

뉴우먼 확장법에 의한 3차원 트러스의 확률유한요소해석 Stochastic Finite Element Analysis of Space Truss by Neumann Expansion Method

정 영 수 * 김 기 정 **
Chung, Young Soo Kim, Ki Jung

ABSTRACT

The Neumann Expansion method has been used for evaluating the response variability of three dimensional truss structure resulting from the spatial variability of material properties with the aid of the finite element method, and in conjunction with the direct Monte Carlo simulation methods. The spatial variabilites are modeled as three-dimensional stochastic field. Yamazaki [1] has extended the Neumann Expansion method to the plane-strain problem to obtain the response variability of 2 dimensional stochastic systems. This paper presents the extension of the Neumann Expansion method to 3 dimensional stochastic systems. The results by the NEM are compared with those by the deterministic finite element analysis and by the direct Monte Carlo simulation method

1. 서론

작금의 구조해석의 강력한 도구의 하나인 유한요소해석법은 여러가지의 정적 및 동적해석의 공학적 문제에 광범위하게 사용되고 있는 것은 주지의 사실이다. 그러나 실제 작용하는 하중 및 구성재료는 우리가 예견할 수 있는 바와 같이 불확정 성질(random property)을 갖고 있음에도 불구하고 기존의 유한요소해석법(Finite Element Analysis)을 이용한 구조해석은 확정론적(deterministic) 접근방식인 것이다. [2,3] 즉 구조해석시 고려되어야 할 불확정 요인에는 크게 두가지로 구분할 수 있다. 첫째로 작용하중의 불확정 성질, 둘째로 구성재료의 불확정성질 즉 탄성계수 혹은 포아손비등에 대한 불확정 성질인 것이다. 이외에도 단면 제원등 기하학적 성질등에도 많은 불확정 요인들이 내포되어 있다. [1,3] 본 논문은 두번째 경우의 재료의 불확정 성질을 불확정변수로 고려하여 탄성계수의 변이에 따른 2차원 트러스의 변위 및 3차원의 부정정트러스구조의 부재력의 변화량을 조사하였다.

이러한 확률론적 유한요소해석의 대표적인 방법을 열거하면 첫째로 몬테칼로 시뮬레이션기법 즉 가정된 확률변수의 Auto-Correlation 함수를 사용하여 N개의 탄성계수를 표본추출하여 각각의 탄성계수에 대한 주어진 하중조건에 대한 구조응답을 얻은 후 전체 결과에 대한 평균치 및 표준편차등을 얻어서 응답의 변화도를 분석 연구하는 방법, 둘째로 몬테칼로 시뮬레이션기법을 보완하는 하나의 근사해법인 뉴우먼 확장법 즉 N개의 표본에 대한 각각의 구조응답 계산시 매 계산마다 수행해야 하는 강성

* 중앙대학교 건설대학 토목공학과 부교수

** 중앙대학교 공과대학 토목공학과 석사과정

행렬의 도치는 많은 계산시간을 요구함으로 3.0 절의 식 (15)을 사용함으로써 수렴계수행렬을 적절히 유도하여 강성행렬의 도치를 수행하지 않고 계산시간을 현저히 감소시키는 방안[1] 그리고 셋째로 가중계수 적분방법[4, 5] 및 퍼터베이션(Perturbation) 방법등이 있다. 본 논문에서는 우선 첫번째 및 두번째 방법을 이용한 확률론적 유한요소 해석을 위하여 그림 1 과 같은 2차원 트러스 구조를 해석하여 변위의 변화량을 분석하였으며 또한 그림 2와 같은 부정정 3차원 트러스 구조물의 변위의 변화량 및 부재력의 변화량등을 조사분석하였다 한편 합리적인 응답의 변화량을 얻기위해 필요한 최소치 N값에 대한 연구도 수행하였으며 이들의 연구결과를 기초로 철근 콘크리트 2차원 및 3차원 프레임 구조물에 대한 확률론적 유한요소해법을 차후 수행코자 한다.

2. 확률장 및 해석방법

2.1 재료상수의 확률장

재료의 변이를 나타내는 확률변수로서는 탄성계수(E) 혹은 포아손비(ν)등을 취하여 확률론적 유한요소해석을 수행할 수 있으나 본 연구에서는 편의상 임의 부재의 탄성계수, $E(x)$ 를 확률변수로 선택하였으며 부재별 탄성계수의 형태는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} E(x) &= E_0(1 + a(x)) \\ E[a(x)] &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

상기 식에서 $E[\cdot]$ 는 기대치를 나타내는 기호이며, E_0 는 각 부재의 탄성 계수의 기대치 즉 종래의 확률론적 유한요소해석에서 사용된 탄성계수값이고 $a(x)$ 는 통계적 특성을 가지는 확률장(random field)으로서 가우시안(Gaussian) 분포로 가정하였다. 특히 $a(x)$ 는 재료의 탄성계수가 음의 값을 갖는 가능성을 배제하기 위하여 몬테칼로 시뮬레이션(Monte Carlo simulation)시 다음의 범위에 국한시키었다.

$$-1 + \epsilon \leq a(x) \leq 1 - \epsilon \quad (2)$$

단, ϵ 은 양의 값으로서 $0 < \epsilon < 1$ 로 취하였다.

2.2 Auto-Correlation 함수

재료상수의 변이 즉 식(1)에서 탄성 계수의 변이를 나타내는 $a(x)$ 의 Auto-Correlation함수는 각각의 부재의 공간좌표에 따른 상호관계를 나타내는 것으로서 다음과 같이 정의하였다.

$$R_{aa}(\xi) = E[a(x)a(x + \xi)] \quad (3)$$

상기 식에서 $a(x)$ 는 식(1)과 같이 탄성계수의 변이를 나타내는 계수로서 3차원 확률론적 유한요소해석 시 $\mathbf{x} = \{x \ y \ z\}^T$ 는 위치 벡터이고 $\xi = \{\xi_x \ \xi_y \ \xi_z\}^T$ 는 두 부재사이의 상대거리 벡터이다. 탄성계수의 변이가 공간에서 등방성(isotropic)이면 위의 Auto-Correlation함수는 단지 상대거리 Vector인 $|\xi|$ 만의 함수로 가정할 수 있으므로 본 논문에서는 등방성 Auto-Correlation 함수를 사용하였으며 다음식과 같이 표시할 수 있다. [1]

$$R_{aa}(\xi) = \sigma_0^2 \exp \left[- \left(\frac{|\xi|}{d} \right)^2 \right] \quad (4)$$

상기 식에서 d 는 양의 매개변수이며 σ_a 는 확률변수 $a(x)$ 의 표준편차로서 본 연구에서는 0.2의 값을 사용하였다. 특히 d 는 상관관계의 척도(Scale of Correlation)로 정의할 수 있으며 값이 클 수록 상관관계가 적어짐을 나타낸다. [5]

2.3 탄성계수 행렬

종래의 유한요소 해석시 신뢰할 수 있는 결과를 얻기 위하여 해석 구조물은 통상적으로 가능한 작은 Mesh로 분할하여 수행한다. 본 연구에서는 편의상 트러스 구조의 각 절점을 Node로 취하여 유한요소수는 트러스의 부재수와 동일하도록 하였다. 따라서 N 개의 탄성계수는 Auto-Correlation 함수로부터 구한다. $a_i = a(x_i); i = 1, 2, \dots, n$ 들은 기대값이 0인 불확정 분포이나 서로 상관 관계를 갖는 값들이다. 단 " x_i "는 " i " 번째 부재의 중심점이다. 그들의 상관관계는 분산행렬, C_{aa} 로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$C_{ij} = COV[a_i a_j] = E[a_i a_j] = R_{aa}(\xi_{ij}) \quad (5)$$

단 $\xi_{ij} = x_j - x_i$ 를 나타내며 이는 요소 " i " 와 " j " 사이의 거리이다. 벡터 $\underline{a} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}^T$ 는 다음식으로 구할 수 있다.

$$\underline{a} = \underline{LZ} \quad (6)$$

단 식(6)에서 $\underline{Z} = \{Z_1, Z_2, \dots, Z_n\}^T$ 로서 기대값이 0이고 표준편차가 "1" 인 N 개의 독립적인 가우시안(Gaussian) 확률변수이다. 그리고 \underline{L} 은 하부삼각행렬(Lower Triangle Matrix)로서 분산 행렬 C_{aa} 의 출레스키(Cholesky) 분해법으로 아래 식과 같다.

$$E[\underline{ZZ}^T] = \underline{I} \quad ; \quad \underline{LL}^T = \underline{C}_{aa} \quad (7)$$

\underline{I} 는 단위행렬이고 식(6)에 의해 구한 \underline{a} 는 다음 식을 만족한다.

$$E[\underline{aa}^T] = E[\underline{LZ}(\underline{LZ})^T] = \underline{L}E[\underline{ZZ}^T]\underline{L}^T = \underline{C}_{aa} \quad (8)$$

즉 분산행렬 \underline{C}_{aa} 에 대한 출레스키(Cholesky)분해를 수행하면서 N 개의 독립적이고 가우시안(Gaussian) 분포의 확률변수 \underline{Z} 를 구한후 표본벡터 \underline{a} 를 식(6)에 의해 구할 수 있다. 이러한 기법을 본 연구에서는의 몬테칼로(Monte Carlo) 모의기법 및 뉴우먼(Newmann) 확장법에 의한 확률론적 유한요소 해석에 사용하였다.

3. 뉴우먼 확장법

유한요소법에서는 다음과 같이 정적평형방정식을 구한후 강성 행렬 $[K]$ 를 도치하여 변위를 구할 수 있다.

$$[K]\{\Delta\} = \{F\} \quad ; \quad \{\Delta k\} = [K]^{-1}\{F\} \quad (9)$$

상기 식에서 $\{\Delta\}$ 는 변위, $[K]$ 는 강성행렬 그리고 $\{F\}$ 는 하중을 나타낸다. 강성행렬의 도치는 행렬의 크기에 따라 상당량의 CPU가 필요하며 이러한 계산 시간을 감소하기 위하여

가우시안(Gaussian)소거법, 출레스키(Cholesky)분해법등 많은 기법이 개발되었다. 본 연구에서는 수정 출레스키(Modified Cholesky)분해법을 사용하여 강성행렬을 다음과 같이 분해하였다.

$$[K] = [U]^T [D] [U] \quad (10)$$

상기식에서 [U]는 모든 대각선 성분이 "1"인 상부삼각(Upper Triangle)행렬을 나타내며 [D]는 대각선 행렬을 나타낸다. 식 (10)를 식(9)에 대입하여 정리하면

$$[U]^T [D] [U] \{\Delta\} = \{F\} \quad (11)$$

이다. 만약 $[D][U]\{\Delta\} = \{X\}$, 그리고 $[U]\{\Delta\} = \{Y\}$ 로 대치하면 변위행렬값 $\{\Delta\}$ 는 아래의 식과 같이 단계적으로 계산할 수 있다.

$$[U]^T \{X\} = \{F\} \quad ; \quad [D] \{Y\} = \{X\} \quad ; \quad [U] \{\Delta\} = \{Y\} \quad (12)$$

특히 주목할 점은 상부삼각(Upper triangle)행렬 [U]는 [K]와 같은 크기의 Bandwidth를 갖는다.

확률유한요소법에서는 탄성계수의 변이로 인하여 수정되는 강성행렬은 다음식과 같이 선형적으로 중첩하여 나타낼 수 있다.

$$[K] = [[K_0] + [\Delta K]] \quad (13)$$

상기 식에서 $[K_0]$ 는 기대치의 강성행렬 즉 통상적으로 정적해석시에 入力되는 탄성계수로 부터 유도된 강성행렬을 나타내며 $[\Delta K]$ 는 각 부재별 탄성계수의 변화량에 따른 강성행렬의 각 성분의 변화량인 증가분의 행렬을 나타낸다. 확정론적 변위 $\{\Delta_0\}$ 를 식 (9)와 같이 도치법 혹은 식 (12)와 같이 분해법으로 구할수 있다. 본 논문에서는 식 (12)와 같은 분해법으로 구하였으나 뉴우먼(Neumann) 확장법 유도를 위하여 편의상 다음식과 같이 쓸수있다.

$$[K_0] \{\Delta_0\} = \{F\} \quad \implies \quad \{\Delta_0\} = [K_0]^{-1} \{F\} \quad (14)$$

식(13)의 강성행렬의 도치는 뉴우먼 확장법을 이용하여 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} [K] &= [K_0 + \Delta K]^{-1} \\ &= [K_0]^{-1} - [K_0]^{-1} [K_0]^{-1} [\Delta K] + [K_0]^{-1} [K_0]^{-1} [\Delta K] [K_0]^{-1} [\Delta K] - \dots \quad (15) \\ &= [K_0]^{-1} [[I] - [P] + [P] * [P] - \dots] \end{aligned}$$

즉 $[P] = [K_0]^{-1} [\Delta K]$ 는 수렴계수 행렬을 나타낸다. 따라서 변위 $\{\Delta\}$ 는 상기 식을 이용하여 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} \{\Delta\} &= [K]^{-1} \{F\} \\ &= \{\Delta_0\} - [P] \{\Delta_0\} + [P] [P] \{\Delta_0\} - \dots \\ &= \{\Delta_0\} - \{\Delta_1\} + \{\Delta_2\} - \{\Delta_3\} + \dots \end{aligned} \quad (16)$$

식(16)에서 각 항의 $\{\Delta_i\}$ 는 다음과 같이 연산식으로 구할 수 있다.

$$\{\Delta_i\} = [P] \{\Delta_{i-1}\} \quad i = 1, 2, \dots \quad (17)$$

즉 식(14)와 같이 $[K_0]$ 의 수정 콜레스키(Modified Cholesky) 분해법에 의해서 $\{\Delta_0\}$ 를 우선 계산하고 다시금 식(17)에 의해서 $\{\Delta_i\}$ 항들을 차례로 구한후 식(16)에 의해서 $\{\Delta\}$ 를 최종적으로 구할 수 있다. 특히 본 연구에서는 식(16)의 급수식에서 $\{\Delta\}$ 의 계산 종료는 아래식의 수렴조건을 만족시키는 $\{\Delta_i\}$ 까지 고려하는 것으로 가정하였다.

$$\delta_{err} \geq \frac{\max \{\Delta_i\}}{\max \{\Delta_0\}} \quad (18)$$

상기 식에서 δ_{err} 은 수렴된 값을 구하기 위한 허용오차를 말한다. 본 연구에서는 0.001의 허용오차값을 사용하였다. 특히 뉴우먼 확장법은 $[P]=[K_0]^{-1}[\Delta K]$ 의 모든 eigen값들의 절대값들이 1.0 보다 작은 경우에만 수렴한다. [1]

4. 수치해석 예제

수치해석에 사용된 예제는 그림 1 와 같은 2차원 트러스(Truss) 구조물과 그림 2 와 같은 3차원 트러스(Truss) 구조물이다. 표본 추출된 부재별 탄성계수 값은 표 1 에 도표화 되었다. 한편 Auto-Correlation함수에서 상관관계거리 d는 깊이 커짐에 따라 COV값이 수렴되었으며 a(x)의 표준편차로서 $\sigma_a = 0.2$ 를 사용하였다. 한편 그림 3 은 2차원 트러스 예제의 반복계산 횟수에 따른 부재의 절점 5 에서의 x 및 y 방향 변위에 대한 계산 횟수별 기대치 및 평균값을 비교한 것이다. 각 계산반복 횟수에 따른 절점 5에서의 변위의 평균값은 대체로 10 번째 반복횟수에서 수렴하고 있음을 알 수 있다. 마찬가지로 그림 4는 절점 12에서의 N 값에 따른 x, y 및 z 방향의 변위값을 보여주고 있다. 즉 양 그림에서 몬테칼로 모의기법에서 요구되는 최소 반복계산횟수는 10회 정도임을 알 수 있다.

5. 결론 및 추후 연구과제

본 논문은 트러스 구조물의 몬테칼로(Monte Carlo)모의기법 및 몬테칼로(Monte Carlo)모의기법의 근사해법으로서 뉴우먼(Newmann) 확장기법에 의한 확률유한 요소 해석에 관한 것으로서 추후의 철근 콘크리트 프레임 구조물의 확률유한요소 해석에 의한 구조응답의 변이 및 안전성 평가를 위한 기초적인 연구결과이다.

채택된 뉴우먼(Newmann) 확장기법은 몬테칼로 모의기법을 보완할 수있는 훌륭한 확률론적 유한 요소해석 기법으로서 프레임요소, 평면응력요소 그리고 판요소등에 적절히 사용할 수 있으리라 판단된다. 특히 뉴우먼(Newmann) 확장법등은 종래의 유한요소법에 의해 분할된 유한요소등을 동일하게 사용할 수 있으며, 본 확률론적 유한요소 해석법은 추후에 부재및 구조물의 안전성 평가에 적용할 수 있는 훌륭한 방안이라 생각된다. 본 연구에 계속하여 퍼터베이션(Pertubation)법, 가중치 적분법 등에 의한 확률유한요소 해석법에 관한 연구를 병행 수행하고자 한다.

6. 참고문헌

- 1) Yamazaki, F., Shinozuka, M. and Dasgupta, G., "Neumann Expansion for Stochastic Finite Element Analysis," Journal of Engr. Mechanics, ASCE, Vol.114, No.8, 1988
- 2) Shinozuka, M., "Structural Response Variability," Journal of Engr. Mechanics, ASCE, Vol. 113, No.6, 1987
- 3) Shinozuka, M., and Deodatis, G., "Response Variability of Stochastic Finite Element Systems," Journal of Engr. Mechanics, ASCE, Vol. 114, No.3, 1988
- 4) Deodatis, G., "Weighted Integral Method I : Stochastic Stiffness Matrix," Journal of Engr Mechanics, ASCE, Vol. 117, No.8, 1991
- 5) Shinozuka, M., and Deodatis, G., "Weighted Integral Method II : Response Variability and Reliability," Journal of Engr. Mechanics, ASCE, Vol. 117, No.8, 1991
- 6) Harada, T., and Shinozuka, M., "The Scale of Correlation for Stochastic Fields-Technical Report," Department of Civil Engr. and Engr. Mechanics, Columbia University, July, 1988

표 1. 부재별 탄성계수 (2차원 트러스)

단위 : kg/cm²

부재 번호 표본	1/ 7/13	2/ 8	3/ 9	4/10	5/11	6/12	평균값	표준편차
표본 1	2.731E+03 2.622E+03 2.163E+03	1.548E+03 2.569E+03	1.079E+03 1.687E+03	1.511E+03 1.946E+03	1.804E+03 2.135E+03	2.374E+03 1.403E+03	1967.08	496.368
표본 2	1.558E+03 1.425E+03 2.019E+03	1.602E+03 1.583E+03	2.173E+03 1.680E+03	1.918E+03 2.210E+03	1.885E+03 2.740E+03	2.713E+03 1.877E+03	1952.54	401.618
표본 3	2.120E+03 1.895E+03 2.012E+03	1.690E+03 2.308E+03	2.119E+03 2.239E+03	1.643E+03 1.985E+03	2.069E+03 1.230E+03	2.565E+03 1.912E+03	1983.62	320.652

그림 1. 2 차원 트러스 모델

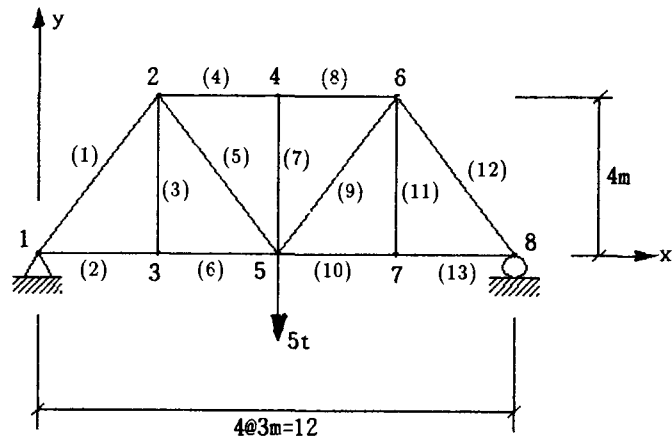


그림 2. 3 차원 부정정 트러스 모델

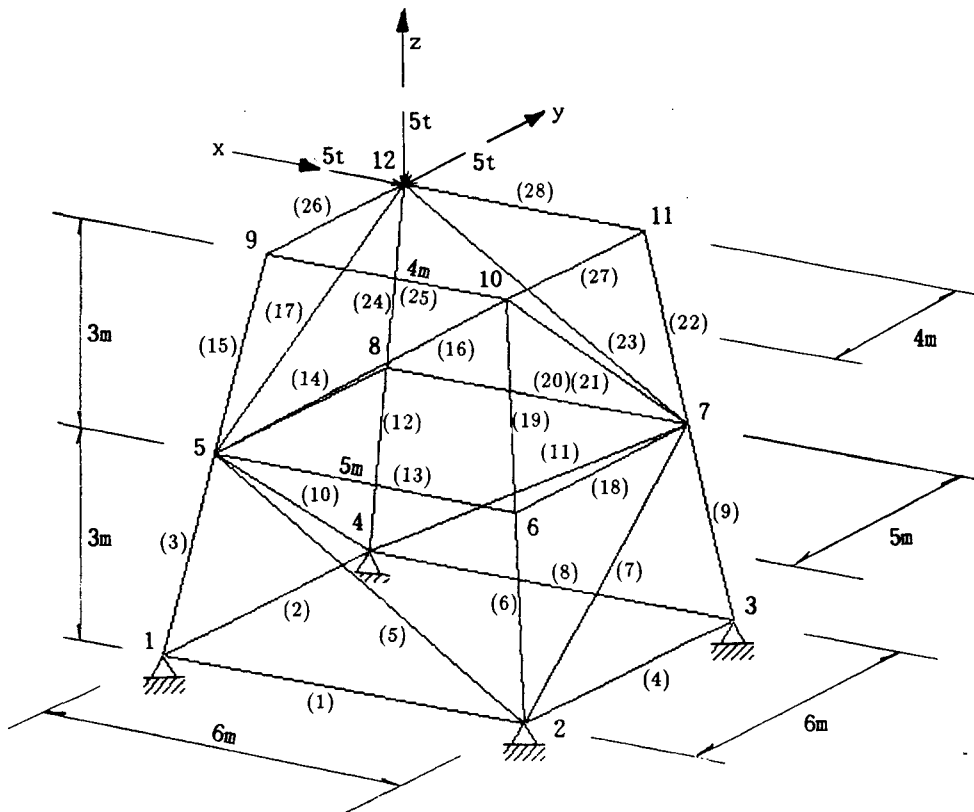


그림 3. 2 차원 트러스 모델의 절점 5의 변위변화도

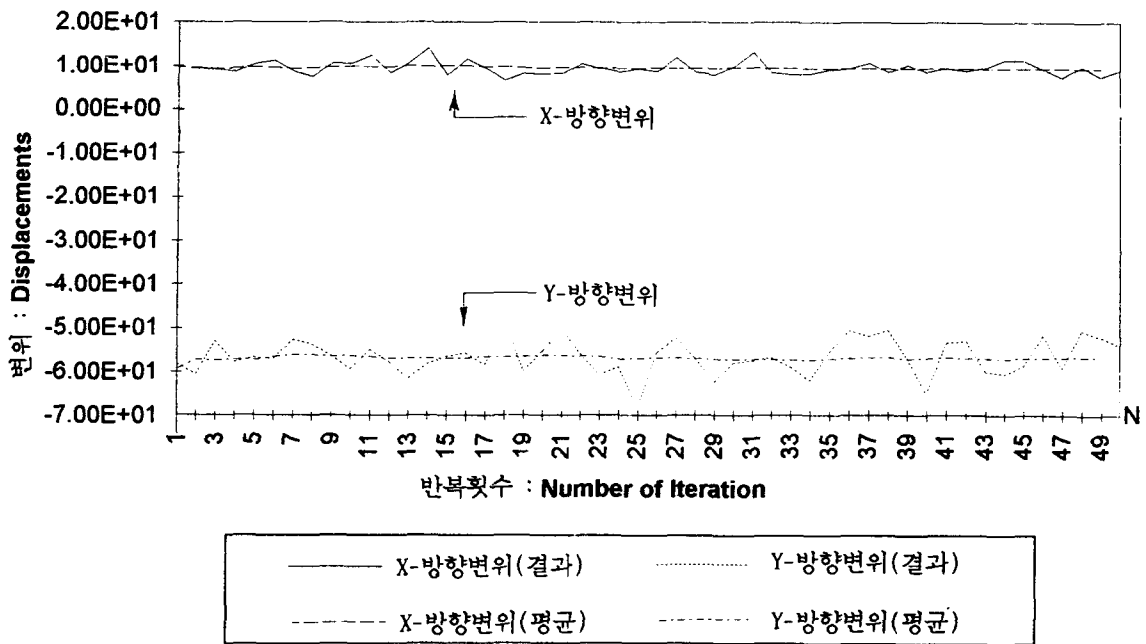


그림 4. 3 차원 트러스 모델의 절점 12의 변위변화도

