

단면과 압력변화를 고려한 효율적인 평판 요소의 개발
Development of Efficient Plate Element Considering
Variable Thickness and Nonuniform Pressure

0 이성우* 심규점**
Lee, Sung Woo Shim, Kyue Juhm

ASBTRACT

Most of wall or plate structures subjected to nonuniform earth or water pressure has variable thickness. These problems were generally solved by models with uniform thickness and pressure. To obtain more accurate and economic solution for this type of problem, efficient isoparametric plate element considering variable thickness and nonuniform pressure were developed. Some example problems demonstrated efficiency of the proposed element.

1. 서론

유한요소법에 이용되는 평판요소는 지금까지 여러 연구자들에 의해 대단히 많이 개발되었으며 여러가지 조건의 평판해석에 이용되어 왔다. 이러한 요소들은 대부분의 경우 평판의 두께가 일정하거나 평판이 등분포 압력을 받는 경우에 대하여 취급되어 왔다. 그러나 토압을 받는 지하 벽체구조물, 수압을 받는 해양구조물, 뚝구조물 등과 같은 토목 구조물에 흔히 나타날 수 있는 평판은 변단면 평판으로 되어 있거나 변압력을 받는 경우가 많다. 이러한 평판의 해석은 지금까지 등단면 평판이나 등압력 조건으로 많은 요소망을 이용하여 계단식으로 근사시켜 근사해를 구해왔다. 그러나 이러한 방법으로 해를 구할경우 많은 요소망이 필요하여 비 경제적으로 되며, 또한 아무리 촘촘한 요소망을 형성시키더라도 여전히 근사적으로 해석될 수 밖에 없었다. 이러한 문제점들을 해결하기 위하여 변단면과 변압력을 고려할 수 있는 평판요소의 개발이 필요하게 되었다. 본 연구에서는 등단면과 등압력을 고려할 수 있는 등매개 평판요소를 수정개발하여 변단면과 변압력을 고려할 수 있는 평판요소를 개발하였다. 등매개 평판요소는 Mindlin 이론을 근거로하여 개발하였고 전단변위가 고려되어 박판 뿐만 아니라 후판도 취급할 수 있도록 하였다. 요소는 4절점에서 9절점까지 변화할 수 있도록 하고 평판의 두께는 각 절점마다 다르게 할 수 있도록 하였다. 압력 또한 각 절점마다 다르게 입력될 수 있게하여 변압력을 적절히 고려할 수 있도록 하였다. 몇가지 예의 평판에 대해 이론해와 제시된 요소로 해석한 결과 및 계단식으로 근사시킨 해와 비교하여 개발된 프로그램의 효율성을 입증하였다.

2. 변단면, 변압력을 고려한 등매개 평판요소

* 정희원, 국민대학교 토목공학과 부교수, 공학박사
** 정희원, 동일기술공사 기사, 공학석사

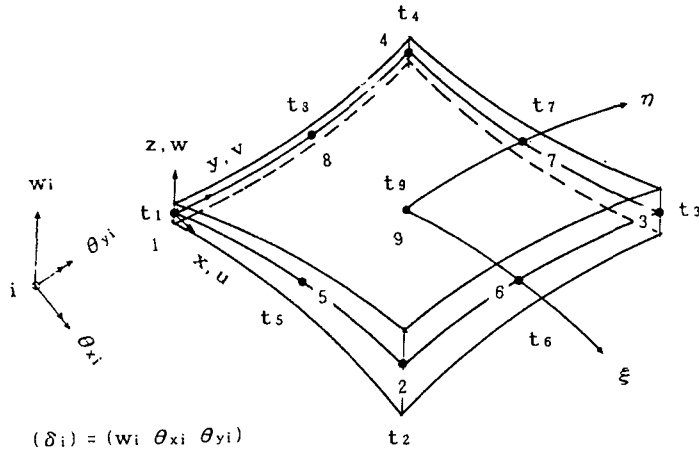


그림 1. 변단면의 등매개 평판요소

그림 1에는 각 절점마다 수직변위 (w)와 x 및 y 방향 회전변위 (θ_x, θ_y)를 가진 9절점 변단면 등매개 평판요소를 보여주고 있다. 그림 1에서 t_i ($i=1,2,\dots,9$)는 각 절점의 두께이다. 이 평판의 변위는 형상함수를 이용하여 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^N \psi_i \begin{Bmatrix} w^i \\ \theta_{x^i} \\ \theta_{y^i} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

여기서 N 은 고려하고 있는 요소의 절점수 이다. 등매개 평판요소의 강성행렬은 다음과 같이 표시된다. (1)

$$[K] = [K_b] + [K_s] \quad (2)$$

여기서 $[K_b]$ 는 평판 강성행렬의 굽힘(Bending)으로 인한 부분이고 다음과 같이 표시된다.

$$[K_b] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [S_b] \cdot |J| d\xi d\eta \quad (3)$$

여기서 J 는 Jacobian 이고 $[S_b]$ 는 다음과 같다.

$$[S_b] = \begin{matrix} & j=1 & \dots & j & \dots & j=3N \\ \begin{matrix} i=1 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ i=3N \end{matrix} & \begin{bmatrix} \vdots & & \\ \vdots & & \\ \dots & [S_b]_{ij} & \dots \\ \vdots & & \\ \vdots & & \end{bmatrix} & & & \end{matrix} \quad (4)$$

식 (4)의 $[S_b]_{ij}$ 는 3×3 행렬로 다음과 같이 표시된다.

$$[S_b]_{ij} = \begin{bmatrix} w & \theta_x & \theta_y \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -D_1\beta_i\beta_j + D_3\alpha_i\alpha_j & -D_2\alpha_i\beta_j - D_3\alpha_i\beta_j \\ 0 & -D_1\alpha_i\beta_j - D_3\alpha_j\beta_i & D_1\alpha_i\alpha_j + D_3\beta_i\beta_j \end{bmatrix} \quad (5)$$

한편 식 (2)의 $[K_s]$ 는 평판 강성행렬의 전단으로 인한 부분이고 다음과 같이 표시된다.

$$[K_s] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [S_s] \cdot |J| \, d\xi \, d\eta \quad (6)$$

여기서 $[S_s]$ 는 식 (4)와 같이 표시할 수 있고 3×3 행렬 $[S_s]_{ij}$ 는 다음과 같다.

$$[S_s]_{ij} = D_4 \begin{bmatrix} w & \theta_x & \theta_y \\ \alpha_i\alpha_j + \beta_i\beta_j & \beta_i\psi_i & \alpha_i\psi_i \\ \beta_i\psi_i & \psi_i\psi_i & 0 \\ \alpha_i\psi_i & 0 & \psi_i\psi_i \end{bmatrix} \quad (7)$$

여기서 D_1, D_2, D_3, D_4 는 등방성 평판의 강성계수이고 다음과 같다.

$$D_1 = Et^3 / 12(1-\nu^2), \quad D_2 = \nu D_1 \\ D_3 = Et^3 / 2.4(1+\nu), \quad D_4 = Et^3 / 2.4(1+\nu)$$

윗식에서 두께 t 는 형상함수를 이용하여 구한 Gauss point의 값이다.

$$t = \sum_{i=1}^N \psi_i t_i \quad (8)$$

식 (5)와 식 (7)의 α_i 및 β_i 는 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial X}{\partial \xi} & \frac{\partial Y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial X}{\partial \eta} & \frac{\partial Y}{\partial \eta} \end{Bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \psi_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

한편 변압력을 고려한 등가절점 하중벡터 $\{r\}$ 은 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\{r\} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\psi]^T \cdot \{P\} \cdot |J| \, d\xi \, d\eta \quad (10)$$

여기서 $\{P\} = \{P_{xn} \ P_{yn} \ P_{zn}\}$, $n=1, \dots, N$

$$P_{xn} = \sum_{i=1}^N \psi_i P_{xi}, \quad P_{yn} = \sum_{i=1}^N \psi_i P_{yi}, \quad P_{zn} = \sum_{i=1}^N \psi_i P_{zi} \quad (11)$$

여기서,

$N =$ 요소의 절점수

$\psi_i = i$ 절점의 형상 함수

$P_{xn}, P_{yn}, P_{zn} = i$ 절점의 x, y, z 방향 압력

3. 이론해 비교

3.1 변단면 평판해석

변단면 평판에 대한 이론해(3)와의 비교를 위해 그림 2와 같이 중앙에 집중하중을 받는 주변이 단순지지된 원형 평판모델을 고려하였다. 표 1에서 보는 바와 같이 등단면 요소의 계단식 모델보다 변단면 등매개 평판요소 모델이 보다 적은 요소망으로도 더 정확한 해를 구할 수 있음을 알 수 있었다. 보다 자세한 비교 분석은 참고문헌(2)를 참조하기 바란다.

표1. 사방이 고정된 변단면 원형평판의 중앙지점의 처짐 및 모멘트 비교

구분	$w_{max} = \alpha \frac{Pa^2}{Et_0^3}$ (m)	$M_r = \beta P$		$M_t = \beta_1 P$	
		$r = 0$ (Kg-m)	$r = a/2$ (Kg-m)	$r = a/2$ (Kg-m)	$r = a$ (Kg-m)
이론해(3)	0.0675 (0%)	0.59 (0%)	0.102 (0%)	0.116 (0%)	0.016 (0%)
등단면 모델(A)	0.0686 (1.6%)	0.55 (6.8%)	0.104 (1.9%)	0.124 (6.9%)	0.015 (6.3%)
등단면 모델(B)	0.0688 (1.9%)	0.46 (22%)	0.116 (13.7%)	0.116 (0%)	0.021 (31.3%)
변단면 모델	0.0685 (1.5%)	0.52 (11.6%)	0.103 (0.98%)	0.115 (0.9%)	0.013 (18%)

- (주) 1. 괄호()는 이론해와 비교한 %에러
2. 모델(A)는 38개의 요소망, 모델(B)는 18개의 요소망

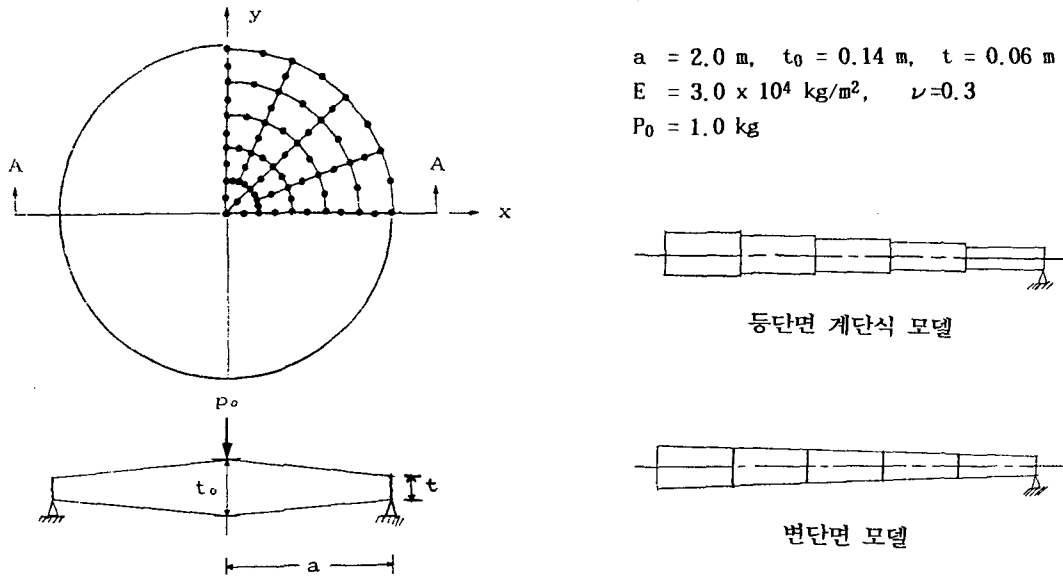


그림 2. 집중하중을 받는 변단면 원형 평판모델

3.2 변압력을 받는 평판해석

변압력 조건에 대한 이론해와 비교를 위해 그림 3과 같이 사변이 고정된 두께가 일정한 정사각형 평판 모델을 고려하였다. 입력하중은 A-A단면에서 B-B단면까지 선형적으로 변하는 변압력하중을 고려하였다. 모델은 8절점 요소를 사용하였으며 대칭을 고려하여 1/2만 모델링 하였다. 표 2에서 보는 바와 같이 같은 요소수의 등압력 계단식 모델과 비교하여 변압력 모델에서 훨씬 정확한 해를 구할 수 있음을 알 수 있었다.

표 2. 사방이 고정된 변압력을 받는 등단면 평판의 처짐 및 모멘트 ($a/b = 1.0$)

위 치	$X = 0, Y = 0$			$X = a/2$ $Y = 0$	$X = -a/2$ $Y = 0$	$X = 0$ $Y = \pm b/2$
	$W = \alpha \frac{P_0 a^4}{D}$	$M_x = \beta_1 P_0 a^2$	$M_y = \beta_2 P_0 a^2$	$M_x = \gamma_1 P_0 a^2$	$M_x = \gamma_2 P_0 a^2$	$M_y = \delta P_0 a^2$
이론해(3)	0.962 (0%)	2.994 (0%)	2.994 (0%)	8.550 (0%)	4.582 (0%)	6.580 (0%)
변압력 모델	0.971 (0.9%)	2.960 (0.54%)	2.960 (0.54%)	8.350 (2.35%)	4.520 (1.35%)	6.430 (2.28%)
등압력 계단식 모델	0.999 (3.8%)	2.695 (8.46%)	1.868 (36.5%)	8.510 (0.46%)	4.640 (1.26%)	6.440 (2.13%)

(주) : 괄호()는 이론해와 비교한 %에러

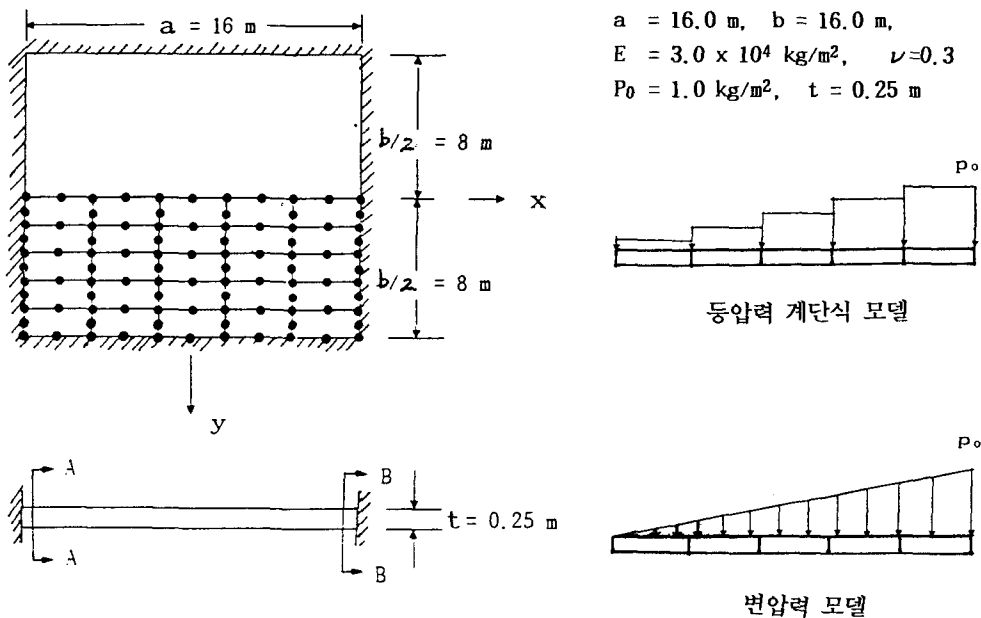


그림 3. 변압력을 받는 정사각형 평판모델

3.3 변압력을 받는 변단면 평판해석

변압력을 받는 변단면 평판의 해를 비교하기 위하여 그림 4와 같이 수압 또는 토압을 받는 벽체와 같은 경우인 한변이 고정된 사각형 평판 모델을 고려하였다. 변압력을 받는 변단면 평판은 이론해를 구할 수 없기 때문에 비교를 위해서 그림 5(a)의 변압력을 받는 변단면 모델과 같은 수의 요소를 사용한 그림 5(b)와 같이 등압력과 등단면을 이용하여 계단식으로 근사시킨 모델의 해석결과를 비교하였다. 그림 6에서 보여주는 바와같이 자유단에서 최대변위는 등압력 등단면 모델의 결과(20.03 Cm)가 변압력 모델의 결과(18.16 Cm)보다 10.3%더 크게 산정되었다. 또한 그림 7에서 보여주는 바와같이 고정단에서 모멘트는 x의 위치에 따라 다르나 x=0인 점에서 최대 모멘트

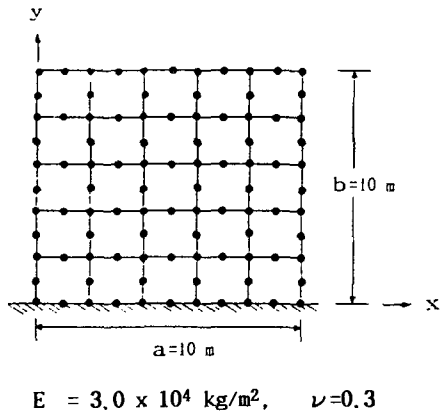


그림 4 변압력을 받는 변단면 평판의 모델

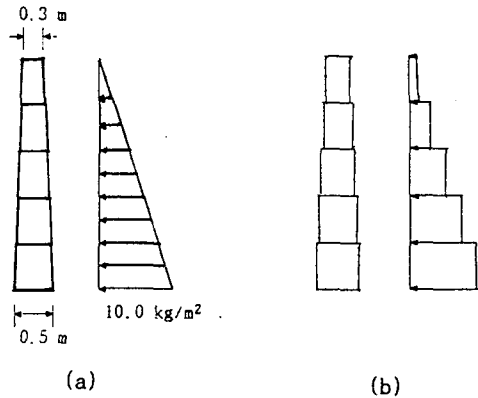


그림 5 해석모델 비교. (a) 변압력을 받는 변단면 모델, (b) 등압력과 등단면 요소를 이용한 계단식 근사모델

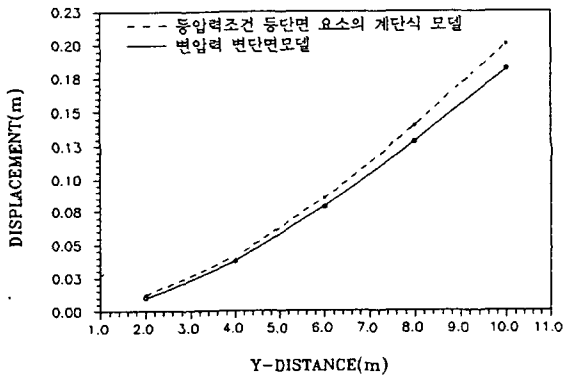


그림 6. 변위 비교

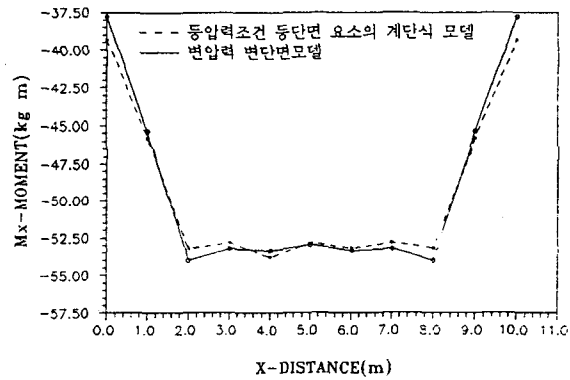


그림 7. 고정단의 Mx 모멘트 비교 (y=0, x=0 - a)

를 비교해보면 등압력 등단면 모델의 결과(39.4 Kg-m)가 변압력 변단면 모델의 결과((37.8 Kg-m)보다 4.1% 더 크게 산정됨을 알 수 있다. 따라서 같은 정도의 해를 얻기 위해서는 등압력 등단면으로 모델링 할 경우 더 많은 요소를 사용한 모델을 이용해야 함을 알 수 있으며 같은 수의 요소를 사용하면 변압력 변단면 모델에 비해 과다 설계 결과를 초래할 수 있음을 알 수 있어 변압력 변단면 모델의 효율성을 입증할 수 있었다.

4. 결론

토압이나 수압을 받는 구조물에서 흔히 나타날수 있는 변압력 조건이나 변단면 평판에 대해 계단식 근사해를 지양하고 보다 정확한 해를 구하기 위하여 단면 변화와 압력 변화를 고려한 효율적인 등매개 평판요소를 개발하였다. 개발한 변단면 등매개 평판요소를 이용하여 변압력조건과 변단면 조건에 대해 각각 이론해와 계단식 근사해를 비교한 결과 매우 정확한 해를 구할 수 있었으며, 또한 등단면과 등압력조건의 계단식 근사해와 비교한 결과 개발된 요소의 효율성을 입증하였다. 따라서 지하 구조물 설계시에 개발된 요소를 사용하면 기존의 계단식 근사해를 이용할 경우보다 더욱 정확하고 적절한 설계를 경제적으로 할 수 있음을 알 수 있었다.

참고 문헌

1. 이성우, "유한요소법을 이용한 슬래브 시스템의 설계자동화", 전산구조공학 제4권 제4호, 1991, pp 79-89.
2. 심규점, "변압력을 받는 변단면 평판의 유한요소해석과 프로파일 최소화 기법의 도입", 석사학위논문, 국민대학교 대학원, 1992, pp 57.
3. S. P. Timoshenko and W. Krieger, Theory of Plates and Shells, MacGraw Hill, 1970.