

축대칭 쉘 구조물의 형상 설계민감도 해석 및 최적설계 Shape Design Sensitivity Analysis and Optimization of Axisymmetric Shell Structures

김인용* 곽병만**
Kim, In Yong Kwak, Byung Man

ABSTRACT

A method for shape design sensitivity analysis for axisymmetric shells of general shapes is developed. The basic approach is to divide the structures into many segments. For each of the segments, the formula for a shallow arch or shell can be applied and the results assembled. To interconnect those segments, the existing sensitivity formula, obtained for a variation only in the direction perpendicular to the plane on which the structure is mapped, has been extended to include a variation normal to the middle surface. The method follows the adjoint variable approach based on the material derivative concept as established in the literature. Numerical examples are taken to illustrate the method and the applicability to practical design problems.

1. 서론

쉘 구조물의 설계개선시 형상의 변화에 따른 설계조건 변화, 즉 형상 설계민감도를 알 수 있다면 개선된 형상을 쉽게 구할 수 있다. 형상 설계민감도를 해석적으로 구하는 방법으로는 구조물의 상태방정식으로부터 직접 형상변수에 관해 변분을 취하고 보조변수식을 사용하는 직접 변분법[1,2]과, 연속체 역학의 전미분 개념과 보조변수식[3]을 이용하는 방법[2] 등이 있다. 그러나 이들 문헌에서는 쉘을 한 기준평면상에 투영시킨 후 기준평면으로 부터 쉘의 중심면까지의 수직 거리를 설계변수로 하기 때문에, 한 평면상에 사상될 수 없거나 기준평면에 수직인 방향 이외로의 형상변화가 요구될 때에는 위 방법들의 적용이 곤란하다. 최근 한 평면상에 사상될 수 없는 일반형상의 아치에 대하여 형상 설계민감도를 구하는 방법[4]이 제시되었고, 이를 축대칭 쉘 구조물에 적용하는 방법[5]도 발표되었다.

본 논문에서는 연속체 역학의 전미분 개념과 보조변수식을 이용하여 일반형상의 축대칭 쉘 구조물의 형상 설계민감도를 구하는 방법을 제시하고, 예제 해석으로 그 타당성을 입증하며, 또한 오메가 밀봉의 설계 개선에 적용하여 실제 설계에 유용함을 보이고자 한다.

* 한국원자력연구소 선임연구원

** 한국과학기술원 기계공학과 교수

2. 전미분 개념에 의한 축대칭 셸의 설계민감도 해석

축대칭 하중을 받는 축대칭 셸의 strain(ϵ)과 change of curvature (κ)는 다음과 같다[6].

$$\begin{pmatrix} \epsilon_\alpha \\ \epsilon_\theta \\ \kappa_\alpha \\ \kappa_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u(\alpha)}{\partial \alpha} + \frac{w(\alpha)}{R_s} \\ \frac{1}{r} (w(\alpha) \cos \phi + u(\alpha) \sin \phi) \\ -\frac{\partial^2 w(\alpha)}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u(\alpha)}{R_s} \right) \\ -\frac{\sin \phi}{r} \left(\frac{\partial w(\alpha)}{\partial \alpha} - \frac{u(\alpha)}{R_s} \right) \end{pmatrix}. \quad (1)$$

여기에서 α 와 θ 는 각각 셸 중심면상의 자오선 방향 성분과 원주방향 성분을, ϕ 는 α 와 중심축이 이루는 각, r 과 R_s 는 각각 회전반경과 자오선 방향 곡률반경이다. 셸의 중심면상에 작용하는 외력을 f 라고 하면, 축대칭 셸의 상태방정식으로 부터 다음과 같은 변분식을 얻을 수 있다.

$$a(z, \bar{z}) = b(\bar{z}), \quad \forall \bar{z} \in Z. \quad (2)$$

여기서 $a(z, \bar{z}) = \int_0^1 [\epsilon^T \bar{C} \bar{\epsilon} + \kappa^T \bar{D} \bar{\kappa}] r \, d\alpha,$ (3)

$$b(\bar{z}) = \int_0^1 f^T \bar{z}(\alpha) r \, d\alpha \quad (4)$$

이며, $z^T = [u(\alpha), w(\alpha)], \bar{z}^T = [\bar{u}(\alpha), \bar{w}(\alpha)], \epsilon^T = [\epsilon_\alpha, \epsilon_\theta], \kappa^T = [\kappa_\alpha, \kappa_\theta], \bar{\epsilon}^T = [\bar{\epsilon}_\alpha, \bar{\epsilon}_\theta], \bar{\kappa}^T = [\bar{\kappa}_\alpha, \bar{\kappa}_\theta]$ 이다. 또한 탄성 균질 등방성 재료를 가정하면,

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-\nu^2} Eh & \frac{\nu}{1-\nu^2} Eh \\ \frac{\nu}{1-\nu^2} Eh & \frac{1}{1-\nu^2} Eh \end{bmatrix}, \quad \bar{D} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-\nu^2} \frac{Eh^3}{12} & \frac{\nu}{1-\nu^2} \frac{Eh^3}{12} \\ \frac{\nu}{1-\nu^2} \frac{Eh^3}{12} & \frac{1}{1-\nu^2} \frac{Eh^3}{12} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

셸의 두께가 얇고 일정하면 중심면에 수직인 방향의 변화는 경계표면에 수직인 방향의 변화와 같다고 볼 수 있으므로, 구조물의 성능함수는 다음과 같이 경계 Γ_r 상에서 정의되는 범함수 Ψ 로 표현될 수 있다.

$$\Psi = \int_{\Gamma_r} g(z, \nabla z) \, d\Gamma_r. \quad (6)$$

셸의 중심면이 정규적이고, 셸의 중심면을 따르는 α - β 곡선좌표계가 기준평면상의 직선좌표계 x - y 에 사상이 가능하다면, 전미분 개념에 의한 형상 설계민감도식[3]에 식 (3) 및 (4)를 적

용하여 축대칭 셀의 중심면에 수직한 방향의 민감도식을 다음과 같이 구할 수있다.

$$\Psi' = b'(\lambda) - a'(z, \lambda) + \int_0^1 \nabla g^T n (V^T n) S(x) r dx \quad (7)$$

여기서

$$a'(z, \lambda) = - \int_0^1 \bar{C} [-\dot{\phi} \{ \nabla \varepsilon(z)^T n^x (\bar{V}^T n^x) \} \varepsilon(\lambda) + \{ \nabla \varepsilon(z)^T n^y (\bar{V}^T n^y) \} \varepsilon(\lambda)] r dx$$

$$- \int_0^1 \bar{C} [-\dot{\phi} \varepsilon(z) \{ \nabla \varepsilon(\lambda)^T n^x (\bar{V}^T n^x) \} + \varepsilon(z) \{ \nabla \varepsilon(\lambda)^T n^y (\bar{V}^T n^y) \}] r dx$$

$$- \int_0^1 \bar{D} [-\dot{\phi} \{ \nabla \kappa(z)^T n^x (\bar{V}^T n^x) \} \kappa(\lambda) + \{ \nabla \kappa(z)^T n^y (\bar{V}^T n^y) \} \kappa(\lambda)] r dx$$

$$- \int_0^1 \bar{D} [-\dot{\phi} \kappa(z) \{ \nabla \kappa(\lambda)^T n^x (\bar{V}^T n^x) \} + \kappa(z) \{ \nabla \kappa(\lambda)^T n^y (\bar{V}^T n^y) \}] r dx$$

$$- \int_0^1 \{ \bar{C} \varepsilon(z) \varepsilon(\lambda) + \bar{D} \kappa(z) \kappa(\lambda) \} \{ -\dot{\phi} \nabla(rS)^T n^x (\bar{V}^T n^x) + \nabla(rS)^T n^y (\bar{V}^T n^y) \} S^{-1} dx \quad (8)$$

$$b'(\lambda) = \int_0^1 \{ -\dot{\phi} (\nabla f^T n^x) \lambda (\bar{V}^T n^x) + (\nabla f^T n^y) \lambda (\bar{V}^T n^y) \} r dx$$

$$+ \int_0^1 f^T \{ -\dot{\phi} (\nabla(rS)^T n^x) \lambda (\bar{V}^T n^x) + (\nabla(rS)^T n^y) \lambda (\bar{V}^T n^y) \} S^{-1} dx \quad (9)$$

이며, ϕ 는 x-y 좌표계에서의 셀의 중심면의 정의, $S = S(x) = \sqrt{1 + \phi^2(x)}$, n 은 셀의 중심면의 법선 방향 단위벡터, n^x 및 n^y 는 각각 n 의 x 및 y 방향 성분이고, \bar{V} 는 설계속도장 V 의 법선방향 성분이며, λ 는 다음 보조변수식의 해이다.

$$a(\lambda, \bar{\lambda}) = \int_0^1 (g_x \bar{\lambda} + g_{v_z} \nabla \bar{\lambda}) d\Gamma \quad (10)$$

3. 일반형상의 축대칭 셀 구조물의 설계민감도 해석

Fig. 1 과 같이 한 평면상에 사상이 곤란한 축대칭 셀의 경우, 우선 셀을 여러 구간으로 나누는 후, 각 구간마다에 직교좌표계를 설치한다. 이때 각 구간의 셀 부분은 한 개의 얇은 셀로 간주될 수 있게 되어 식 (7) 의 적용이 가능해진다. 따라서 전 구간에 대한 민감도는 다음의 식으로 구할 수있다.

$$\Psi' = \sum_{i=1}^n [b_i'(\lambda) - a_i'(z, \lambda) + \int_0^{l_i} \nabla g^T n_i (V^T n_i) S(x_i) r_i dx_i] \quad (11)$$

일반적으로 셀 해석을 위하여 유한요소법을 사용하므로, 각 구간을 각 유한요소와 일치시키면 어

면 형상의 변화에 대해서도 적용이 가능해 지게 된다.

4. 예제 해석 및 최적설계

유도된 식 (11)의 타당성은 이미 [5]에서 얇은 축대칭 셸을 이용하여 입증하였으므로, 본 논문에서는 일반 형상의 축대칭 셸에 대한 적용성을 고려하였다. 구조물의 성능 해석에는 기존의 상용 유한요소해석 코드 ANSYS[8]를 이용하였다.

Fig. 2는 원자력발전소 CEDM 구조물의 오메가 밀봉을 보인 것인데, 내부에 고압의 유체가 있는 두 구조물을 연결할 때 다른 결합하중은 전해지지 않고 내압만 받으면서 밀봉 역할을 할 수있게 설계된 축대칭 셸 부품이다. 오메가 밀봉의 구조를 단순화하여 96개의 선형 보요소로 구성된 유한요소 모델을 작성하였는데, 사양은 다음과 같다.

두께 :	0.1 inch	영률 :	26.36 E6 psi
내압 :	20 psi	포와송 비 :	0.3

이를 Fig. 3에서와 같은 형상변화를 가정하고 각 절점에서 법선방향의 변위에 대한 민감도해석을 수행하였으며, 계산결과를 평가하기 위하여 유한차분으로 구한 값과 그래프로 비교하였다. 해석 결과는 Fig. 4 및 Fig. 5와 같은데, 실선은 유한차분에 의한 민감도이며, 점선은 식 (11)에 따라 예측된 민감도이다. 두 값들의 경향이 잘 일치하고 있으나, 모델의 곡률이 큰 부분에서 유한차분에 의한 값과 예측된 값의 차이가 커진 것을 알 수 있다. 이러한 차이의 원인은 유한차분으로 계산된 민감도에는 셸 구조해석에서의 비선형성이 포함되어 있어 선형으로 계산된 민감도와 완전히 일치하기는 어렵다는 것과, 유한요소해석시 선형 보요소를 사용함으로써 곡률이 고려된 식 (11)의 사용결과와 일치하지 않는다는 것이다. 따라서 구조물이 복잡해지고 곡률이 커지면 위 두 원인에 의한 차이가 증가하는 것으로 판단되는데, 이는 속도장의 크기를 줄이고 요소의 수를 증가시킬수록 감소될 수 있다[7].

위 오메가 밀봉을 주어진 내압하에서 최소의 컴플라이언스를 갖도록 형상 최적설계를 수행하였다. 오메가 밀봉의 설계조건을 고려하여 각 설계변수의 좌표를 제한조건으로 정하였는데, 설계변수는 등분포된 7개 절점의 β 방향 좌표이다. 이를 수식화하면 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} & \text{Find } b^i \quad (i = 1, \dots, 7) \\ & \text{to minimize} \quad \Psi(b^i) = \int_0^s f^T z(b^i) r \, d\alpha \\ & \text{subject to} \quad \Psi_{i1} = \frac{50.0}{x^i} - 1 \leq 0 \quad (i = 1, \dots, 7, \quad i1 = 1, \dots, 7) \\ & \quad \quad \quad \Psi_{i2} = \frac{x^i}{54.0} - 1 \leq 0 \quad (i = 1, \dots, 7, \quad i2 = 1, \dots, 7) \\ & \quad \quad \quad \Psi_{i3} = \frac{54.5}{y^i} - 1 \leq 0 \quad (j = 1, 2, \quad i3 = 15, 16) \end{aligned}$$

$$\Psi_{i4} = \frac{Y^i}{6.0} - 1 \leq 0 \quad (i = 1, \dots, 7, \quad i4 = 17, \dots, 23)$$

$$\Psi_{i5} = \frac{1.0}{Y^{k+1.0}} - 1 \leq 0 \quad (k = 3, \dots, 6, \quad i5 = 24, \dots, 27)$$

$$\Psi_{28} = \frac{0.15}{Y^7} - 1 \leq 0 \quad (12)$$

여기에서 $f = [0, p]^T$, p 는 일정한 내압, z 는 변위 벡터, b^i 는 설계변수, X^i 및 Y^i 는 전체 직교좌표계에서 정의되는 절점의 좌표이다. 최적설계는 IDESIGN [9]를 사용하여 20회의 반복과정(Fig. 6)만에 구해졌으며, 초기 컴플라이언스 값 35.16은 최적화 후에 6.89 (Table 1)로 감소되었다. Fig. 7은 초기설계 및 최적설계의 형상 및 변위 상태를 보여주고 있는데, 이 변위는 모두 20배 확대된 것이다. 또한 길이방향 응력과 둘레방향 응력의 분포를 Fig. 8과 Fig. 9로 확인하였는데, 각각의 최대응력만 낮아진 것이 아니라 전체적으로 응력이 낮게 평준화 되었으며 최대응력 부위가 좁아진 것을 알 수 있다. 즉 본 논문에서 제안한 형상 설계민감도 식을 이용한 오메가 밀봉의 설계개선은 주어진 제한조건하에서 적절히 수행되었음을 알 수 있다.

5. 결론

연속체 역학의 전미분 개념과 보조변수식을 이용하여 축대칭 셸의 중심면에 수직인 방향으로의 형상설계 민감도 식을 유도하였다. 일반형상의 축대칭 셸 구조물의 형상설계 민감도를 구하기 위해서 구조물을 여러 구간으로 나누고, 각 구간마다에 수직좌표계를 설치하여, 앞에서 유도된 민감도 식을 적용하는 방법을 제안하였다. 오메가 밀봉에 대한 민감도 예제해석 결과는 제안된 방법에 따라 예측된 민감도가 유한차분에 의한 민감도와 잘 일치하고 있어 제시된 방법이 타당함을 보여주고 있다. 또한 민감도를 이용한 최적설계에 적용하여 제안된 방법이 구조물의 설계개선에 충분히 유용함을 보였다.

참고문헌

1. D. Chenais, "Optimal Design of Midsurface of Shells: Differentiability Proof and Sensitivity Computation," *Appl. Math. Optim.* 16 (1987)
2. S. S. Lee and B. M. Kwak, "Shape Sensitivity Analysis of Thin Shell Structures," *Fin. Ele. Anal. Des.* 10 (1992)
3. E. J. Haug, K. K. Choi and V. Komkov, Design Sensitivity Analysis of Structural system, Mathematics in Science and Engineering (1984)
4. I. Y. Kim and B. M. Kwak, "Shape Design Sensitivity Analysis and Optimization of General Arches," *Computers & Structures*, to be published.
5. 김인용, 곽병만, "축대칭 셸 구조물의 형상 설계 민감도 해석," 1992년도 추계 학술발표회 논문 초록집, 한국항공우주학회 (1992)

6. O. C. Zienkiewicz, The Finite Element Method, McGraw-Hill, N.Y. (1977)
7. T. Moan, "A Note on the Convergence of Finite Element Approximation for Problems in Curvilinear Coordinate," Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 3 (1974)
8. ANSYS User's Manual for Revision 4.4, Vol. I and II, Swanson Analysis Systems, Inc. (1989)
9. J. S. Arora, "An Algorithm for Optimum Structural Design without Line Search," in E. Artek et al.(Ed), New Directions in Optimum Structural Design, John Wiley & Sons, N.Y. (1989)

Table 1 Shape optimization results of omega seal

	Ψ	Maximum deflection (β)	Maximum stress (σ_l)	Maximum stress (σ_H)
Initial design	35.16	0.0209 inch	19042 psi	6159 psi
Optimal design	6.89	0.0046 inch	10241 psi	2996 psi

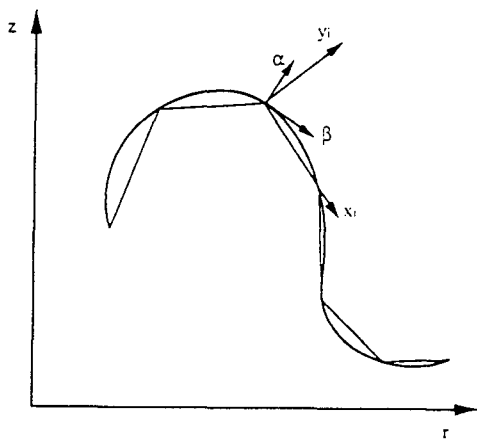


Fig. 1 Coordinate system by segmentation of a general axisymmetric shell

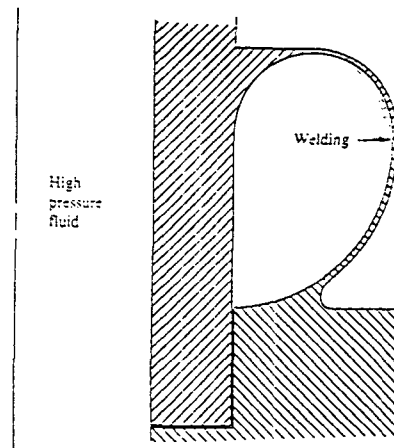


Fig. 2 Omega seal

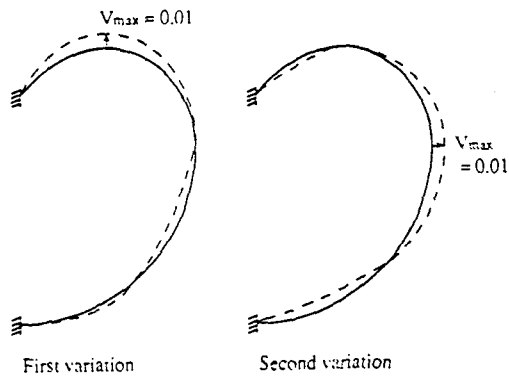


Fig. 3 Perturbed shapes of omega seal

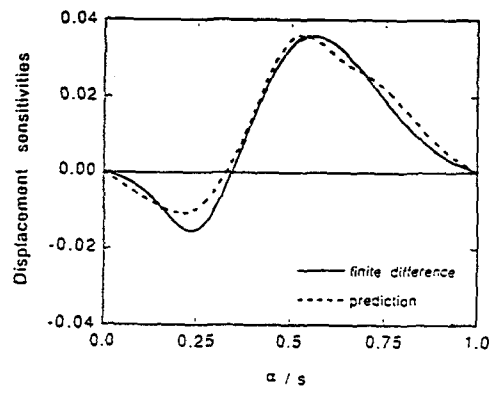


Fig. 4 Displacement sensitivities for the first perturbation of omega seal

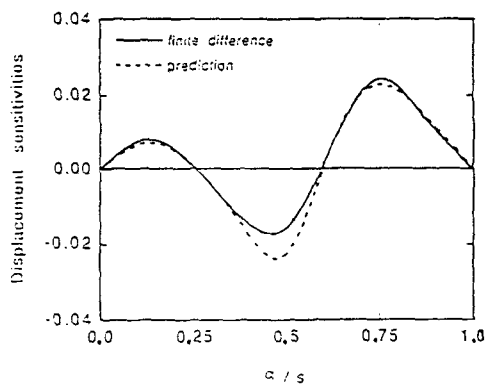


Fig. 5 Displacement sensitivities for the second perturbation of omega seal

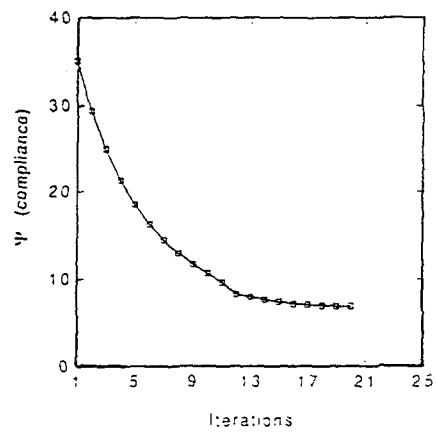


Fig. 6 History of optimization of omega seal

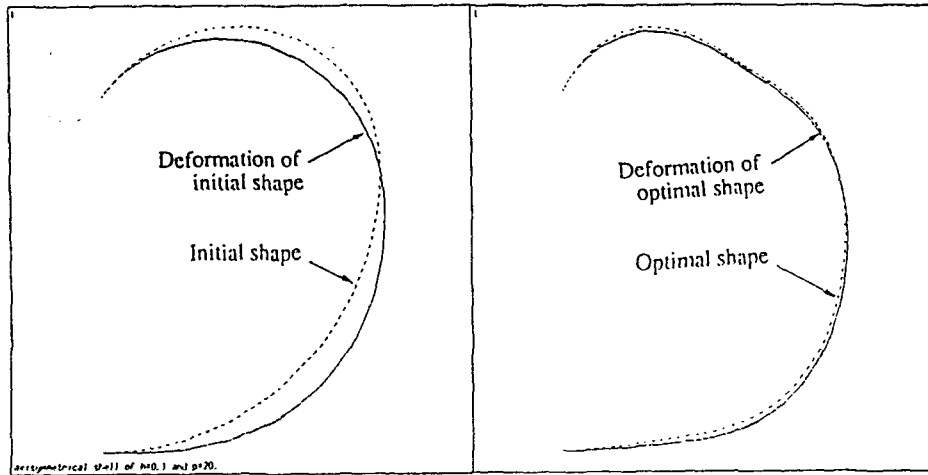


Fig. 7 Initial shape and deformation (left) and optimized shape and deformation (right) of omega seal. (Deformations are exaggerated 20 times.)

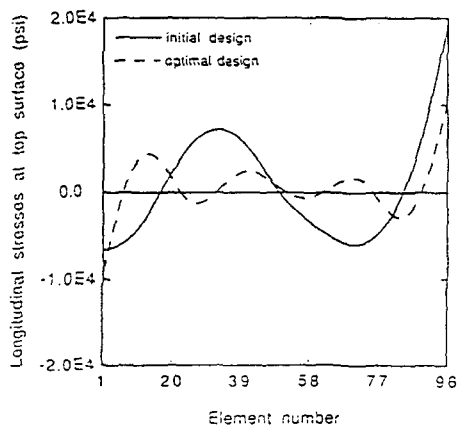


Fig. 8 Longitudinal stresses along the surface of omega seal of initial and optimized design

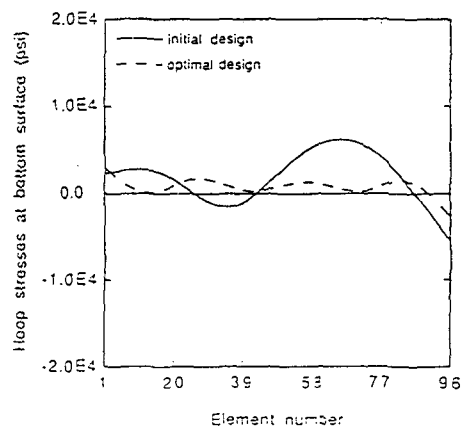


Fig. 9 Hoop stresses along the surface of omega seal of initial and optimized design