

전단과대현상에 대한 해석적 고찰 An Analytical Study of Shear Locking

이 상 진 * Ma, Haitao **

ABSTRACT

An Analytical study of shear locking is introduced for linear thick beam element. The appropriate sampling point which eliminate shear locking phenomenon was Proposed through this study. Reduced integration point is exactly same as the sampling point obtained from this study. Numerical example indicates how shear locking is serious. some solutions for shear locking are presented.

1. 서론

여러분야에서 대단히 많은 수의 유한요소가 개발되어져 오고 있다. 그들중의 일부는 조용히 시간속으로 사라졌지만, 그들중의 대부분은 여전히 그분야를 연구하는 사람들속에서 제각기 빛을 발하고 있다.

유한요소법이 시작된 즈음에는 보와판(Beam and Plate)에 대한 유한요소가 Kirchhoff-Love 가정에 기초를 두고 개발되어 졌다. 그러나 시간이 경과함에 따라 전단변형(Shear deformation)이 많은 구조물에서 중요한 역할을 차지하고 있음을 깨닫게 되었다. 이러한 인식을 기점으로 Mindlin-Reissner가정을 기초로 한 새로운 유한요소가 개발되어지기 시작했다. 이렇게 만들어진 요소는 Mindlin형 요소(Midlin-Type element)라고 불리게 되었다. Mindlin형 요소는 그것을 개발한 연구자들의 의도대로 전단의 영향이 크게 나타나는 두꺼운 구조물에 대해서는 만족할만한 결과를 가져다주었다. 그러나 두께가 얇은 구조물에서는 기대하지 않은 왜곡된 결과를 낳았다.

다양한 작업이 나쁜결과의 원인을 찾고 그 결과를 향상시키기위해서 행해졌다. 마침내 전단과대현상을 피하기 위한 방법중의 하나로 수치적분시 적분점(Gauss Integration Point)을 줄이는 감점적분(Reduced Integration)이 제시되었다. 그러나 감점적분또한 해석시 요소의 심한 비정형(Hourglass Mode)을 일으키는 결점이 있다는 사실이 밝혀지게 된다.

이 단계에서 유한요소 개발연구자들은 새로운 그리고 너무 쉽게 외면해온 전단변형도의 수정을 고려하게 된다. 가정된 변형도를 사용하는 방식(Assumed Strain Method; 이하 가변형도 채용방식)이라고 불리는 이 방법은 여러 논문에서 이미 좋은 결과를 보여주고 있다. 이 가변형도 채용방식의 핵심부분은 전단변형도가 과대하게 나타나지 않는 요소내의 표본점(Sampling point)을 찾는 것이라 할수 있다.

* Formerly Graduate Student, Asian Institute of Technology

** Structural Engineer, Ph.D., c/o Jim Lin, Australia

따라서 본 고에서는 선형 보요소에 대한 전단과대현상의 원인과 전단변형도의 보간에 사용될 기준점인 표본점의 정당성(validity)을 설명하고자 한다.

본 고에 제시된 수식의 전개를 확인하기 위해서 외팔보 수치예제를 실행하였다. 감점적분, 거품 모드(Bubble mode)의 첨가와 가변형도채용방식에 따른 결과를 비교하였다.

2. 전단과대현상의 해석적 고찰

전단 과대현상을 변형에너지로 해석하기 위하여 아래와 같은 직선보틀 이용하였다.

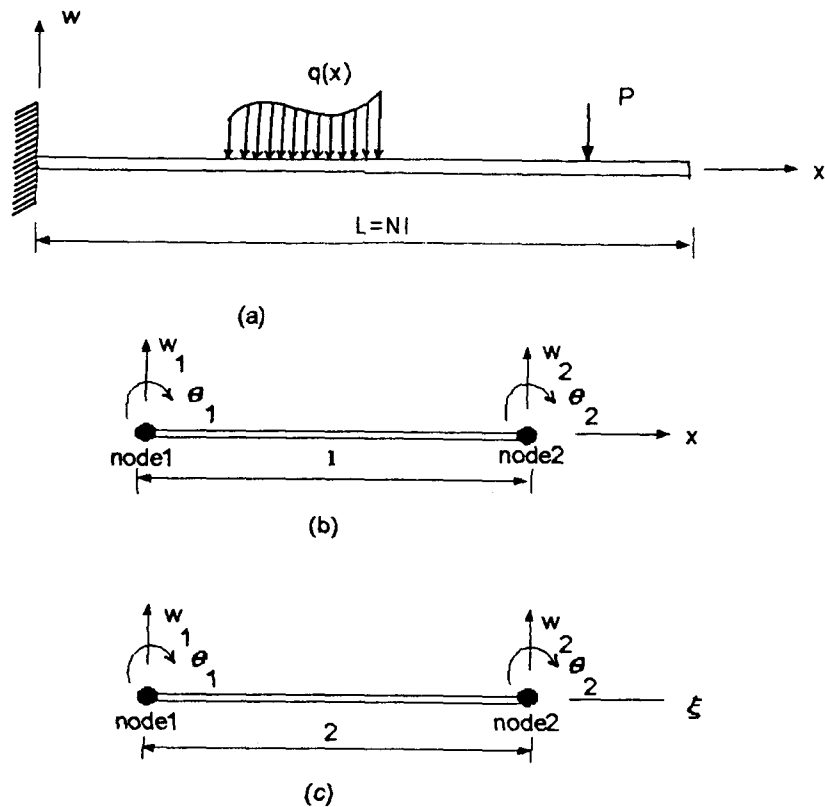


그림2-1) 직선보 문제와 보 요소

- a) 직선보 문제
- b) 적용된 선형보 요소(Discretized element)
- c) 선형보 요소(Prental element)

사각형 단면을 가진 보의 변형에너지²⁾는 다음과 같이 나타낼 수가 있다.

$$U = \frac{1}{2} \frac{Et^3}{12} \left[\int_L \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 dx + k_s \frac{12G}{Et^2} \int_L \left(\frac{dw}{dx} - \theta \right)^2 dx \right] \quad (2.1a)$$

여기서, w 는 중심선에서의 처짐, θ 는 단면의 회전변위, E 는 재료상수, K_s 는 전단 보정상수, L 는 보의 길이이다.

그림(2-1)의 보를 똑 같은 길이를 가진 N 개의 요소로 나누고, 각 요소에 대한 변위장 (Displacement field)를 다음과 같이 가정하자.

$$w = a_0 + a_1 \xi \quad (2.2a)$$

$$\theta = b_0 + b_1 \xi \quad (2.2b)$$

여기서, 계수 a_i 와 b_i ($i=0,1$)는 절점변위(Nodal displacement:그림 2-1b)로 나타낼수 있으며 요소내의 굽힘과 전단 변형도는 다음과 같이 나타낼수 있다.

$$\kappa = \theta_{,x} = 2b_1/L \quad (2.3a)$$

$$\gamma = \theta - w_{,x} = (b_0 - 2a_1/L) + b_1\xi \quad (2.3b)$$

식(2.1)로부터, 하나의 요소(그림2-1b)에 대한 변형에너지는 다음과 같이 쓸수 있다.

$$u = u_b + u_s \quad (2.4)$$

여기서, u_b 와 u_s 는 변형에너지중 각각 굽힘과 전단(Transverse shear)부분을 나타내며 아래와 같다.

$$\begin{aligned} u_b &= 1/2 \int_L EI \kappa^2 dx \\ &= 1/2 \int_{-L/2}^{L/2} EI (2b_1/L)^2 (L/2) d\xi \\ &= 2EI/L (b_1)^2 \end{aligned} \quad (2.5)$$

그리고,

$$u_s = 1/2 \int_L k_s GA \gamma^2 dx \quad (2.6a)$$

$$= 1/2 \int_{-L/2}^{L/2} k_s GA (b_0 - 2a_1/L + b_1\xi)^2 (L/2) d\xi \quad (2.6b)$$

$$= (k_s GA L)/2 [(b_0 - 2a_1/L)^2 + (b_1)^2/3] \quad (2.6c)$$

두께가 얇은 보에서는 변형에너지의 전단 부분이 굽힘부분의 에너지에 비해 무시해도 좋을 만큼 작아지기 때문에 다음과 같은 식이 성립하게 된다.

$$\frac{u_s}{u_b} = \frac{L^2 k_s GA}{4EI} \frac{(b_0 - 2a_1/L)^2 + (b_1)^2/3}{(b_1)^2} \ll 1 \quad (2.7)$$

위 식은 아래 두식과 같이 나타낼수 있다.

$$\frac{\mathcal{L}^2 k_s GA}{4EI(b_1)^2} (b_0 - 2a_1/\mathcal{L})^2 \ll 1 \quad (2.8)$$

그리고,

$$\frac{\mathcal{L}^2 k_s GA}{12EI} = \frac{k_s GA \mathcal{L}^2}{12EI} \frac{1}{N^2} \ll 1 \quad (2.9)$$

식(2.8)은 아래 구속(constraint)을 적용하면 쉽게 만족될수 있다.

$$b_0 - 2a_1/\mathcal{L} = 0 \quad (2.10)$$

반면, 식(2.9)는 보를 많은 수의요소로 분할할 경우에만 만족될 것이다. 즉 아래와 같다.

$$N \gg \sqrt{\frac{k_s GA}{12EI}} \mathcal{L} \quad (2.11)$$

윗식은 보가 없어지면 없어질수록, 식(2.9)가 한정된 수의 요소로는 만족되어 질수 없음을 나타내며, 다시 말해서 명백히 전단과대 현상이 일어날수 있음을 보여주고 있다.

이 단계에서 식(2.3b)의 전단 변형도를 다시 살펴보면, 식(2.2a)의 처짐 가정식이 2차식을 가지고 있지 않아서 처리가 곤란한 항 ($b_1\xi$)이 생겼음을 알수 있다. 또한 바로 이 항으로부터 식(2.6c)의 두번째항인 문제의 변형에너지가 초래되었다. 회전변위가 선형으로 가정되었을때 이차식의 처짐이 필요하다는 위 사실로부터, 바람직한 변위 꼴은 반드시 이차식으로 가정되어야만 할 것이다. 그러므로, 전단 변형도에 나타난 처리하기 어려운 항을 없애기위하여 아래와 같은 거품모드(Bubble mode)를 도입할수 있다.

$$N_\lambda = 1 - \xi^2 \quad (2.12)$$

식(2.12)의 거품모드 도입으로 식(2.2a)의 처짐가정식은 다음과 같이 나타낼수 있다.

$$w_\lambda = a_0 + a_1 \xi + \lambda (1 - \xi^2) \quad (2.13)$$

여기서, λ 는 무절점변위 변수이다. 위 식의 도입으로 식(2.3b)는 다음과 같이 쓸수 있다.

$$\gamma_\lambda = (b_0 - 2a_1/\mathcal{L}) + (b_1 + 4\lambda/\mathcal{L})\xi \quad (2.14)$$

이제 식(2.10)과 식(2.11) 대신에 아래 두 구속조건이 적용될수 있음을 알수 있다.

$$b_0 - 2a_1/\mathcal{L} = 0 \quad (2.15)$$

$$b_1 + 4\lambda/\mathcal{L} = 0 \quad (2.16)$$

결과적으로, 전단과대 현상은 피할수 있게 될 것이다.

또한 아래 식에 나타난 바와 같이 식(2.3a)의 전단변형도를 요소의 중앙($\xi=0$)에서 구해

$$\gamma_x = (b_0 - 2a_1/\ell) = \gamma \quad (\text{if } \xi=0) \quad (2.17)$$

진 값으로 채택한다면, 거품모드를 사용하지 않아도 문제를 일으키지 않는 전단변형도를 유도할수 있다. 한단계 더 나아가, 요소의 중앙에서 구해진 값을 기준으로 요소 전 영역에 보간(Interpolation)한 전단변형도를 사용한다면, 정상 적분(Full Integration)을 하여도 요소는 전단과대 현상으로 부터 자유로와 질것이다.

간추리면, 다음 두가지의 흥미로운 사실을 발견할수 있다. 그 첫번째는 다음과 같다.

$$[\partial N_x / \partial \xi] = 0 \quad (\text{at } \xi=0) \quad (2.18)$$

윗식은 요소의 중앙에서는 거품모드가 전단변형도에 아무런 영향을 끼치지 못한다는 사실이다. 두번째는 두개의 절점을 가진 등 보요소(Two-node uniform beam element)에 대해서, 감점적분을 사용하거나 가변형도채용방식을 사용하여 얻은 전단 강성행렬이 거품모드를 사용해서 얻은 전단 강성행렬과 같아 지게 된다는 것이다.

3. 수치해석

3.1 수치해석 예제

앞장에 서술된 바를 좀더 자세히 살펴 보기위해 끝단하중(Tip load)을 받는 외팔보²⁾를

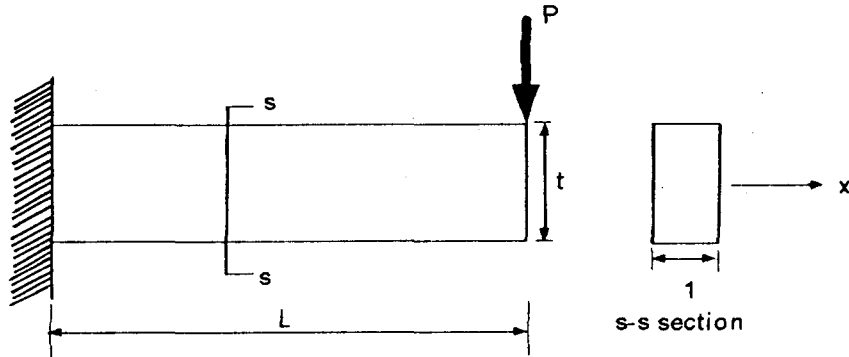


그림3-1) 끝단하중을 받는 외팔보

$$E=1000, G=375, t=1, L=4$$

수치예제로 사용하였다. 다섯가지종류의 요소분할로 수치해석을 실행하였으며, 얇은보의 효과를 내기위하여 값이 큰 전단강성(Shear rigidity) $G=375 \times 10^5$ 를 사용²⁾하였다. 큰 값으로 주어진 전단강성이 전단의 효과가 배제되는 가상의 얇은보의 상황을 만들어 줄것이다. 이렇게 설정된 두꺼운보와 얇은 보에 정상적분(Full integration)과 감점적분을 실시하였고, 그 결과

는 표3-1에 나타내었다. 거품 모드와 가변형도 채용방식을 사용한 요소에는 감점적분을 실시하지않고, 정상적분만을 사용하여 그 결과를 비교(표3-1)하였다.

3.2 수치해석 결과

표3-1)Normalized error percentage(%)

Number of element	Thick beam				Thin beam			
	F. I.			R. I.	F. I.			R. I.
	Normal	B. M.	A.S.M.	Normal	Normal	B. M.	A.S.M.	Normal
1	77.63	23.72	23.72	23.72	99.99	25.00	25.00	25.00
2	55.49	5.85	5.85	5.85	99.99	6.25	6.25	6.25
4	23.72	1.38	1.38	1.38	99.99	1.56	1.56	1.56
8	7.15	0.26	0.26	0.26	99.99	0.39	0.39	0.39
16	1.79	0.00	0.00	0.00	99.95	0.08	0.08	0.08

(F.I.:Full Integration, R.I.:Reduced Integration, B.M.:Bubble Mode, A.S.M.:Assumed Strain Method)

3.3 수치해석 결과의 분석

앞장에서 이미 예측했듯이, 감점적분시의 해석결과와 거품모드 첨가시의 결과가 정확히 일치함을 표3-1)로 부터 알수 있다. 이 사실은 식(2.14)의 거품모드를 첨가한 전단변형도가 전단과대현상을 없애줌을 보여 주는 것이다. 가변형도 채용방식을 사용한 요소 또한 요소중앙점($\xi=0$)에서 구한 전단변형도값을 새로운 전단변형도 설정시 사용하였기 때문에 정확히 감점적분시와 거품모드첨가시 나타난 결과와 일치함을 볼수 있다. 얇은 보의 경우 정상적분을 사용하면 표3-1)에서 볼수 있듯이 전단과대현상에 의한 심하게 왜곡된 결과를 얻었고, 요소수를 늘일수록 아주조금씩 수렴(convergence)함을 알수 있었다. 식(2.11)에서 논의 했듯이 요소수를 무한정 늘릴 경우에 결과의 향상을 가져올수 있으리라 추측할수 있다. 하지만 수 많은 요소를 적용할경우 요소의 경계성이 없어지게되며, 좋은 요소라고 할수가 없겠다. 좀더 가시적으로 이 결과를 논의하기위해, 위 수치예제의 외팔보에 하나의 요소가 적용되었을 경우를 생각해보자. 이 경우의 강성행렬성분(Components of Stiffness matrix)은 표3-2)과 같을 것이다. 강성행렬에 대응하는 변위벡터의 성분은 그림2-1b)의 부호를 기준으로 $w^1, \theta^1, w^2, \theta^2$ 순이다

식(2.6b)에서 전단변형에너지의 ξ^2 항이 전단과대현상을 일으킬것으로 예측한 바와 같이 표3-3)으로부터 수치적분시 $I(\xi^2)$ 만이 감점적분(또는 선택적 감점적분시와 정상적분시에 상이한 값을 가짐을 알수 있다. 다시말해서 감점적분시 $I(\xi^2)$ 은 영(zero)값을 가지나 정상적분시에는 $I(\xi^2)$ 는 실제상황과 틀린 값을 발생시키게 된다. 이 단계에서 식(2.12)에서 논의된 거품모드를 첨가해보면, 아래와 같은 방식으로 $I(\xi^2)$ 가 제거 되어질수 있다.

$$K_{ij} = K_{ij} - \frac{B_i B_j}{B_s} \quad (i=1,4, j=1,4) \quad (3.1)$$

이렇게 해서 정상적분시에도 표3-1에서 보는 바와같은 항상된 결과를 얻을수 있다. 또한 A1-1의 수치로부터 식(2.18)에서 논의 되었던 바와 같이 요소중양에서는 거품모드가 전단변형도에 아무런 영향도 끼칠수 없음을 알수 있다. 가변형도채용방식 또한 요소중양점에서 구한 전단 변형도값을 요소 전 영역에 보간하므로 같은 결과를 얻었다.

표3-2)The components of stiffness matrix

	Expression		
	Shear terms	Sprious terms	Bending term
K ₁₁	I (L ⁻²)	none	0.0
K ₁₂	0.5 I (L ⁻¹)+0.5 I (L ⁻¹ ξ)	none	0.0
K ₁₃	- I (L ⁻²)	none	0.0
K ₁₄	0.5 I (L ⁻¹)+0.5 I (L ⁻¹ ξ)	none	0.0
K ₂₂	0.25 I (1)-0.5 I (ξ)+0.25 I (ξ ²)	0.25 I (ξ ²)	I ₁ (L ⁻²)
K ₂₃	-0.5 I (L ⁻¹)-0.5 I (L ⁻¹ ξ)	none	0.0
K ₂₄	0.25 I (1)-0.25 I (ξ ²)	-0.25 I (ξ ²)	- I ₁ (L ⁻²)
K ₃₃	I (L ⁻²)	none	0.0
K ₃₄	-0.5 I (L ⁻¹)-0.5 I (L ⁻¹ ξ)	none	0.0
K ₄₄	0.25 I (1)+0.5 I (ξ)+0.25 I (ξ ²)	0.25 I (ξ ²)	I ₁ (L ⁻²)

여기서, K_{ij}대칭행렬이고, $I(f(\xi)) = \int_0^1 k_s GA f(\xi) \det J d\xi$
 $I_1(f(\xi)) = \int_0^1 EI f(\xi) \det J d\xi$ 이다.

4. 결론

본 연구는 변형에너지를 이용한 수식전개와 수치예제로서 선형보의 전단과대현상에 대해 다음과 같은 결론을 얻었다.

1) 전단 과대현상을 발생시키는 요인은 식 w_x 와 식 θ 가 등가(Equality)를 이루지 못해 발생하는 ξ 항이었다.

2) 감점적분시 생기는 결과의 항상은 $\xi=0$ 에서 변형에너지의 ξ^2 항이 자동적으로 없어지기 때문이었다.

3)가변형도채용방식과 감점적분이 같은 결과를 가지는 것은 감점적분시 사용된 적분점 (Integration point)과 새로운 변형도의 표본점($\xi=0$)이 일치하기 때문이다.

4)거품모드첨가시와 감점적분시에 동일한 결과를 가지는 것은 A1-1)에서와 같이 거품모드가 ξ^2 항을 선택적으로 제거하기 때문이다.

5)따라서 선형보요소에 있어서는 감점적분시와 거품모드 첨가 그리고, 가변형도채용방식에 의한요소가 동일한 결과를 가진다.

감사의 말

다시 시작할수있게 일으켜주신 부모님과 가족들 그리고 우리들병원 관계자 여러분께 감사드립니다.

참고 문헌

- [1] Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. and Too, J.M. (1971) Reduced Integration Technique in General Analysis of plates and Shells, Int. J. Numer. Meth. 3, 275-290
- [2] Huges, T.J.R., Taylor, R.L. and Kanok-Nukulchai, W. (1977) A simple and efficient finite element for plate bending, Int. J. Numer. Meth. 11, 1529-1543
- [3] Dvorkin, E.N. and Bath, K.J. (1984) A continuum mechanics based on four-node shell element for general nonlinear analysis, Eng. Comp. 1, 77-88
- [4] Huang, H.C. (1987) Implementation of assumed strain degenerated shell elements, Comp. & Struc. 25, 147-155
- [5] Huges, T.J.R. (1987) The finite element method, Prentice-Hall

부 록

A1-1) The components of Bubble function

	Expression		
	Bubble terms	R. I.	F. I.
B ₁	0.25 I (L ⁻² ξ)	0.0	0.0
B ₂	2.0 I (L ⁻¹ ξ) - 2.0 I (L ⁻¹ ξ ²)	0.0	208.325
B ₃	-0.25 I (L ⁻² ξ)	0.0	0.0
B ₄	-2.0 I (L ⁻¹ ξ) - 2.0 I (L ⁻¹ ξ ²)	0.0	-208.325
B ₅	16. I (L ⁻² ξ ²)	0.0	416.65

여기서, $I(f(\xi)) = \int_{-1}^1 k_0 GA f(\xi) \det J d\xi$