

軸對稱 荷重을 받는 圓錐 Shell의 最適設計에 관한 研究

A STUDY OF OPTIMUM DESIGN OF AXISYMMETRICALLY LOADED CONICAL SHELL

최 열* 강 문 명**
Choi Yeol Kang Moon - Myung

ABSTRACT

This paper presents the optimum design of reinforced concrete conical shell which is fixed at the base and free at the top. The calculation of stresses is done using the SMAP(Segmented Matrix Analysis Package)program which uses the simple finite element method of analysis. The objective function contains the ratios of the unit cost of reinforcements and formwork to that of concrete. To simplify the optimization procedure, the final optimum design of conical shell is obtained by combining the result of each element. The results are presented and discussed.

1. 序 論

構造設計의 主要目的中的의 하나는 材料와 기타 이용할 수 있는 모든 資源(技術, 勞動, 資本, 空間, 時間)을 가지고 가장 經濟的인 構造物을 設計하는 것이라고 할 수 있다. 構造設計에서 最適設計라는 意味는 骨組의 最小重量, 最小費用 혹은 最小體積이 될수 있도록 構造物을 設計하는 것을 意味한다고 할 수 있다. 따라서, 最近의 경제성장에 따른 材料費 및 人件費의 上昇으로 인하여 構造物의 最適化에 대한 관심이 날로 높아져가고 있는 실정이라 할 수 있다.

本 研究에서는 軸對稱荷重을 받는 圓錐 Shell을 極限強度 設計法(ultimate strength design method)을 根據로한 最適設計로서, 制約條件式은 極限 軸強度, 極限剪斷強度, 極限 Hoop強度, 最小두께 및 最小鐵筋比등을 고려하였으며, 目的函數式은 콘크리트 費用에 대한 鐵筋및 거푸집 費用의 價格比로 나타내었다. 設計 變數는 圓錐 shell의 壁두께와 鐵筋比로 하였다.

* 경북대학교 공과대학 건축공학과 박사과정

** 경북대학교 공과대학 건축공학과 교수

2. 鐵筋콘크리트 軸對稱 圓錐 shell의 應力解析

2-1. 概要

기존의 有限要素法은 解析의 豫備段階와 데이터(節點座標, 要素와 節點數, 荷重條件 등) 作成過程에서의 數式的 복잡성과 많은 시간을 요구하게 된다. 이러한 기존의 有限要素法の 短點을 보완하기 위하여 參考文獻[4]에서 개발된 簡易有限要素法인 "SMAP" 方法을 利用하여 本 論文의 鐵筋콘크리트 軸對稱 圓錐 shell의 應力을 解析하였다.

2-2. BEF(Beams on Elastic Foundation) shell element

軸對稱 等分布 荷重을 받는 圓錐 shell 에서 圓錐의 상부가 절단된 圓錐 shell로부터 線形的으로 변하는 幅(width)을 가지는 세로 스트립(longitudinal strip)은 그림.1 에 있는 것처럼 두개의 放射面으로 나타낼 수 있다.

그림 (1).a에서 임의의 한 점 i 에서, 세로 스트립에 대한 垂線 方向의 橫 처짐을 δ 라 두면, 單位 길이당 hoop力(circumferential force) N_i 는 아래와 같다.

$$N_i = (E \cdot t_i / r_i) (\delta_i \cdot \cos \alpha) \quad \dots \dots \dots (1)$$

여기서, $r_i = (x_i \sin \alpha)$

E : 彈性係數

t_i : 軸對稱 圓錐 shell의 i 지점에서의 shell 두께

r_i : 점 i 에서 圓錐 shell의 軸에 대한 垂線半徑

α : 圓錐 shell의 opening angle

이때 방사선 方向에서의 hoop力의 合을 P_i 라 하면

$$P_i = (E \cdot t_i \cdot b_i \cdot \cos^2 \alpha / r_i^2) (\delta_i) \quad \dots \dots \dots (2)$$

여기서, b_i : 점 i 에서의 요소 혹은 strip의 폭

方程式(2)로부터, 合力 P_i 는 橫 처짐 δ_i 에 비례함을 알수있다. 따라서 이 스트립은 점 i 에서 等價基礎係數(equivalent foundation modulus)를 가지는 BEF로써 간주할수 있다. 等價基礎係數는

$$(K_f)_i = (E \cdot t_i \cdot b_i \cdot \cos^2 \alpha) / (r_i^2) \quad \dots \dots \dots (3)$$

이며, 橫 剛性 D_i 는 다음과 같다.

$$(E \cdot I)_i = D_i = (E \cdot b_i \cdot t_i^3) / (12 \cdot (1 - \mu^2)) \quad \dots \dots \dots (4)$$

여기서, μ : poisson's ratio,

圓錐 shell에서, α 는 一定하고, b_i 와 r_i 의 次수는 要素에 따라 변한다.

2-3. 基本有限要素의 剛性行列

圓錐 shell의 상부가 절단된 圓錐 shell로부터 BEF Finite element가 그림.2에 나타나 있다. 그림.1 에서 임의의 한점 i 에서의 半徑을 r_i , 그리고 幅을 b_i 라 하면, $r_i = x \cdot \sin \alpha$ 이고, $b_i = b_0 \cdot x$ 가 되며, 그때 균일한 두께의 圓錐 shell의 橫 剛性 D 와 等價基礎係數 K_f 는 다음과 같다.

$$D = C_1 \cdot X \quad \dots \dots \dots (5)$$

$$K_f = c_2 / X \quad \dots \dots \dots (6)$$

여기서, $c_1 = (E \cdot b_0 \cdot t^3) / ((12 \cdot (1 - \mu^2)))$

$$c_2 = E \cdot b_0 \cdot t \cdot \cot^2 \alpha$$

따라서 BEF finite element의 剛性行列은 다음과 같다.

$$K = \begin{bmatrix} K_A & K_{BF} \end{bmatrix} \quad \dots \dots \dots (7)$$

여기서, 「」는 대각선 行列을 나타내고

K_A : 요소의 軸 剛性 行列

K_{BF} : 보와 等價基礎係數의 頂 剛性으로인한 요소강성행렬

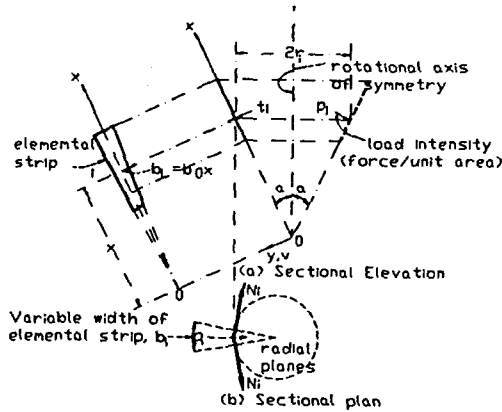


그림.1 軸 對稱 荷重을 받는 절단된 圓錐 shell.

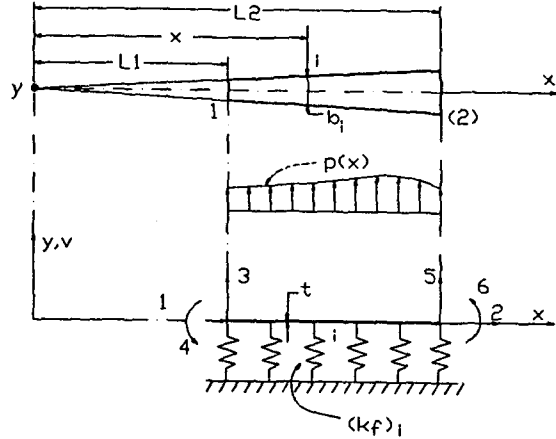


그림.2 BEF shell element

(7)式에서

$$K_A = C_3 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (8)$$

여기서, $C_3 = (0.5 \cdot E \cdot A_0) (L_2 + L_1) / (L_2 - L_1)$

여기서, $A_0 = h \cdot b_0$ 그리고

$$K_{BF} = [C^{-1}]^T [K_B + K_F] [C^{-1}] \dots\dots\dots (9)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & L_1 & L_1^2 & L_1^3 \\ 0 & 1 & 2L_1 & 3L_1^2 \\ 1 & L_2 & L_2^2 & L_2^3 \\ 0 & 1 & 2L_2 & 3L_2^2 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (10)$$

$$K_B = C_1 \begin{bmatrix} 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \text{SYM} & \cdot \\ 0 & 0 & 4\Delta^2 & \cdot \\ 0 & 0 & 12\Delta^3 & 36\Delta^4 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (11)$$

$$K_F = C_2 \begin{bmatrix} \ln(L_2/L_1) & \cdot & \text{SYM} & \cdot \\ \Delta & \Delta^2 & \cdot & \cdot \\ \Delta^2 & \Delta^3 & \Delta^4 & \cdot \\ \Delta^3 & \Delta^4 & \Delta^5 & \Delta^6 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (12)$$

여기서, $\Delta^n = (L_2^n / L_1^n) / n$

2-4. 等價 節點荷重

變位 形態로서 要素의 剛性行列을 결정하는 方法에 일치하여 等價 一般化 힘의 假想일에 대한 作用荷重의 假想일을 간단하게 計算하여 等價 一般化 힘들을 구할 수 있다. 要素의 表面에 垂直으로 單位面積當 P_0 의 等分布 荷重이 작용할때, 等價 一般化 힘 벡터 Q는 아래 式과 같다.

$$Q = b_0 P_0 \{ [C^{-1}]^T d \Delta^4 \Delta^5 \} \dots\dots\dots (13)$$

3. 目的 函數式

그림.1 과 같은 軸對稱 荷重을 받는 圓錐 shell에서 單位 面積에 대한 鐵筋, 콘크리트 및 거푸집에 대한 骨組工事費式을 세우면 다음과 같다.

$$C = V_c \cdot C_c + V_s \cdot C_s + A_f \cdot C_f \quad \dots\dots\dots (14)$$

여기서, C_c, C_s : 콘크리트 및 鐵筋의 單位 體積當 經費
 V_c, V_s : 콘크리트 및 鐵筋의 單位 길이당 體積
 C_f : 거푸집의 單位 면적당 經費
 A_f : 거푸집의 單位 길이당 面積

公式의 一般化를 위하여 (14) 式을 C_c 로 나누면,

$$Z = (V_c + V_s \cdot G_1 + A_f \cdot G_2) \quad \dots\dots\dots (15)$$

여기서, $G_1 = C_s / C_c$
 $G_2 = C_f / C_c$

이고, (14)式을 最小化하기 위하여서는 式(15)을 最小化하면 된다. 그러므로 式(15)은 圓錐 shell의 單位面積에 대한 骨組工事費 係數값으로서 本 研究에서 目的函數式이 된다.

4. 制約 條件式

4-1. 極限 軸應力 制約 條件式

그림.1 의 圓錐 shell의 스트립의 幅에 대한 極限 許容 軸 應力式을 구하면 다음과 같다.

$$M_n = b \cdot t^2 \cdot P_v \cdot F_y \left(1 - 0.59 P_v \frac{F_y}{F_c} \right) \quad \dots\dots\dots (16)$$

여기서, b : 圓錐 Shell 壁體의 單位幅
 t : 圓錐 Shell 壁體의 두께
 F_y : 鐵筋의 降伏 強度
 F_c : 콘크리트의 設計基準強度
 P_v : 圓錐 Shell 壁體의 垂直 鐵筋比

이고, 極限 軸應力 制約條件式은

$$\phi M_n - M_u \geq 0 \quad \dots\dots\dots (17)$$

여기서, ϕ : 強度低減係數(=0.9)
 M_n : 公稱 軸 모멘트 強度
 M_u : 係數 軸 모멘트

4-2. 極限 hoop力 制約條件式

極限 許容 hoop力式은,

$$N_n = b \cdot t \cdot P_H \cdot F_y \quad \dots\dots\dots (18)$$

이고, 極限 hoop力 制約 條件式은 다음과 같다.

$$\phi N_n - N_u \geq 0 \quad \dots\dots\dots (19)$$

여기서, ϕ : 強度低減係數(=0.9)
 N_n : 公稱 hoop 強度
 M_u : 係數 hoop力
 P_H : 원추 Shell 壁體의 水平鐵筋比

4-3. 極限 剪斷力 制約 條件式

極限 許容 剪斷應力式은,

$$V_n = 0.53 \cdot \sqrt{F_c} \cdot b \cdot t \quad \dots\dots\dots (20)$$

이고, 極限 剪斷應力 制約 條件式은 다음과 같다.

$$\phi V_n - V_u \geq 0 \quad \dots\dots\dots (21)$$

여기서, ϕ : 強度低減係數(=0.85)

V_n : 公稱 剪斷 強度

V_u : 係數 剪斷力

4-4. 두께 制約 條件式

圓錐 shell의 最小두께 制約式은 다음과 같다.

$$t \geq t_{min} \quad \dots\dots\dots (22)$$

4-5. 鐵筋比 制約 條件式

圓錐 shell의 水平 및 垂直방향의 最小 鐵筋比 制約 條件式은 다음과 같다.

$$P_v \geq P_{min} \quad \dots\dots\dots (23)$$

$$P_H \geq P_{min} \quad \dots\dots\dots (24)$$

여기서, p_{min} : 圓錐 Shell 壁體의 最小 鐵筋比

5. 設計 例 및 比較 考察

5-1. 設計 例

本 論文에서 設計 例로서, 그림.3 과 같은 軸對稱 等分布 荷重을 받는 圓錐 shell을 考慮하며, 圓錐 shell의 設計 條件들은 다음과 같다.

[設計條件] 圓錐 Shell 벽체의 두께: $t = 8.0\text{cm}$, 半徑: $R = 545.35\text{cm}$,
 poisson's ratio: $\mu = 0.2$, 開角: $2\alpha = 120^\circ$, 하중 $P_0 = 0.5\text{t/cm}^2$

그리고 SMAP 應力解析에서 圓錐 shell은 하부에의 수평 변위는 없으며, 단부에서의 회전은 제한하지 않는 것으로 가정한다.

그리고 圓錐 shell을 13개의 要素로 분리하여 각각에 대하여 應력을 解析하였다. 解析過程에서 圓錐의 頂点에서 스트립의 幅이 0 ($b=b_0x$)이 되는것을 막기위하여 rigid cap을 만들어 頂点에서 無限帶 값이 발생하는것을 방지하고, 적절한 境界條件을 適用하여 解析하였다.

이와 같은 方法으로 얻은 應力解析結果를 그림 4에 나타냈으며, Hetenyi[1] 公式으로 解析한 結果値와 比較해 볼때, hoop力은 Hetenyi의 結果値와 매우 近似함을 볼수 있으며, 반면에 휨 모멘트는 頂点 근처를 제외하고는 잘 一致함을 볼수 있는데, 이러한 차이점은 rigid cap의 영향이거나, 軸 變形을 고려하지 않은것의 영향 혹은 절단한 要素의 수에서 기인되었다고 본다. 그러나 이러한 差異點은 매우 작으므로 設計上에서는 무시할 수 있다.

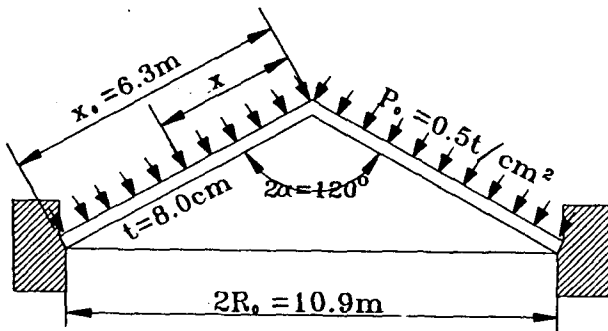


그림 3. 圓錐 shell의 應力解析 例

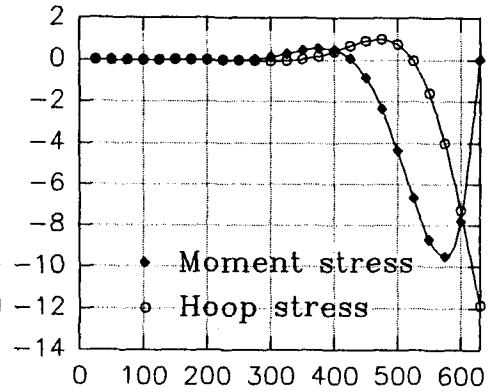


그림 4. 圓錐 shell의 應力解析 結果值

5-2. 最適設計의 比較, 考察

그림 3의 應力解析結果를 根據로, 1차적으로 각 부분에 대한 最適化를 行하고, 그림 5와 같이 Uniform 및 3 variables 과 4 variables 등의 세가지 경우에 대하여 非線型 最適化 GINO 프로그램을 이용하여 最適設計를 하고, 그 結果를 表.1 - 表.3에 각각 나타내었다. 表.1은 鐵筋의 항복강도 (F_y)의 變化에 대한 最適設計의 變化로써, 鐵筋의 強度가 클수록 圓錐 Shell 벽체의 두께가 작아지고, 經濟的인 設計가 됨을 알 수 있고, 表.2는 콘크리트 강도(F_c)의 變化에 대한 最適設計의 結果로써, 콘크리트강도가 클수록 經濟的인 設計가 됨을 또한 알 수 있다.

表.3에서는 그림 5의 3가지 경우에 대한 最適設計값을 比較하였으며, Uniform 設計보다 3 variable 設計가 약 35% 정도 經濟的인 設計가 되고, 4 variable 設計 경우에는 약 40% 정도 經濟的인 設計가 됨을 考察할 수 있다. 따라서 variable 수가 많을 수록 더욱 經濟的인 設計가 됨을 알 수 있다.

表 1. 철근의 항복강도(F_y)에 대한 最適設計의 比較

F_c (kg/cm ²)	F_y (kg/cm ²)	G_1	G_2	T(cm)	Ph	P	Z
210	2,400	60	10	71.714	0.008063	0.0015	262943.38
	3,000	60	10	57.920	0.008041	0.0015	223368.28

表 2. 콘크리트강도(F_c)에 대한 最適設計의 比較

F_y (kg/cm ²)	F_c (kg/cm ²)	G_1	G_2	T(cm)	Ph	P	Z
3,000	180	60	10	58.130	0.008011	0.0015	223957.00
	210	60	10	57.920	0.008041	0.0015	223368.28

表 3. 最適設計의 結果

Case	벽체두께 (cm)	목적함수값(Z)	감소율(%)
Uniform thickness	57.92	2551289.21	1 benchmark
three variable	57.92 17.44 8.00	1658504.34	0.65
four variable	57.92 24.25 9.79 8.00	1562832.29	0.61

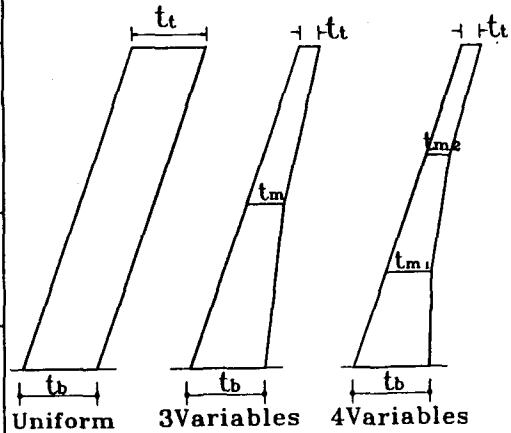


그림 5. 最適設計모델

* $x/H = 1.0$: The base of tank wall

6. 結 論

本 研究는 極限強度 設計法에 의한 鐵筋콘크리트 圓錐 shell의 最適化에 관한 研究로써, 최적화 GINO 프로그램을 利用하여 骨組工事費 係數값이 最小가 되는 最適 두께 와 垂直 및 水平 最適 鐵筋比를 구하였다. 이상의 研究 結果로써 다음과 같은 結論을 얻었다.

- (1). 圓錐 shell 最適 設計는, 주로 hoop力 에 의해 決定됨을 알 수 있다.
- (2). 材料의 強度 F_c, F_y 의 값이 클수록 經濟的인 設計가 됨을 알 수 있다.
- (3). 圓錐 shell 벽체의 最適設計는 variable 數가 많을수록 經濟적인 설계가 됨을 알 수 있다.

參 考 文 獻

1. Hetenyi, M., "Beams on Elastic Foundation", Ann Arbor, The University of Michigan Press, 1961.
2. Flugge, W., "Stresses in Shells, Julius Springer, Berlin 1960.
3. Choo Heng Kek., " Minimum Weight Design of Concrete Conical Water Tanks", National University of Singapore, 1987.
4. Tin-Loi, F. Pulmano, V.A. and Thambiratnam, D., "BEF Analogy for Axisymmetrically Loaded Cylindrical Shells", Computers and Structures, Vol.34, No.2, 1990.
5. V.A. Pulmano and F. Tin-Loi, " A Simple Finite Element Solution of Axisymmetrically Loaded Shells of Revolution." Proceeding of the third summer colloquium on Shell and Spatial Structures", Taegu, Korea, pp. 45-53, August, 1990
6. Wasiutynski, Zbigniew and Brandt, Andrezj, "The present of knowledge in the Field of Optimum Design of Structures", Applied Mechanics Review, VOL. 16, NO. 5, pp. 341-350, May, 1963.