

바닥경계 가까이 있는 圓形실린더의 附加質量係數에 관한 小考

A Note on Added Mass Coefficient of Cylinder near Bottom Boundary

박창근* 편종근**

1. 서론

해양구조물에 가장 이상적인 구조물의 형태중의 하나는 원형실린더인데, 그것은 같은 재질일 경우 단위무게당 가장 큰 힘을 지지할 수 있는 단면을 가지고 있고 또한 어느 방향으로의 외력에 대해서도 비교적 간단하게 해석할 수 있는 형상을 가지고 있다. 송유관 등의 목적으로 원형실린더를 해저에 설치함으로써 파이프라인이 형성되고, 공학적으로 볼 때 이에 대한 해석은 바닥경계를 고려하여 수평실린더에 작용하는 힘을 구하는 것으로 귀착된다고 할 수 있다.

비점성 비압축성 유체의 2차원 비회전 흐름에서 원형실린더의 단위길이당 작용하는 힘 (F)은 흐름방향으로 작용하는 관성력(inertia force, F_x')과 흐름방향과 수직으로 작용하는 양력(lift force, F_y)으로 구성되어 있고, 그것의 수학적 형태는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$F = F_x' + F_y = \rho C_I A \partial U / \partial t + 0.5\rho C_L D U^2 \quad (1)$$

여기서 ρ 는 밀도, A는 실린더의 단면적, D는 실린더의 직경, U는 수평방향의 유체입자 유속, C_I 는 관성력계수, C_L 는 양력계수이다.

상기 식에 대한 해석적 해를 구하는 것은 바닥가까이에 있는 파이프라인의 거동을 이해 하는데 도움을 주고 또한 실험으로 그러한 현상을 규명하는데 있어서 방향을 제시할 수 있으므로 유용하다고 할 수 있다. 식(1)의 해석적 해를 구할 때 경계조건을 어떻게 설정할 것인가가 중요한 문제가 될 수 있다. Havelock(1936)은 定常시의 水平等流에서 자유표면의 영향을 고려하여 해석적 해를 구하였는데, 4D 이상의 깊이에 잠겨있는 원형실린더에 작용하는 파력은 자유표면의 영향을 받지 않음을 보였다. Ogilvie(1963)는 3~4D 이상의 깊이에 잠겨 있을 경우 자유표면의 영향을 무시할 수 있다고 보고하였다. 또한 Nath와 Yamamoto(1974)는 1D 이상의 깊이에서는 자유표면의 영향은 무시할 수 있는 정도로 작다고 언급하고 있다. 따라서 본 연구에서는 문제를 간단히 하기 위하여 자유표면의 영향을 무시하고 바닥경계의 영향만을 고려하여 식(1)의 해석적 해를 Yamamoto 등(1974)이 제시한 방법에 기초하여 재유도하고, 그들의 해석적 해와 비교하고자 한다.

한편 Nath와 Yamamoto(1974)와 Yamamoto 등(1974)은 바닥가까이에 있는 원형실린더에 작용하는 파력의 관성력계수와 양력계수를 다음과 같이 해석적으로 구한 바 있다.

$$C_L = -4\pi_j \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m_j m_k}{\left[\frac{2S}{a} - q_j - q_k \right]^3} \quad (2)$$

$$C_M = 1 + \sum_{j=2}^{\infty} (q_2 \cdot q_3 \cdot \dots \cdot q_j)^4 \quad (3)$$

2. 부가질량계수(added mass coefficient)

원형실린더에 작용하는 압력은 두가지 즉 P_{inf} 과 P^* 로 나누어질 수 있고, 여기서 P_{inf} 는 실린더에 아주 먼 지점에서 등류에 의한 압력이고 P^* 는 실린더가 존재함으로써 인해 흐-

* 서울대학교 토목공학과 (Dep. of Civil Eng., Seoul Nat. Univ., Seoul, 151-742, Korea)

** 명지대학교 토목공학과 (Dep. of Civil Eng., Myung Ji Univ., Seoul, 120-728, Korea)

름장이 교란되어 생기는 압력이다. 따라서 U의 속도를 가진 등류속에 고정된 실린더에 작용하는 압력은 $P = P_{inf} + P^*$ 이고 U의 속도로 움직이는 실린더에 작용하는 압력은 P^* 이다.

P_{inf} 에 의해 실린더에 작용하는 단위길이당 힘은 $\rho \cdot A \cdot aU/\partial t$ 로 표시될 수 있고 이러한 결과는 흐름장에서 실린더를 치워버리면 P_{inf} 로 인하여 존재했던 실린더 표면에 작용하는 힘을 의미하고 이것을 Froude-Krylov 힘이라 한다. 한편 실린더 표면에 존재하게 되는 P^* 의 분포는 쉽게 구할 수가 없으므로 부가질량(added mass) 개념을 도입하게 된다. 즉 P^* 가 실린더 주위에 있는 유체를 $aU/\partial t$ 로 가속시킨다고 가정하면 이 때 P^* 에 의해 가속되는 유체의 질량을 부가질량이라 하고, 부가질량계수(C_M)는 다음과 같이 정의되어 진다.

$$C_M = \frac{P^* \text{에 의해 } aU/\partial t \text{를 가지면서 움직인다고 가정되는 유체의 질량}}{\text{실린더 부피에 해당하는 유체의 질량}}$$

따라서 식(1)의 관성력계수 $C_I = 1 + C_M$ 으로 표시될 수 있고, 포텐셜 흐름으로 흐름장을 해석하면 S_0 에 대해서는 $C_M = 0.5$ 이고 원형실린더에 대해서는 $C_M = 1.0$ 이다. 바닥경계의 영향하에 있는 원형실린더에 대하여 포텐셜 흐름으로 흐름장을 해석하면 $C_M > 1$ 이 된다.

3. 해석적 해

비점성 비압축성 유체의 2차원 비회전 흐름에서 Fig.1과 같이 바닥에서 iS_0 ($S_0 = S$)만큼 떨어진 지점에서 바닥경계와 평행하게 U의 속도를 가지고 움직이는 doublet을 생각하자. 그러면 doublet 때문에 바닥경계조건($\partial\psi/\partial y = 0$ at $y=0$)을 만족하지 않으므로 image point ($0, -iS_0$)에 같은 강도(strength)의 doublet을 놓으면 상기 경계조건은 만족하게 된다. 그러나 바닥경계조건을 만족시키기 위하여 놓인 image doublet으로 인하여 본래 원형인 실린더가 찌그러지게 되므로 이것을 보상하기 위하여 ($0, iS_1$)지점에 μ_1 강도의 doublet을 놓으면 된다. 다시 바닥경계조건을 만족하기 위하여 image point ($0, iS_1$)에 μ_1 강도의 doublet을 놓으면 된다. 이러한 작업을 무한히 반복하면 원하는 실린더 모양과 바닥경계를 얻을 수 있고, 이 경우의 복소포텐셜(complex potential, W)은 다음과 같이 표시될 수 있다.

$$W = \phi + i\psi = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k \left[\frac{1}{z - iS_k} + \frac{1}{z - iS_k} \right] \quad (4)$$

$$S_k = S - \frac{a^2}{S + S_{k-1}}, \quad \mu_k = \mu_{k-1} \left[\frac{a}{S + S_{k-1}} \right]^2 \quad (5)$$

계산의 편의를 위하여 식(5)에서 q_k 를 다음과 같이 정의하면,

$$q_k \equiv \frac{1}{a} (S - S_k) = \frac{1}{2S/a - q_{k-1}}, \quad q_0 = 0. \quad (6)$$

k번째의 doublet의 강도 μ_k 는 다음과 같이 표시될 수 있다.

$$\begin{aligned} \mu_k &= \mu_{k-1} \cdot q_k = \mu_0 (q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_k)^2 = Ua^2 (q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_k)^2 = Ua^2 \cdot m_k ; \\ m_k &= (q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_k)^2, \quad m_0 = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

식(6)과 식(7)을 식(4)에 대입하면 바닥경계 가까이 있는 원형실린더에 작용하는 복소포텐셜은 다음과 같이 표시된다.

$$W = Ua^2 \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k \left[\frac{1}{z - i(S - aq_k)} + \frac{1}{z - i(S - aq_k)} \right] \quad (8)$$

$$q_k = \frac{1}{2S/a - q_{k-1}}, \quad q_0 = 0, \quad m_k = (q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_k)^2, \quad m_0 = 0$$

비정상 포텐셜 흐름에서 실린더에 작용하는 힘은 Blasius 정리에 의해 표시될 수 있다.

$$F = F_x + F_y = -i\rho \int \frac{\partial \phi}{\partial t} dz + i\rho \int \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 dz \quad (9)$$

여기서 $z=x+iy$ 이고 $\bar{z}=x-iy$ 이다. 식(8)을 식(9)에 대입하여 Residue 정리를 사용하여 계산하면 U의 속도를 가지고 움직이는 실린더에 작용하는 관성력(F_x)과 양력(F_y)를 각각 다음과 같이 구할 수 있다.

$$F_x = -\rho C_M \pi a^2 \frac{\partial U}{\partial t}$$

$$C_M = \sum_{k=0}^{\infty} (1 + q_{k+1}^2) m_k = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} m_k \quad (10)$$

$$F_x = -0.5 \rho C_L D U^2$$

$$C_L = -4\pi \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m_j m_k}{\left[\frac{2S}{a} - q_j - q_k \right]^3} \quad (11)$$

본 연구에서 해석적으로 구한 양력계수(C_L)는 Yamamoto 등(1974)이 구한 식과 같지만, 부가질량계수(C_M)은 Yamamoto 등(1974)의 것과 비교하면 다름을 알 수 있다. 부가질량계수 및 양력계수가 e/D ($e=S-a$)와의 관계를 도시한 것이 Fig.2와 Fig.3에 각각 나타나 있다. 식(10)과 식(11)의 C_M 과 C_L 을 계산하기 위하여 900개의 image doublet을 사용하였다. Fig.2와 같은 결과는 이상유체 흐름에 놓여 있는 원형실린더에서 부가질량계수의 경향을 잘 나타내고 또한 Nath와 Yamamoto(1974)의 결과와도 일치함을 알 수 있었다. 즉 실린더가 $e/D=1$ 인 경우에 $C_M=1.05724 \approx 1$ 로 계산 되는데, 이러한 결과는 바다경계의 영향이 없는 원형 실린더에 작용하는 힘을 포텐셜 흐름으로 해석할 때의 결과와 일치함을 알 수 있다. 따라서 $e/D < 1$ 이면 바다경계의 영향을 거의 무시할 수 있음을 알 수 있다. e/D 가 점점 작아질 수록 바다경계의 영향 때문에 흐름장은 교란되어 실린더와 바다경계사이에서 유속(즉 가속도)은 빨라지게 되어 부가질량계수가 점점 더 증가하고, $e/D=0$ 일 때 즉 실린더가 바닥에 붙어 있을 때 $C_M=2.29$ 로 계산되어 진다. 한편 포텐셜 흐름에서 양력은 실린더 표면에서의 압력차에 의해 발생하는데, $e/D=1$ 일 때 $C_L=-0.06186 \approx 0$ 로 계산되므로 역시 $e/D < 1$ 이면 바다경계의 영향을 거의 무시할 수 있음을 알 수 있다. 또한 e/D 가 점점 작아질수록 실린더와 바다경계사이의 유속이 점점 빨라져 압력이 상대적으로 낮아져 양력은 점점 증가하고 $e/D \approx 0$ 이면 무한대의 양력이 발생한다. 또한 양력은 음수로 나타나므로 바다경계 방향으로 발생하게 된다. 한편 von Muller(1929)에 의하면 e/D 일 때 $C_L=+4.49(=\pi^2+3\pi)/9$ 로 계산되어 지므로 양력의 작용 방향이 반대로 된다.

4. 결론

본 연구에서 복소포텐셜을 이용하여 바다경계의 영향이 있는 원형실린더에 작용하는 파력을 해석적으로 재유도하여 보았다. 구한 식에서 부가질량계수는 Nath와 Yamamoto(1974)와 Yamamoto 등(1974)의 결과식과 다름을 알 수 있었고, 본 연구에서 구한 부가질량계수를 나타내는 식은 부가질량계수의 경향을 잘 모의하고 있음을 알 수 있었고 또한 Yamamoto 등(1974)가 제시한 C_M - e/D 의 관계 곡선과 일치함을 알 수 있었다.

5. 참고문헌

- 박창근, 1986, 원형실린더에 작용하는 파력에 관한 연구, 서울대학교 석사학위논문
- Havelock, T. H., 1936, The Forces on a Cylinder Submerged Bodies, Proceedings of the Royal Society, London, Ser A157, pp.526-534

Nath, J. H. and Yamamoto, T., 1974, Forces from Fluid Flow around Objects, Proceedings of the 14th Coastal Engineering Conference, Denmark, Ch.106, pp.1808-1827

Ogilvie, J. F., 1963, First and Second Order Forces on a Cylinder Submerged under a Free Surface, Jr. of Fluid Mechanics, Vol.16, Part3, pp.451-472

Yamamoto, T., Nath, J.H. and Slotta, L. S., 1974, Wave Forces on Cylinders near Plane Boundary, Jr. of the Waterways Harbors and Coastal Engineering Division, Vol.100, WW4, pp.345-359

von Muller, W., 1929, Systeme von Doppelquellen in der ebenen Stromung, insbesondere die Stromung um zwei Dreiszylinder, Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik, Band9, Helf3, pp.200-213

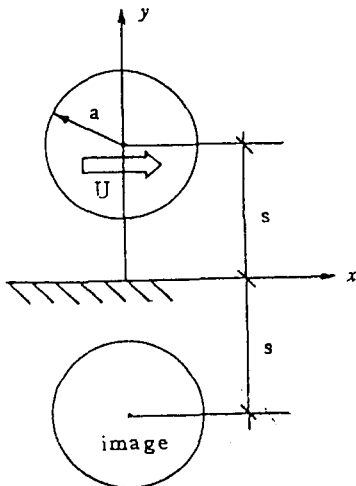


Fig.1 Sketch of Doublet affected by Bottom Boundary

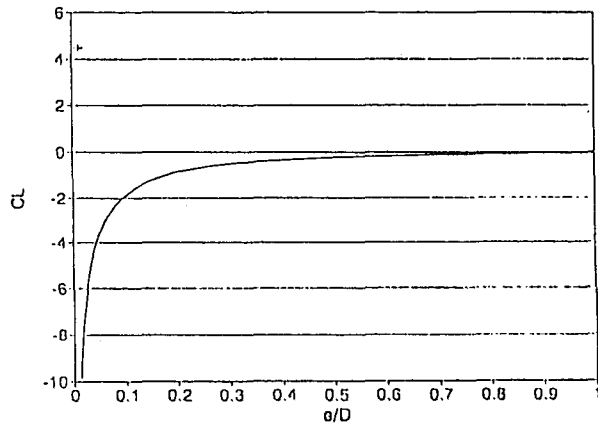


Fig.3 Lift Force Coeff.

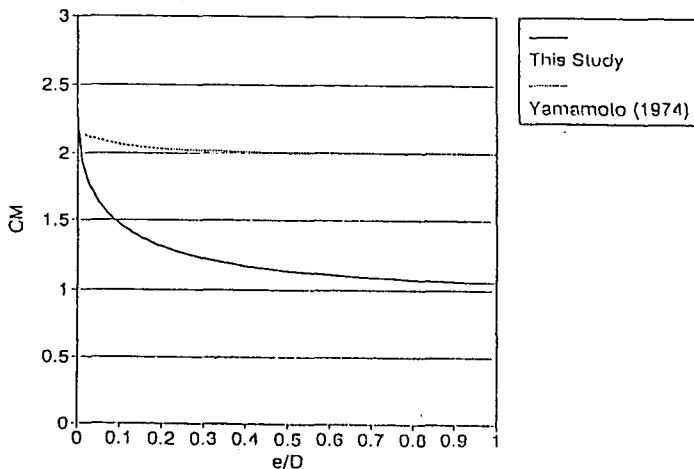


Fig.2 Added Mass Coeff.