정해야 한다. 이것은 주어진 制約條件에 대해 $s(n)$의 엔트로피率 H_s를 最大化하는 것에 상응한다.

세가지 證明이 제시되어 있다. 처음 두개는 H_s의 最大化를 포함한다. 세번째 證明에서, 우리는 $H(s_0 \cdots s_{N+1})$을 最大化 함으로써 $R(N+1)$을 결정하고, 이렇게 결정된 $R(N+1)$을 가지고 계속이 過程을 진행하게 된다. 이 方法은, 주어진 制約條件에 대해 $H(s_0 \cdots s_N \cdots s_{N+k})$를 最大로 하지 않기 때문에, 의문시 된다. 그러나 $k \to \infty$로 되는 極限에서 結果는 맞을 것이다.

이 方法들 중 반복법인 세번째 방법만 소개하겠다. 첫번째 反復에서 RV $s(n), s(n-1), \cdots, s(n-N-1)$의 엔트로피 H를 最大化하기 위한 $R(N+1)$을 결정한다. 이를 수행하기 위해, 우리는 $R(N+1)$이 정해져 있다는 가정에서 출발하여, 最大 H에 대한 위의 RV의 結合密度函數를 결정해야 한다. 이러한 RV이 平均이 0인 結合正規確率變數인 경우에 H가 最大가 된다. 이 경우에

$$H = \ln\sqrt{(2\pi e)^{N+1}\Delta} \tag{4.1}$$

이고

여기서

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} R(0) & R(1) & \cdots & R(N+1) \\ R(1) & R(0) & \cdots & R(N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R(N+1) & R(N) & \cdots & R(0) \end{vmatrix}$$

이다. 위의 行列式은 $R(N+1)$에 대해 陰이 아닌 2次이고 다음과 같은 條件에서 最大가 된다.

$$R(N+1)=\sum_{k=1}^{N}a_k^N R(N+1-k) \qquad (4.2)$$

여기서 係數들 a_k^N은 式(2.4)를 만족한다. 이렇게 결정된 $R(N+1)$를 가지고, 우리는 계속 反復하여, r번째에서는 RV $s(n), s(n-1), \cdots, s(n-N-1)$의 엔트로피를 最大化하는 $R(N+r)$을 결정한다. 이것은 다음과 같은 外揷公式을 만들게 된다.

$$R(N+r) = \sum_{k=1}^{N}a_k^N R(N+r-k) \qquad (4.3)$$

크기 $N+r$의 $s(n)$의 豫測量의 係數 a_k^{N+r}은 또다시 式(2.4)係를 만족하는데 여기서 N이 $N+r$로 바뀌었을 따름이다. 이와 式(4.3)으로부터

$$a_k^{N+r} = 0 \qquad (\text{단, } N-k \le N+r)$$

이다. 이는 크기 N의 豫測量이 또한 그보다 더 큰 豫測量으로 된다는 것을 보여준다. : 따라서, $s(n)$은 크기 N의 AR過程이고, 그의 動力스펙트럼은 全極函數이다.

5. 計算例

資料를 自動 生成할 겸 스펙트럼의 尖頭値를 잘 나타낸다는 MEM의 特性을 검토할 겸 해서 Goda(1985)의 책 Fig 2.8의 正弦波 5個를 合成한 資料를 계산예로 하였다. 분명히 合成波의 스펙트럼은 Fig. 1과 같을 것이고 MEM의 결과는 Fig. 2이며 兩者를 비교한 것이 表1이다.

6. 結 論

多樣 多枝化 해가는 學問의 추세속에서 다른 領域을 理解하기란 쉽지 않다. 다시 한번 定理하면 最大엔트로피 方法에 의한 스펙트럼 推定은 AR方法의 結果와 같음을 알 수 있었고 덕분에 두 方法의 理解에 많은 진전이 있었다. 아직 數學的으로 매끈하게 이해되지 않은 部分이 간간 있지만 앞으로의 硏究課題로 남겨 놓는다.

參 考 文 獻

Anderson, T.W., "An Introduction to Multivariate Statistical Analysis", John Wiley & Sons, 1958, pp 339

Burg, J. P., "Maximum Entropy Spectral Analysis", presented at the International Meeting of the Society for the Exploration of Geophysics, Orlando, FL, 1967

Burg, J. P., "Maximum Entropy Special Analysis", Ph.D dissertation, Dep't of Geophysics Stanford Univ., 1975

Goda, Yoshimi., "Random Seas and Design of Maritime Structures", Univ. of Tokyo Press, 1985

Kaplan, "Advenced Caculus", pp 285

Lee, Y. W., "Statistical Theory of Communication", John Wiley & Sons, 1960 pp 56-58, 93-96

Papoulis, A., "Maximum Entropy and Spectral Estimation : A Review", IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, vol. ASSP-29, 1981

Papoulis, A., "Probability, Random Variables, and Stochastic Processes", McGRAW-Hill Third Edition, 1991

Spiegel, M. R., "Advenced Caculus", Schaum Publishing Co., 1963

日 野 幹 雄, "スヘタトル 解析", 1977

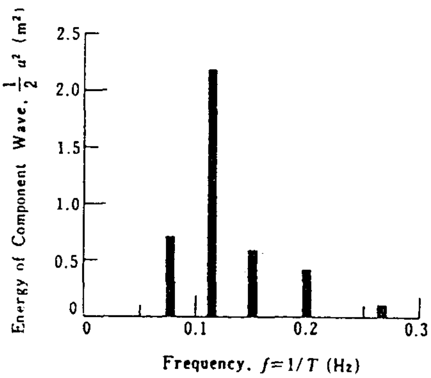

Fig.1

486

f	$\frac{a^2}{2}$	MEM
0.077	0.708	0.717
0.115	2.184	2.186
0.151	0.589	0.577
0.198	0.419	0.425
0.266	0.104	0.108
SUM	4.004	4.013

表 1

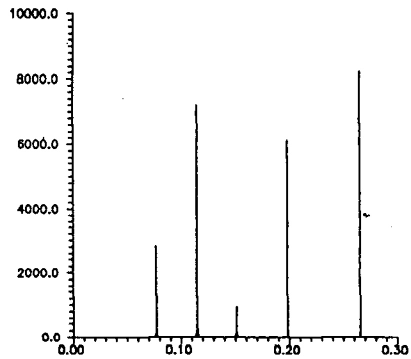

Fig.2