

線形彈性破壞力學 理論에 의한 龜裂板의 p-Version 有限要素解析

p-Version Finite Element Analysis of Cracked Panels
Based on Linear Elastic Fracture Mechanics

윤 영 필*, 우 광 성**, 박 병 기***, 신 영 식****
Y. P. Yun K. S. Woo B. K. Park Y. S. Shin

ABSTRACT

The p-version crack model based on integrals of Legendre polynomial and virtual crack extension method is proposed with its potential for application to stress intensity factor computations in linear elastic fracture mechanics. The main advantage of this model is that the data preparation effort is minimal because only a small number of elements are used and the high accuracy and the rapid rate of convergence can be achieved in the vicinity of crack tip. There are two important findings from this study. Firstly, the limit value, the strain energy of the exact solution, can be estimated with successive three p-version approximations by ascertaining the approximations is entered the asymptotic range. Secondly, the rate of convergence of p-version model is almost twice that of h-version model on the basis of uniform or quasiuniform mesh refinement for the cracked panel problem subjected tension.

1. 序論

破壞力學 解析에 있어서 유한요소법에 의한 應力擴大係數(stress intensity factor)의 算定은 Gallagher^[1]에 의하면 다음 네 가지로 분류될 수 있는데 (1)直接法(direct method) (2)에너지 法(energy method) (3)重疊法(superposition method) (4)特異函數法(singularity function method) 이다. 여러 研究者들은 初期龜裂(initial flaws)을 갖는 구조물의 해석에 있어서 特異舉動이 표현되지 않은 一般的인 要素사용의 적용성을 연구하였는데 다음과 같은 問題에 直面하게 되었다. 첫째로, 龜裂先端에서 부터 거리 r만큼 떨어진 점까지의 應力 分布가 無限應力에서 有限應力으로의 急激한 轉移現狀을 從來의 要素로는 잘 表現되지 않는다는 점이다. 둘째는, 龜裂先端에서의 急激한 應力傾斜(stress gradient)를 나타내기 위해 龜裂先端에서의 要素分割을 매우 조밀하게 하여야 함으로 많은 自由度의 증가에 따른

* 목포전문대 토목공학과 부교수
**전남대학교 토목공학과 조교수
***전남대학교 토목공학과 교수
****영남대학교 토목공학과 부교수

컴퓨터 CPU 時間의 소요뿐만 아니라 많은 要素分割에 비하여 解의 信賴性에도 문제점을 안고 있다.

이러한 요구에 副應하기 위해 應力特異 舉動을 표현할 수 있는 特別한 龜裂先端 要素(crack-tip element)가 제안되어 解의 正確度 및 信賴性을 높일 수 있게 되었다. 特別要素의 部類는 세 가지로 요약해볼 수 있는데 첫째는 요소의 節點을 이동시키면서 Jacobian Matrix의 행렬식(determinant)을 0으로 유도하여 特異舉動을 묘사하고자 하는 연구인데 Byskov^[2]는 三角形 龜裂先端要素를 제안하였고 Hardy^[3]는 3:1의 形狀比를 갖는 四角形 龜裂先端要素를 개발하였는데 8절점을 갖는 變位形 要素이다. Barsoum^[4]은 20절점을 갖는 固體要素를 제안하였는데 邊節點(side node)의 中間節點(mid node)을 均열선단으로 1/4되는 위치에 이동시킴으로 특이거동을 표현하였다. 둘째는 複合要素(hybrid element)의 定式化를 이용하였다. 이 研究의 중요한 利點은 應力擴大係數가 獨立인 變數로 표시되어 直接的으로 計算할 수 있게 한다. 이 形式의 定式化는 Tong 등^[5]에 의해 처음 시도되었는데 多項式 補間法에 기초를 둔 收斂率은 $r^{-1/2}$ 의 應力특이성에 대하여 多項式 近似值의 次數와 관계없다고 결론지었다. 이 結論은 단지 h-收斂 方法에 근거를 둘 때만 가능하다는 것이 p-收斂 方法을 사용한 여러 연구자들에 의해 밝혀졌다. 이러한 複合要素에서 파생된 變種의 複合 요소들도 제안되어 있는데 Kang^[6]은 휨거동을 받는 有限板의 解析에 hybrid mongrel 特異 要素를 사용하였다. 세째는 均열선단을 제외한 영역에서는 종래의 變位要素를 그대로 사용하고 龜裂先端에서는 종래의 變위함수에 應力특이를 표현하는 이론적 變위함수를 더해 주는 방식으로 특이거동을 나타내는 補強混合要素(enriched mixed element)로 Benzely^[7], Heyliger^[8] 등에 의해 제안되었다. 즉, 均열선단에서 특이함수를 정의하는 방식인데 유한요소 定式化를 위해 混合變分法(mixed variational method)가 필요하게 된다.

平面龜裂 問題를 갖는 p-收斂에 基礎를 둔 해석은 p-version 소프트웨어 COMET-X^[9]를 사용한 Mehta^[10]의 논문이 최초이다. 여기서 사용된 요소는 르장드르 다항식(Legendre polynomial)을 형상함수로 사용한 삼각형 요소이고 중요한 結論은 解析모델링이 매우 單純하며 收斂性을 검토하기 위해 自由度 數의 증가에 따른 에너지 正規值(energy norm)의 相對誤差를 계산하면 收斂率이 等媒介變數 要素를 사용하여 均等要素分割(uniform mesh refinement)을 한 h-收斂 方式에 비해 2배 가량 빠름을 보여주고 있다. 이 결과는 後에 Babuska^[11]에 의해 理論적으로 입증된다. 즉, p-收斂率이 均等要素分割에 基礎를 둔 h-收斂率보다 더 느리지 않으며 應力特異가 매우 심한 문제에서는 2배가량 빠르다고 수학적으로 豫測하였다. 한편, Woo^[12,13]는 龜裂을 갖는 圓筒形 쉘구조(cylindrical shells)와 軸對稱 回轉體(axisymmetric solids)에 p-version 유한요소법을 적용하여 좋은 결과를 보여 주고 있다.

本 研究에서는 階層的 概念에 기초한 積分型 르장드르함수를 形狀函數로 사용한 四邊形 要素를 사용하고 應力擴大계수를 산정하기 위해 假想龜裂擴張法을 이용하여 引張力을 받는 一邊龜裂(single edged crack), 兩邊龜裂(double edged crack)과 中央龜裂(central crack)의 평판을 불과 4개의 요소를 사용하여 모델링하였으며 형상함수의 次數는 收斂性 조사를 한 결과 8次까지를 사용하여 既存의 數值解析 結果 및 實驗式과 비교하였다.

2. P-version 龜裂모델

2.1 積分型 르장드르 形狀函數

積分型 르장드르 多項式(integrals of Legendre polynomial)을 사용한 形狀函數는 $[-1, 1]$ x $[-1, 1]$ 의 正規領域에서 정의되며 3개의 그룹으로 大別할 수 있다. 제 1그룹은 四邊의 꼭지점에서 정의되는 p=1인 線形 형상함수로 基本 모우드(basic mode)라 하며 형상함수가 1

차일 때의 等媒介變數 要素의 형상함수와 일치한다. 제 2그룹은 形狀函數의 次數 p 가 2이상일 때 꼭지점을 제외한 4개의 변에 추가되는 모우드로 周邊 모우드(edge mode)라 한다. 이 모우드는 節點의 좌표값을 갖지 않고 단지 基本 모우드에 추가되면서 任意의 變位場을 정의하게 된다. 그러나, 幾何學的 形狀을 표현할 때는 基本 모우드만이 사용되는 반면에 變位場을 표현할 때는 모든 節點의 형상함수가 사용되는 까닭에 低媒介變數 要素(subparametric element)라 한다. 제 3그룹은 內部 모우드(internal mode)라 하며 유한요소解가 수립될 수 있는 條件中 하나인 完全性(completeness)을 만족시켜 주기 위한 모우드로 $i + j = p$ 라고 했을 때 p 가 4次 이상부터 발생하게 되며 要素의 邊에서는 모두 0이 됨을 만족시켜 준다. $p=8$ 일 때의 內部 모우드는 불룩한 形狀을 나타내므로 거품 모우드(bubble mode)라고도 한다.

2.2 應力擴大係數의 算定

有限要素法을 사용하여 應力擴大係數를 산정하기 위해 本 研究에서는 Parks^[14]와 Hellen^[15]에 의해 제안된 假想龜裂擴張法이 채택되었는데 이 방법은 假想龜裂 길이 δl 가 일정범위를 넘게되면 에너지 放出率 G 값이 不安定한 값을 보이게 되므로^[19] 적절한 δl 값을 결정하기 위한 敏感度 調査(sensitivity test)가 수행되어 安定된 G 값을 갖는 δl 의 구간이 제시되었다. 本 研究에서는 龜裂길이 l 일 때 δl 는 $10^{-7}l$ 가 사용되었다.

한편, 龜裂面(crack surface)의 변화에 따른 에너지 放出率은 物體力(body force)를 무시하였을 때 통상 식(1)와 같이 정의된다. 즉,

$$\int_0^L G(s) \cdot \delta l(s) ds = -\frac{1}{2} \{u\}^T \cdot \Delta[K] \cdot \{u\} \quad (1)$$

여기서, $G(s)$ 는 Griffith 에너지 값이고, $\delta l(s)$ 는 假想龜裂 길이를 나타내는데 本 研究에서는 單位두께(unit thickness) 1을 갖는 龜裂平板을 고려하므로 龜裂面 s 의 영향은 무시한다. 그리고, $\{u\}$ 는 유한요소법으로 계산된 절점변위의 벡터를 표시하고 $\Delta[K]$ 는 假想龜裂에 따른 剛性度 행렬의 변화를 나타내며 식(2)과 같다.

$$\Delta[K] \approx [K]_{l+\delta l} - [K]_l \quad (2)$$

그러므로, $\delta l(s)$ 에 따른 變形에너지의 增減을 δU 라 할 때 에너지 放出率(energy release rate) $G(s)$ 는 식(3)과 같이 구할 수 있다.

$$G(s) = \frac{\delta U}{\delta l(s)} \quad (3)$$

한편, 引張 모우드(opening mode)와 剪斷 모우드(sliding mode)에 대한 에너지 방출률 G_I 와 G_{II} 는 응력확대계수 K_I 와 K_{II} 와 직접적인 관계를 갖는다. 즉,

$$K_I = \left[\frac{8\mu G_I}{1+\kappa} \right]^{1/2} \quad K_{II} = \left[\frac{8\mu G_{II}}{1+\kappa} \right]^{1/2} \quad (4)$$

여기서, μ 는 材料의 剪斷係數를 나타내며 ν 를 포아슨 비라 할 때 κ 는 아래 식과 같다.

$$k = \begin{cases} 3-4\nu & \text{평면변형} \\ \frac{3-\nu}{1+\nu} & \text{평면응력} \end{cases} \quad (5)$$

또한, 리켄트 모우드인 경우의 응력확대계수 K_I 은 幾何學的 形狀에 영향을 받게 되는데 식(6)과 같이 정의된다.

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a} \cdot F(a/b) \quad (6)$$

여기서, $F(a/b)$ 는 補正係數(correction factor) 또는 形狀係數(shape factor)라 하며 균열길이 a 와 平板의 幅 b 의 함수가 된다.

2.3 限界值(Limit Value)의 算定

本 研究에서는 p -擴張法을 사용하므로 이에 대한 解의 收斂性의 收斂區間(asymptotic range)은 Babuska^[11]가 제안한 아래 식이 유효하다.

$$|U(u_{ex}) - U(u_{fe})| \leq \frac{k}{N_p^{2\alpha}} \quad (7)$$

여기서, $U(u_{ex})$ 는 實際變形 에너지(exact strain energy), $U(u_{fe})$ 는 유한요소법에 의한 近似變形 에너지(approximate strain energy), 2α 는 應力特異 정도를 나타내며 通常 收斂率을 의미한다. 그리고, k 는 임의의 陽數, N_p 는 형상함수의 次數가 p 일 때의 自由度를 나타낸다. 한편, 유한요소의 解가 收斂區間內에 있을 정도의 充分한 自由度를 갖고 있다고 假定할 때 식(7)은 不等號 대신 等號로 대치할 수 있게 된다. 같은 概念으로 연속된 $p-2, p-1, p$ 일 때의 近似變形 에너지도 收斂區間內에 있다고 假定하면 收斂性에 대한 세 개의 方程式을 세울 수 있게 되므로 未知數 $2\alpha, k$ 를 제거하여 정리하면 식(8)을 유도할 수 있다. 이 식을 사용하여 에너지 放出率을 구하는데 필요한 變形에너지의 精確한 값을 예측할 수 있게 되며 이러한 방법에 의해 계산된 實際變形 에너지를 限界值(limit value)라 정의한다. 實際變形 에너지를 구하는 外插方程式(extrapolation equation)는 다음과 같다.

$$\frac{\text{LOG} \frac{U_{ex} - U_p}{U_{ex} - U_{p-1}}}{\text{LOG} \frac{U_{ex} - U_{p-1}}{U_{ex} - U_{p-2}}} = \frac{\text{LOG} \frac{N_{p-1}}{N_p}}{\text{LOG} \frac{N_{p-2}}{N_{p-1}}} \quad (8)$$

여기서, U_{p-2}, U_{p-1}, U_p 와 N_{p-2}, N_{p-1}, N_p 는 形상함수가 $p-2, p-1, p$ 일 때의 유한요소법에 의해 계산된 變形에너지와 自由度 數를 각각 나타낸다.

3. 數值解析 例

앞에서 제안된 p -version 龜裂모델의 성능을 보이기 위해 리켄트력을 받는 龜裂板 해석을 하였는데 균열의 위치에 따라 中央龜裂板, 兩邊龜裂板 및 一邊龜裂板으로 나누어 수행하였다. 이에 대한 形狀과 p -version 유한요소 모델이 그림 1에 나타나 있다. 사용된 p -version 모델은 p 의 次數가 8次이며 要素數는 4개로 四邊形 階層要素가 사용되었으며 평판의 두께는 단위두께 1.0이 사용되어 平面應力 상태로 가정하여 해석되었고 h/b 는 2로 가정하였다.

그리고, 假想龜裂 길이 Δa 는 龜裂 길이를 a 라 할 때 그림 2에서 보는 바와 같이 假想龜裂 길이의 변화에 따른 變形에너지 放出率의 敏感度를 조사하면 중앙균열판의 경우 Δa 가 $10^{-4}a$ 에서 $10^{-9}a$ 까지는 變形에너지 放出率이 안정한 구간으로 판단할 수 있다. 一邊龜裂 및 兩邊龜裂의 경우도 이와 같은 敏感度 調査을 실시한 결과 Δa 를 $10^{-7}a$ 를 사용하였다.

표 1 中央龜裂板의 補正係數 F의 比較

P-level	N.D.F	$GE/\sigma^2 a$	補正係數 F
4	84	3.20031	1.00930
5	121	3.33790	1.03077
6	166	3.41298	1.04230
7	219	3.46186	1.04973
8	280	3.49500	1.05475
∞	∞	3.61517	1.07273
Irwin	-	3.46410	1.05008
Brown	-	3.57766	1.06715
Feddersen	-	3.62762	1.07457
Dixon	-	3.53429	1.06066
Crack Handbook	-	-	1.075

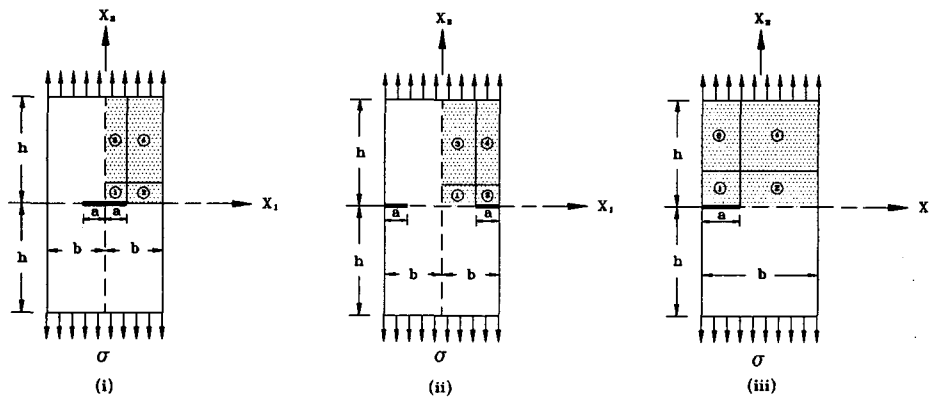


그림 1 龜裂板의 形狀과 p-version 有限要素 모델
(i)中央龜裂板 (ii)兩邊龜裂板 (iii)一邊龜裂板

한편, 식(8)을 사용하여 自由度가 無限大일 때의 限界值인 中央龜裂板의 正規化된 에너지 방출률과 응력확대계수를 정의하는데 필요한 補正係數(correction factor) F는 p의 次數가 수렴구간에 있는 5, 6, 7次를 사용하여 구하였으며 표 1과 같다. 즉, p=8일 때의 補正係數 F가 1.05475인데 비하여 外插法에 의한 限界值은 1.07273으로 Tada의 Crack Handbook의 實驗式으로부터 제시된 1.075에 더욱 근사함을 보여 준다.

또한, 補正係數 F는 앞에서 설명한 바와 같이 幾何學的 形狀 즉, h/b 와 a/b 의 함수가 되는데 Rooke 등^[17]의 결과와 그림 3에 비교되었는데 p=8次인 4個 要素로 모델링된 p-version 결과와 잘 일치됨을 알 수 있다. 그림 4에서는 초기체눈을 p=1次인 2x2 체눈망으로 시작하여 h-收斂 유한요소법은 均等要素分割을 통해 正解에 수렴시키고 p-收斂 유한요소법은

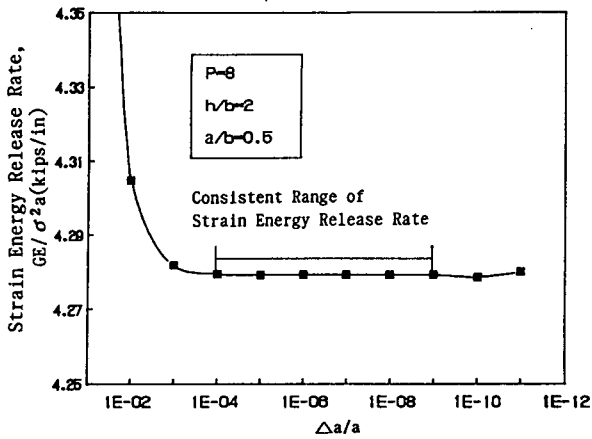


그림 2 中央龜裂板의 Δa 에 대한 G 의 敏度

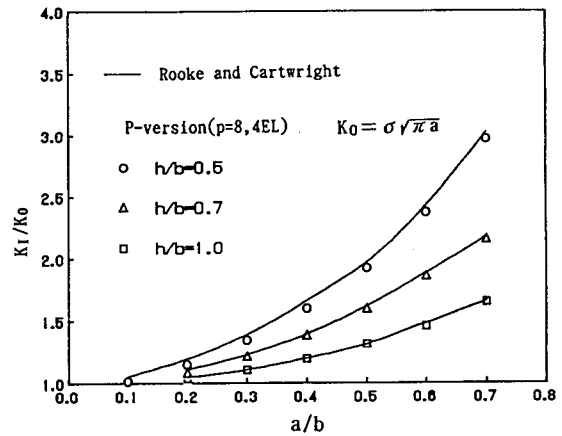


그림 3 中央龜裂板의 龜裂進展길이에 대한 補正係數

p=1에서 점차적으로 증가시키면서 正解에 수렴되고 있다. 收斂率을 비교하기 위해 自由度와 에너지 正規值(norm)를 로그(log) 좌표계에 그려보면 相對誤差 1%에 접근하기 위해서 h-收斂 방식은 自由度 數가 14960이 필요한 반면 p-收斂 방식은 불과 377의 自由度 數를 필요로 한다. 아울러 수렴률은 그래프의 기울기로 비교할 수 있는데 거의 2배 가량 p-收斂 방식이 큼을 알 수 있다.

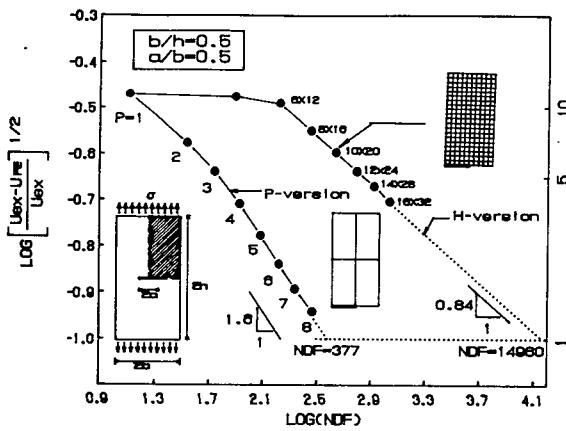


그림 4 h-version과 p-version의 收斂率

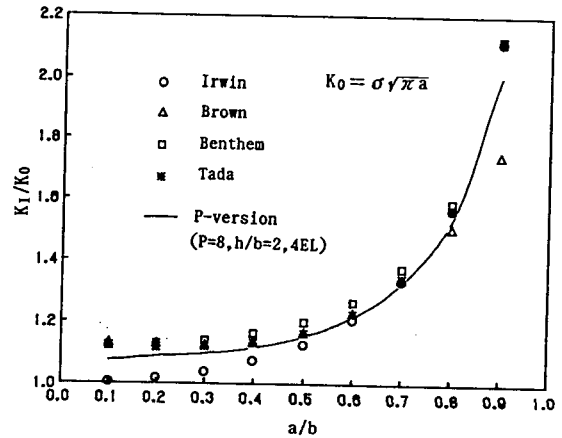


그림 5 兩邊龜裂板의 龜裂進展길이에 대한 補正係數

둘째 例題로 兩邊龜裂板 문제가 해석되었는데 그림 5에서는 균열진전 길이에 따른 補正係數값이 여러 연구자들의 결과와 비교되었는데 중앙균열판의 경우와 같이 p-收斂 방식은 높은 精度를 보여주고 있다. 마지막의 예제는 一邊龜裂板으로 표 2에는 龜裂先端의 응력특이성을 해석하기 위해 여러 연구자들에 의해 제안된 有限要素들이 나타나 있다. 이 문제는 平面應力 상태와 平面變形 상태로 나누어 各各 비교하여 보았다. 먼저, 平面應力 상태로 해

석한 p-收斂 모델의 결과는 Rooke등^[17]의 값과 그림 6에 비교되어 높은 精度의 보정계수를 보여주고 있다. 한편, 平面變形 상태로 해석한 p-收斂 모델은 補強混合要素(enriched mixed element)를 사용하여 110개로 요소분할한 Benzley^[7]의 값등과 비교되어 그림 7과 같이 좋은 일치를 보여주고 있다.

표 2 龜裂板 解析을 위한 有限要素

Investigator	Method of determining Stress Intensity Factor	Element Formulation	Element Shape at Crack tip
Watwood	Energy Release	Displacement	Quadrilateral
Anderson	Energy Release	Displacement	Quadrilateral
Tracy	Singular Function	Displacement	Triangle
Walsh	Singular Function	Hybrid	Rectangle
Byskov	Singular Function	Displacement	Triangle
Fix	Singular Function	Displacement	Square
Pian	Singular Function	Hybrid	Quadrilateral
Benzley	Singular Function	Displacement	Quadrilateral
P-version	Virtual Crack Extension	Displacement	Quadrilateral (Subparametric)

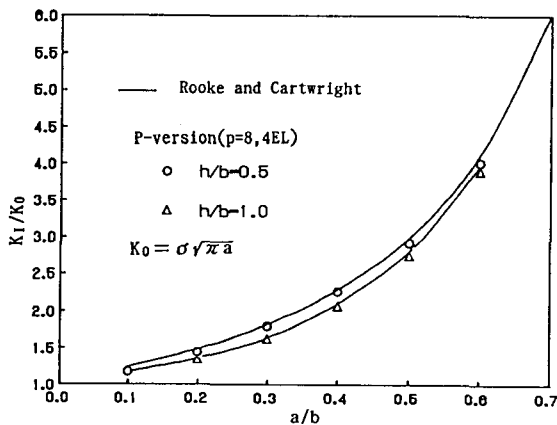


그림 6 平面應力상태에서 一邊龜裂板의 補正係數

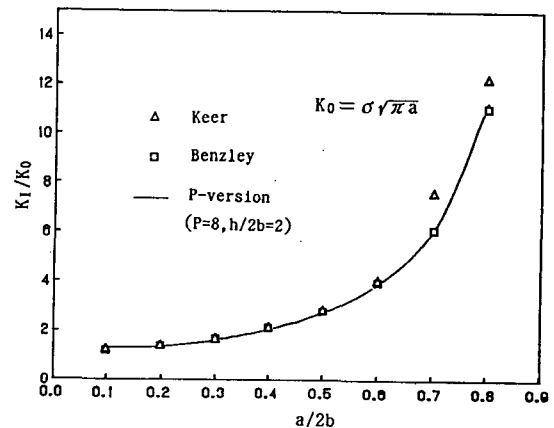


그림 7 平面變形상태에서 一邊龜裂板의 補正係數

4. 結論

本 研究에서 제안된 p-version 龜裂모델은 特異函數나 混合變分原理등을 사용한다든가 중간절점을 4분점 위치에 이동시키는등의 특별한 개념을 사용하지 않으면서도 높은 正確度와 빠른 收斂率을 보여주며 또한, 불과 4개의 요소를 사용하여 龜裂板 해석을 효율적으로 할 수 있는 모델의 단순성을 큰 長點으로 꼽을 수 있다. 본 연구를 통해 얻어진 중요한 결

론은 다음 두 가지로 요약해 볼 수 있다. 첫째는, 그림 4에서 보는 바와 같이 收斂率은 등 매개변수 요소를 사용하여 均等要素分割을 통한 h-version 모델에 비해 p-version 모델이 2배 가량 빠름을 알 수 있었는데 이는 Mehta^[10]의 결과를 뒷받침해 준다. 둘째는, 收斂區間에 있는 3개의 연속적인 p-version 해석결과를 갖고 限界值를 추정할 수 있다는 사실이다.

5. 參考文獻

- (1) R. H. Gallagher, "Survey and Evaluation of the Finite Element Method in Linear Fracture Mechanics Analysis," *Proceedings of First International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology*, Berlin, Vol.6, pp.637-648 (1972)
- (2) E. Byskov, "The Calculation of Stress Intensity Factors Using the Finite Element Method with Cracked Elements," *Int. J. Frac. Mech.*, Vol.6, No.2, pp.159-167 (1970)
- (3) R. H. Hardy, "A High-order Finite Element for Two-dimensional Crack Problems," *Ph.D. Dissertation*, Georgia Institute of Technology (1974)
- (4) R. S. Barsoum, "A Degenerate Solid Element for Linear Fracture Analysis of Plate Bending and General Shells," *Int. J. Num. Mech. Eng.*, Vol.10, pp.551-564 (1976)
- (5) P. Tong and T. H. H. Pian, "On the Convergence of the Finite Element Method for Problems with Singularity", *Int. J. Solids Struct.*, Vol.9, pp.313-321 (1973)
- (6) C. H. Kang and G. DE Saxce, "Computation of stress intensity factors for plate bending problem in fracture mechanics by hybrid mongrel finite element," *Computers & Structures*, Vol.42, pp.581-589 (1992)
- (7) S. E. Benzely, "Representation of singularities with isoparametric finite elements," *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 10, pp.1281-1287 (1974)
- (8) P. R. Heyliger and R. D. Kriz, "Stress intensity factors by enriched mixed finite elements," *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol.28, pp.1461-1473 (1989)
- (9) P. K. Basu, M. P. Rossow and B. A. Szabo, "Technical Documentation and User's Manual: COMET-X," *Report No. R-340*, Federal Railroad Administration (1977)
- (10) A. K. Mehta, "P-convergent Finite Element Approximations in Linear Elastic Fracture Mechanics," *Doctoral Dissertation*, Washington University, St. Louis, Missouri (1978)
- (11) I. Babuska and B. A. Szabo, "On the Rates of Convergence of the Finite Element Method," *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol.18, pp.323-341 (1982)
- (12) 우 광성, "균열 쉘의 파괴역학해석을 위한 선진 유한요소기법," *전산구조공학*, 제3권, 제3호, 101-111 (1991)
- (13) 우 광성, 장 용채, 정 우성 "계층적 확대칭요소에 의한 P-version 모델," *대한토목학회*, 제12권, 제4-1호, 67-76 (1992)
- (14) D.M. Parks, "A stiffness derivative finite element technique for determination of elastic crack tip stress intensity factors," *Int. J. Fracture*, Vol.10, No.4, pp.487-502 (1974)
- (15) T.K. Hellen, "On the method of virtual crack extensions," *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol.9, No.1, pp.187-208 (1975)
- (16) 우 광성, 이 채규, "P-version 유한요소법에 의한 피로균열해석," *전산구조공학*, 제 5권, 제 3호, 97-103 (1992)
- (17) D. P. Rooke and D. J. Cartwright, *Compendium of Stress Intensity Factors*, Her Majesty's Stationery Office (1976)