

탐상형 원통셸의 횡내력에 관한 기하학적 비선형해석
Geometrically Nonlinear Analysis of Cantilevered Cylindrical
Shells under Lateral Load

최 현식¹⁾
Choi, Hyun-Sik

ABSTRACT

Elastic failures of cantilevered cylindrical shells subject to lateral load are caused mainly by geometrical nonlinearity. Geometrically nonlinear analysis is called for so as to investigate failure mechanisms.

In this paper the geometrically nonlinear analysis of cantilevered cylindrical shells under transverse load by the Rayleigh-Ritz Method is presented to examine the collapse loads and the process of cross-sectional deformations.

The critical stress for relatively long cylinders have a tendency to show low level in comparison with the classical buckling stress for compression.

1. 서론

初期應力狀態가 비교적 단순한 하중에 대한 원통셸의 彈性挫屈 및 파괴현상에 관한 연구는 1911년 Lorenz의 연구이후 많은 研究結果가 축적되어 이들 현상의 臨界荷重評價式이 정립되어 사용되고 있다. 한편 초기응력상태가 복잡한 荷重상태에 관한 力學的性狀에 대해서는 理論정립이나 現象에 관한 명확한 分析이 되어 있지 않는 부분이 있다. 일례로서 風壓力, 地震力 등의 횡력에 의한 탐상형원통셸구조물의 破壞現象을 들 수 있으며 이들의 실제적인 파괴현상을 糾明하는 것은 매우 어려운 문제라 하겠다¹⁾. 횡력이 작용하는 경우중 가장 단순한 상태에 해당하는 基礎的 研究로서는 靜的인 수평력을 채용한 1935년 Lundquist 이후 이와 유사한 연구 결과가 있고, 최근에는 動的인 좌굴 및 파괴실험도 행하여지고 있다²⁾.

이러한 橫力이 작용하는 원통셸은 셸의 形狀에 따라 전단좌굴, 극부좌굴, 단면변형에 의한 剛性低下등의 현상이 나타나게 되고, 이들에 대한 연구가 부분적으로 수행되어오고있다. 특히 본 논문은 실제적으로 캔틸레버형 원통셸에 작용할 수 있는 하중성격중 가장 단순한 형태라 할수 있는 自由端에 횡방향하중이 작용하는 경우를 對象으로 하고 있다. 이러한 하중상태하의 탐상형원통셸에 대한 연구의 일부로서 비교적 긴형상의 원통셸에 대한 破壞特性 및 韌耐力의 평가를 목적으로 한다. 이와유사한 연구로서 1927년 Brazier가 단순힘이 작용하는 원관의 타

1) 계명대학교 건축공학과 부교수

원화현상에 의한 臨界荷重式을 제안하였고, 1975년 W.B.Stephen, J.H.Starnes 와 B.O.Almroth 는 STAGS computer code를 사용하여 단순힘과 內壓이 작용하는 圓管의 임계하중을 평가하고 있다 3, 4).

본 논문은 횡력에 의하여 剪斷挫屈을 일으키는 낮은 높이의 塔상형원통셀에 대비하여 비교적 높이가 커지는 경우를 대상으로 하고 있다. 이와같은 비교적 긴형상의 塔상형원통셀은 幾何學的 非線形性에 의한 斷面變形에 의하여 파괴되는 경향이 있으며, 자유단에 수평력이 작용하는 캔틸레버형 원통셀의 임계하중 및 단면의 형상변화등을 파악하기 위한 연구로서 기존의 結果 5)를 수정, 보완하고 있다. 解析에 관한 基礎式은 3각함수로 가정된 변위함수를 토대로 Rayleigh-Ritz 법에 의하여 유도되고 비선형해석법은 局所線形化된 변위증분법에 의하기로 한다 6).

2. 변위함수 및 경계조건

원통셀의 直交曲線座標系를 그림 1과 같이 설정하고 면내축중심의 회전이 법선방향의 변위로만 표현되는 비교적 편평한 형상의 원통셀에 적용가능한 Donnell의 근사이론을 적용하기로 한다. 변위 v, u, w 를 사용한 Donnell의 변위-변형도관계는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \epsilon_{\theta} &= \frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{a} w + \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \\ \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} 2\epsilon_{x\theta} &= \gamma_{x\theta} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{a} \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\partial w}{\partial x} \\ k_{\theta} &= - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \\ k_x &= - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (2)$$

$$2k_{x\theta} = \tau_{x\theta} = - \frac{2}{a} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial x}$$

지진력, 풍하중등의 水平力에 의한 塔상형원통셀의 역학적인 破壞性狀을 규명함에 있어, 실제의 하중상태 및 구조물의 支持條件등을 단순화한 모델은 이론전개의 용이성과함께 기본적인 성상의 把握에 매우 중요하다 하겠다. 따라서 본 논문에서는 그림 2와 같은 單純모델을 채택하여 기하학적 비선형해석을 행하고자 한다. 境界條件은 그림 2와 같이 하단고정, 상단자유로 設定하고 변위함수는 식(3)과 같이 가정한다.

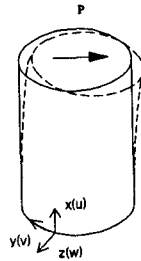


그림 1 원통셀의 곡선좌표계

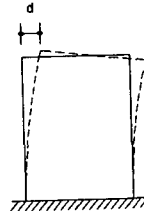


그림 2 원통셀의 변위 및 경계조건

$$\begin{aligned}
u &= \sum_m \sum_n U_{mn} \sin \frac{(2m-1)\pi}{2L} x \cos n\theta \\
v &= d \frac{x}{L} \sin \theta + \sum_m \sum_n V_{mn} \sin \frac{m\pi}{L} x \sin n\theta \\
w &= - \sum_m \sum_n W_{mn} \left(1 - \cos \frac{(2m-1)\pi}{2L} x\right) \cos n\theta \\
m &= n = 1, 2, 3, \dots
\end{aligned} \tag{3}$$

또한 원통셀의 경계조건식은 식(4)와 같고 上端에서의 法線方向의 경계조건은 해석과정에서 부대조건으로서 처리되어야 한다.

$$\begin{aligned}
x = 0 : u = 0, v = 0, w = 0, \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\
x = L : v = d \sin \theta, w = -d \cos \theta, \frac{\partial w}{\partial x} = 0, N_x = 0
\end{aligned} \tag{4}$$

그리고 수평전단력이 작용하는 탐상형원통셀의 Rayleigh-Ritz 법에 의한 비선형해석의 기초식을 誘導함에 있어 필요한 탄성변형에너지의 제 1 변분량 δU 및 외력의 포텐셜에 대한 제 1 변분 δW 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\delta U &= C \int_0^L \int_0^{2\pi} [\varepsilon_\theta \delta \varepsilon_\theta + \varepsilon_x \delta \varepsilon_x + \nu \varepsilon_\theta \delta \varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_x \delta \varepsilon_x + 2(1-\nu) \varepsilon_x \theta \delta \varepsilon_x \theta] ad\theta dx \\
&+ D \int_0^L \int_0^{2\pi} [k_\theta \delta k_\theta + k_x \delta k_x + \nu k_\theta \delta k_\theta + \nu k_x \delta k_x + 2(1-\nu) k_x \theta \delta k_x \theta] ad\theta dx \\
\delta W &= - P \delta d
\end{aligned} \tag{5}$$

$$\tag{6}$$

따라서 수평전단력 P가 작용하는 탐상형원통셀의 전포텐셜에 관한 제 1 변분은 다음과 같이 표현 할 수 있다.

$$\delta I I = \delta U + \delta W \tag{7}$$

또한 平衡方程式은 전포텐셜에너지 최소의 원리에 의하여 다음식과 같이 구하여 진다.

$$\delta I I (d, U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, P) = 0 \tag{8}$$

식(8)에 의하여 수평전단력을 받는 원통셀의 기하학적 비선형해석에 관한 평형방정식을 유도 할 수 있으며, 非線形解析을 위해서는 近似計算法이 적용될 수 있다.

3. 기초방정식 및 프로그램

3.1. 비선형방정식의 선형화

식(8)로 부터 미정계수 $d, U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}$ 의 1차, 2차, 3차항을 포함하는 $\delta d, \delta U_{mn}, \delta V_{mn}, \delta W_{mn}$ 에 대한 $(1+3mn)$ 개의 비선형의 平衡方程式이 다음과 같이 얻어진다.

$$f_r(d, U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, P) = f_r(D_i, P) = 0 \quad (9)$$

식(9)는 既知의 평형상태로 부터 식(10), 식(11)과 같이 増分の 형태로 近似表現할 수 있고 식(11)을 Taylor 展開하면 변위 및 하중의 증분량 d_i, λ 에 대한 비선형방정식이 얻어진다⁶⁾.

$$f_r^0(D_i^0, P^0) = 0 \quad (10)$$

$$f_r(D_i, P) = f_r(D_i^0 + d_i, P^0 + \lambda) = 0 \quad (11)$$

$$\left[d_i \frac{\partial}{\partial D_i} + \lambda \frac{\partial}{\partial P} \right] f_r^0 + \frac{\partial}{2!} \left[d_i \frac{\partial}{\partial D_i} + \lambda \frac{\partial}{\partial P} \right]^2 f_r^0 + \dots = 0 \quad (12)$$

여기서 증분 d_i, λ 를 임의의 증분파라메터 h 의 함수로 두어 증분 $d_i(h), \lambda(h)$ 를 Maclaurin 전개하여 증분파라메터 h 의 차수별로 整理하면 식(12)는 다음과 같이 된다.

$$\{f_{r,i}^0\} \{d_i\} + \{f_{r,\lambda}^0\} \lambda = \{0\} \quad (13)$$

$$\{f_{r,i}^0\} \{d_i\} + \{f_{r,\lambda\lambda}^0\} \lambda^2 + \{f_{r,ij}^0\} d_i d_j + 2\{f_{r,i\lambda}^0\} d_i \lambda + \{f_{r,\lambda\lambda}^0\} \lambda^2 = \{0\} \quad (14)$$

$$\dot{\lambda} \equiv \frac{\partial}{\partial h} \quad \dot{d}_i \equiv \frac{\partial}{\partial h}$$

증분파라메터 h 의 1차식에 대한 増分區間을 국소선형화한 경우가 식(13)과 같이 표현된다. 본 논문에서의 기초식은 식(13)을 채용하고 증분파라메터 h 는 상단 수평변위 d 를 채택하여 국소선형화된 변위증분법에 의하여 해석하기로 한다.

그리고 식(13)의 평형방정식을 풀때 다음의 부대경계조건식을 부가하여 상단변위에 관한 拘束條件을 만족시키기로 한다.

$$\sum_m W_{m1} - d = 0 \quad (15)$$

$$\sum_n W_{ni} = 0, \quad i=2, 3, 4 \dots n \quad (16)$$

3.2. 강성행렬의 계산

식(13)에서의 剛性行列은 積分項을 포함하고 있으며, 특히 미정계수의 2차, 3차항이 포함되는 부분의 적분은 방대한 계산이 된다. 따라서 본 논문에서는 未定係數의 1차항에 해당되는 선형부분의 적분항에 대하여는 正解를 구하여 선형강성행렬 $[K_L]$ 을 구하고, 2차, 3차의 항에 대하여는 프로그램실행시 數值積分에 의하여 비선형강성행렬 $[K_N]$ 을 구하기로 한다. 이때 비선형부분에 대한 수치적분은 그 정도가 解析結果에 미치는 영향이 커므로 Gauss 적분법과 Simpson Rule 에 의한 적분 결과를 검토하였다. Simpson Rule 에 의한 적분결과가 正解에 近接하므로 본 계산에서는 x, y방향에 대하여 적분점수 각각 200으로 하는 Simpson Rule 을 채택하여 비선형강성행렬식을 계산하고 있다.

3.3 프로그램의 구성

非線形解析의 기초식에 根據하여 해석프로그램은 다음과 같은 內容으로 구성되어 있다.

- 셀의 형상, 재료정수, 變位増分値 Δd , 계산스텝수, 변위함수의 近似 (m, n)
- 선형부분의 剛性 Matrix 계산 $[K_L]$
- 비선형 강성 Matrix 요소의 積分項에 대한 수치적분(x, y 방향)
- 각 스텝별로 수치적분치와 係數를 이용하여 비선형강성 Matrix 계산 $[K_N]$
- 각 스텝의 剛性方程式 확정 $[K]$
- 부가경계조건처리
- 각스텝의 強制 變位増分에 의한 聯立方程式의 解 (변위, 하중계산)

4. 비선형해석결과 및 고찰

4.1 해석결과

해석례로서는 셀두께 0.025cm, 0.05cm 의 두 種類를 선정하고, 표 2와 같은 길이의 모델에 대하여 數值計算을 행하였다. 수치계산결과는 두께 0.025cm에 한하여 표 2에 정리 하였다. 비선형강성행렬은 既知의 미정계수의 2차항은 무시하고 해석법은 3장에서 언급한 바와 같이 局所線形化한 변위증분법에 의하기로 한다. 또한 식(3)의 변위함수는 $m=n=1\sim 6$ 을 채택하여 계산하였다.

표 1 해석모델 및 수치계산결과

unit : kg, cm

No.	L	a	t	Δd	P_{max}	d_{lim}	σ_{lim}	σ_{lim}/σ_{cl}
1	140	15	0.025	0.025	281.9	0.65	2233.5	1.05
2	150	15	0.025	0.012	216.8	0.62	1840.4	0.87
3	160	15	0.025	0.025	148.3	0.48	1342.8	0.63
4	170	15	0.025	0.005	138.7	0.50	1339.7	0.63
5	180	15	0.025	0.025	86.0	0.40	876.0	0.41
6	190	15	0.025	0.012	73.5	0.40	790.3	0.37

표 1에서보는 바와같이 각 형상이 길어지는 경우, 임계응력도 σ_{lim} 은 압축력에 대한고전 좌굴응력도 σ_{cl} 에 비하여 상당히 낮아지는 경향을 보이고 있다. 표 2에서는 나타나있지 않지만 두께 0.05cm의 경우 σ_{lim}/σ_{cl} 의 비는 0.55-0.20정도의 낮은값을보이나, 임계응력도의레

벨로 평가한다면 셀두께에 관계없이 비슷한 레벨에 있다. 그리고 셀두께 0.025cm, 0.05cm의 두종류에 대한 하중변위관계는 그림 3과 그림 4와 같다.

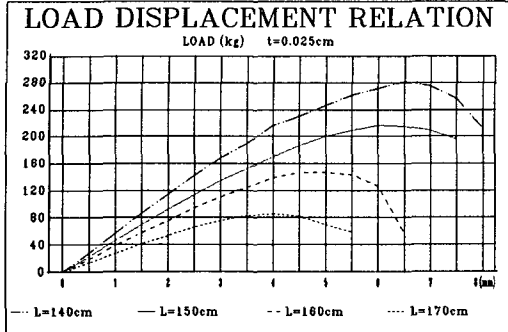


그림 3 하중-변위곡선 (t=0.025cm)

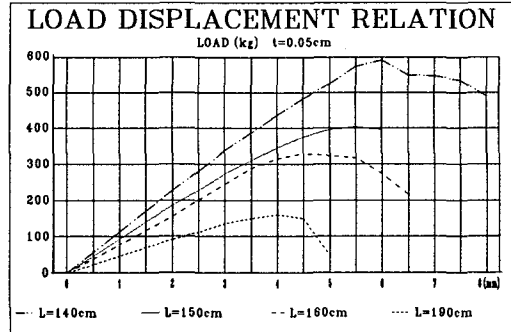


그림 4 하중-변위곡선 (t=0.05cm)

그림 3 및 그림 4에서 보는바와 같이 해석례에 따라 臨界點前後, 또는 부분적으로 스무스하지 못한 하중-변위관계는 變位函數表現의 項數(m,n), 변위중분, 국소선형화등의 여러가지 因子에 의하여 나타날수 있다고 판단한다. 이들解의 수렴상황과 변위중분과의 관계는 그림 5 및 그림 6에서보는 바와 같다. 여러 인자중 각 스텝의 變位增분에 국한하여 본다면 그림 5 및 그림 6에서와 같이 臨界荷重點이 달라지고 경우에 따라서는 임계점부근에서 상당히 不安定한 解를 가질수 있음도 그림 6에서 볼수 있다. 이러한 형상을 볼때 비선형해석의 解는 여러인자에 의하여 상당히 큰 影響을 받으므로 해의 收斂狀況에 대하여 충분히 검토하여야 할것이다.

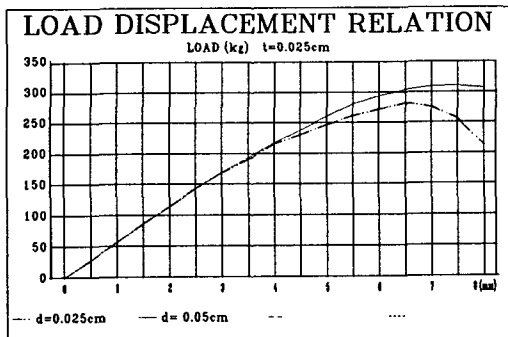


그림 5 변위중분량과 해의 수렴
(t=0.025cm, L=140cm)

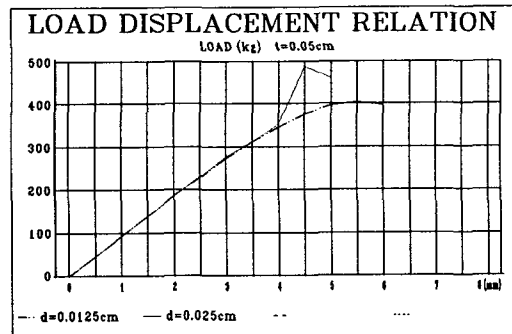


그림 6 변위중분량과 해의 수렴
(t=0.05cm, L=150cm)

4.2 단면의 변형상태

非線形成分에 의하여 발생하는 각 하중스텝의 斷面變形狀態를 파악하기 위하여 해석에서 얻어진 變位에 근거하여 塔상형원통셀의 각 위치에 대한 단면변형상태를 나타낸것이 그림 7 이다. 이 그림은 실제의 變位成分을 확대하여 그린것이다. 단면의 변형특성은 그림에서 보는바와 같이 초기에는 대체로 균일한 波形이 발생하여 점차로 압축측에는 초기원통셀 곡률보다 완만한 편평한상태로 변화하면서 剛性低下現象이 나타나고 있다. 한편 그림 8은 塔상형원통셀의 변형상태와 破壞形狀의 일례를 나타내고 있다.

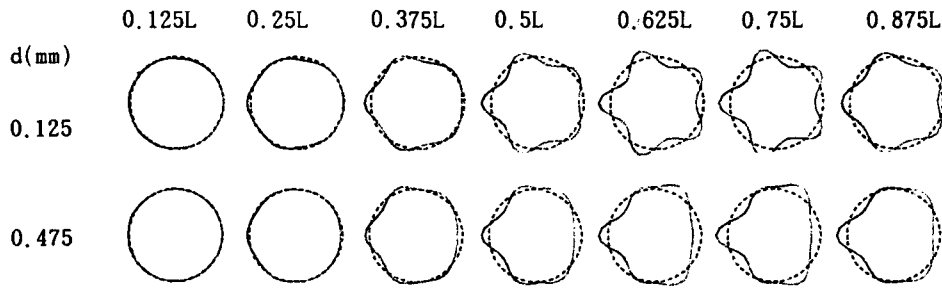


그림 7 단면변형상태 (L=160cm, t=0.025cm)

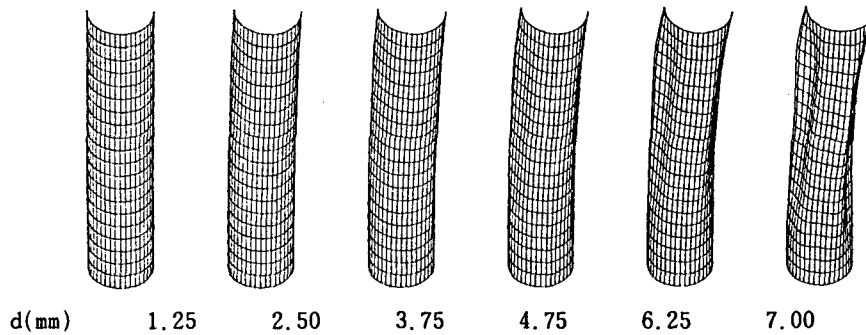


그림 8 파괴형상 (L=160cm, t=0.025cm)

4.3 고찰

원통셀의 幾何學的 非線形解析에서 구하여진 임계하중을 평가하기 위하여 임계하중이 작용될때의 最大壓縮應力度를 기준으로 하여 비교검토하기로 한다. 축압축에 대한 원통셀의 古典 挫屈應力度 σ_{c1} 은 식(17)으로 정의하고 또한 본 논문에서의 臨界應力度 σ_{cr} 은 식(18)에 의하여 구한 값이다.

$$\sigma_{c1} = \frac{1}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \frac{Et}{a} \quad (17)$$

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr} \cdot L}{\pi a^2 t} \quad (18)$$

식(17)에 의하여 계산된 $t=0.025\text{cm}$, $t=0.05$ 의 두 種類의 원통셀에 대한 임계응력도는 그림 9에서 보는바와 같이 비슷한 응력도레벨을 나타내고 있음을 알수있고, 이들 각각의 두께에 대한 고전좌굴응력도와 比較하여보면 두꺼운 경우($t=0.05\text{cm}$)가 고전좌굴응력도에 비해 상당히 낮은값을 나타내고 있다. 그림 10에서 알수있는 바와같이 원통셀의 길이가 길어질수록 臨界應力度는 압축에 관한 고전좌굴응력도에 비하여 상당히 낮은 레벨에 있으며, 아울러 두꺼운셀의 形狀일수록 古典挫屈應力度에 비해 상당히 낮은 임계응력도 레벨을 나타내고 있다. 이 현상은 압축에 관한 좌굴응력도는 식(17)에서와 같이 두께에 比例하나 본 논문에서의 구조물은 임계응력도가 두께에 거의 影響을 받지 않는 결과때문이다. 한편 본 논문의 모델이 되고 있는 비교적 긴형상의 筒狀형원통셀의 水平力에 의한 임계응력도는 Brazier가 提案한 단순힘을 받는 圓管의 임계응력도보다도 낮은레벨에 있는 경우도 있음을 알수 있다.

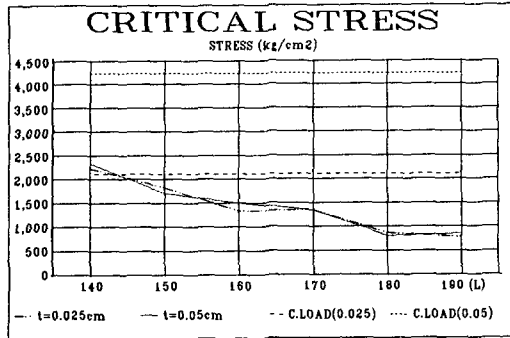


그림 9 임계응력도의 비교

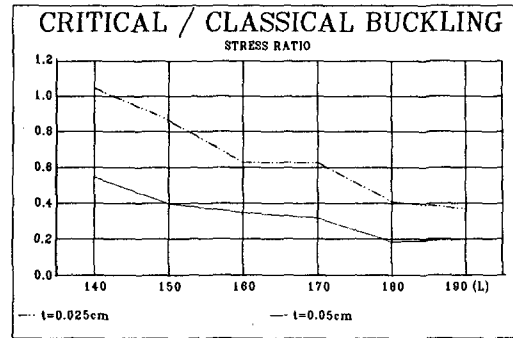


그림 10 임계응력도와 고전좌굴응력도와의 비교

5. 결론

본 논문은 수평력에 의한 塔狀形원통셀의 破壞性狀을 파악하기 위한 일련의 연구로서, 좌굴에 의한 것이 아니고 斷面變形에 의한 剛性低下가 파괴의 원인이 되는 비교적 긴형상의 원통셀을 對象으로 하였다. 단면변형에 의한 臨界荷重의 평가, 단면변형의 특성등을 把握하기 위하여 기하학적 비선형해석에 관한 프로그램을 작성하고, 본 논문에서 채택한 해석례의 결과를 토대로 다음과 같은 特性을 파악 할 수 있었다.

- 1) 上端 수평력을 받는 塔狀形원통셀의 破壞現象은 셀의 길이가 반경에 비하여 약 9배이상 일 경우 단면변형에서 起因하는 강성저하가 원인이 되며, 두께에 따라 다르나 고전좌굴응력도에 비하여 상당히 낮은 레벨의 臨界應力度를 나타내고 있다.
- 2) 임계응력도는 셀의 두께에 거의 影響을 받지않고, 셀의 높이/반경의 형상상비가 커지게 되면 상당히 낮은값을 보이고 일정한 한계에 수렴하고 있는 傾向이 있다.
- 3) 단면의 變形狀態는 변형 초기에는 半波形數 10에 해당하는 波形이 均등하게 발생하고 점차 압축측 단면의 곡률반경이 增大하면서 단면이 편평하게되는 변형특성을 보이고 있다.
- 4) 본 논문에서는 채택한 해석례, 변위함수의 自由度에 관한 制約, 변위중분등은 해석상황에 따라 變化될 수 있으며, 解析條件에따라 결과는 다소 變動할 수 있다고 판단된다.

참 고 문 헌

- 1) 内山和夫, "曲面構造の被害," 第33回 應用力學聯合講演會講演論文抄錄集, 1983, pp.43-48.
- 2) Lundquist, E.E., "Strength Tests of Thin-Walled Duralumin Cylinders in Combined Transverse Shear and Bending," NACA Technical Note, No.523, 1935.
- 3) Brázier, L.G., "On the Flexure of Thin Cylindrical Shells and Other Thin Sections," Proceedings of Royal Society of London, Series a, Vol.116, 1927, pp.104-114.
- 4) W.B.Stephens, J.H.Starnes and B.O.Almroth, "Collapse of Long Cylindrical Shells under Combined Bending and Pressure Loads," AIAA Journal, Vol.13, No.1, 1975, pp.20-25.
- 5) 崔 鉉植, "Rayleigh-Ritz법에 의한 원통셀의 非線形解析," 啓明大學校 産業技術研究所 論文報告集, Vol.11, 1989, pp.65-72.
- 6) Y.Hangai and S.Kawamata, "Post-Buckling Analysis of Elastic Shells of Revolution By the Finite Element Method," Report of he Institute of Industrial Science, The University of Tokyo, 1972, pp.245-295.