

적용적 체눈 세분화를 위한 3차원 입체 변이요소
3-D Transition Solid Elements For Adaptive Mesh Gradation

최 창근* 이 남호**
Choi, Chang-Koon Lee, Nam-Ho

ABSTRACT

A new three-dimensional transition solid elements was presented for the automated three-dimensional adaptive h-refinement where the steep stress gradient exists. To be consistent with 8-node solid element with nonconforming modes in accuracy, these transition elements were improved through the addition of the associated nonconforming modes. Numerical examples show that the performance of the element and the applicability to 3D adaptations are satisfactory.

1. 서 론

대부분의 범용구조해석 전산프로그램에 8절점 육면체요소는 기본적으로 내장되어 있고 또한 단순성과 정확성때문에 3차원 구조물의 해석시 비직합변위형을 고려한 8절점 입체요소가 실무에서는 빈번히 사용되고 있다. 예들들어 원자로격납건물의 내부차폐벽같은 massive한 구조물의 경우 대부분 이 요소를 사용하여 해석을 수행하고 있다. 그러나 다양한 하중조건을 고려하는 복잡한 3차원 구조물을 모델링하여 해석을 수행한후 국부적으로 체눈을 세분화, 예들들어 국부적인 하중의 추가로 인한 하중 작용점 주위의 체눈을 세분화할 필요가 발생할 경우, 전체모델링을 국부적으로 요구되는 체눈에 맞추어 새로운 체눈을 구성하여야한다. 이러한 경우 전체적인 체눈갯수의 증가로 인한 자유도의 증가로 해석이 불가능한 경우가 발생되거나 혹은 이러한 문제점을 해결하기위하여 찌그러진 요소를 사용함으로써 부정확한 해석결과가 산출될 위험성도 내포하게 된다. 따라서 기존의 체눈을 변경하지않고 필요한 영역만 체눈을 세분화하여 변경하고 변이요소를 이용하여 기존의 체눈에 연결시켜 줌으로써 상기에 서술한 문제점을 해결하고 또한 해석 및 설계상에 발생하는 번거로운 일도 줄일 수 있다.

한편 상기의 국부적인 체눈세분화와 관련하여 최근 유한요소해석 분야에서 활발히 연구되고 있는 2차원 탄성체문제에 대한 적용적 체눈 세분화 기법을 3차원 문제에 적용하려는 연구들이 시도되고 있다. 현재 3차원 입체요소를 사용한 적용적 체눈 세분화 연구에서는 변위제한조건을 가하여 체눈 세분화로 인해 발생하는 불규칙한 절점을 처리하고 있다[Devloo(1991)]. 그러나 세분화 과정에서 너무많은 변위 제한 조건식을 부여하면 체눈의 갯수는 증가하나 상대적으로 자유도수는 증가하지 않으므로 구조물의 변위를 locking시킬 위험성을 내포하게된다. 이에 반하여 입체요소의 모서리 혹은 면 중간에 불규칙절점이 존재하는 변절점을 갖는 변이요소로 대처하면 불규칙절점의

* 한국과학기술원 토목공학과 교수

** 한국과학기술원 토목공학과 박사과정

처리를 일괄적으로 할 수 있으므로 앞에서 언급한 문제들이 해결된다.

그런데 기존의 전산프로그램에서 사용하고 있는 3차원 입체 변위요소들은 모서리중간, 면중간, 혹은 입체중간에 불규칙절점을 추가할 수 있으나 만약 한 면의 중간에 절점을 추가해야 할 경우 모든 모서리 중간 및 입체중간에 절점들이 존재한 상태에서만 추가될 수 있다. 그러므로 3차원 입체의 체분세분화에 이 변위요소들을 직접 이용할 경우, 면에 인접한 요소중 단 하나만 세분화되어도 인접요소가 세분화되지않은 모서리 부분까지 불필요한 불규칙 절점을 추가해야하는 불합리한 점이 발생하게 된다

이를위해 본 연구에서는 8개의 꼭지점을 제외한 나머지위치에 임의로 절점을 추가할 수 있도록 기존의 3차원 입체 변위요소를 수정/확장하고, 기존의 8절점 입체요소와 제안된 임의의 변위요소를 혼합한 3차원 체분에 해석을 수행하여 그 타당성과 효율성을 검증하고자 한다. 또한 기존의 8절점 입체요소를 사용한 수치해석 결과가 상대적으로 많은 갯수의 체분으로 세분화하지 않으면 결과가 부정확하다는 사실을 경험적으로 알고 있기 때문에 일반적으로 8절점 입체요소를 사용할 경우 비적합 모드를 추가하여 사용하고 있다. 그러므로 8절점 입체요소와 혼합하여 3차원 적응적 세분화를 수행할 경우 일관적인 정확도를 유지하기 위해 변위요소에도 상응하는 비적합모드를 고려하여 개선하고 다양한 형태의 변위요소들에 대한 수치해석을 통하여 그 타당성을 검증하였다.

2. 3차원 입체 변위요소

3차원 문제의 해석시 기존의 구조해석 전산프로그램에서 제공하고있는 입체 변위요소들은 8절점에서 20절점 혹은 22절점에서 27절점(그림 1)까지 제한적으로 추가할 수 있는 육면체요소이다. 전자의 경우에는 적응적 체분 세분화과정에서 발생하는 불규칙절점을 처리하지 못하며, 후자의 경우에는 불규칙절점은 처리할 수 있으나 이웃 요소들중 하나만 세분화되어도 21절점까지 모든 절점들이 존재해야 하므로 불필요한 자유도를 발생시킨다.

따라서 본 연구에서는 기존의 육면체 변위요소를 수정/확장하여 8절점에서 27절점까지 임의로 추가할 수 있는 변위요소(그림 2)를 완성하여 체분 세분화에 따른 이질 체분층의 연결을 자유롭게 하였다.

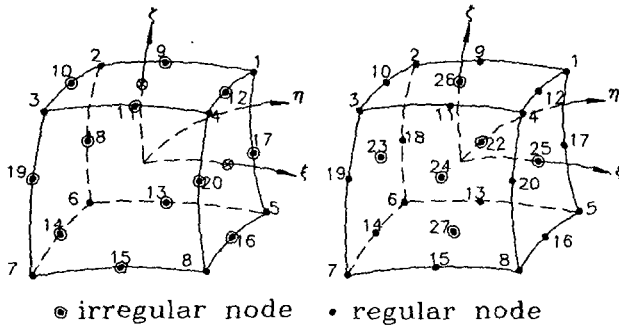


그림 1 8~20 절점 및 22~27절점 입체 변위요소

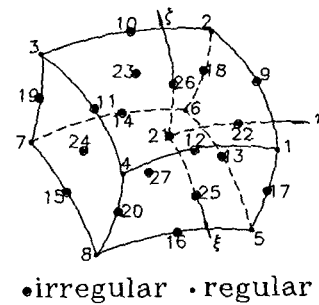


그림 2 8~27절점 입체 변위요소

2.1 변위요소의 형상

8절점에서 27절점까지 임의의 위치에 불규칙 절점이 추가되어 체계적으로 구성되는 변위요소는 그림 2에 나타난 기본적인 형상에 근거하고있다. 유도된 형상함수에서 변절점인 9절점에서 27절점에 대한 형상함수들 (N_9 부터 N_{27})은 해당절점들이 존재할 때만 영이 아닌 값을 가진다. 만약 예를들어 8절점요소에 19개의 불규칙절점이 추가되면 기존의 27절점 입체요소가 될 것이다. 본 연구에서 제안된 8~27절점 변위요소에 대해 유도된 형상함수들은 부록에 나타나 있다.

2.2 3차원 입체 변이요소에 비적합변위형 추가

비적합변위형들은 1970년대 초반에 Shear Locking 현상을 제거하기위하여 등매개 변수요소들에 추가되어 왔다. 기존의 8절점 입체요소도 Shear Locking현상으로 인하여 체논의 세분화정도가 거칠면 일반적으로 정확해와는 상당한 차이를 나타낸다. 따라서 8절점 입체요소를 사용할 경우 전형적인 비적합모드, 즉 $1 - \xi^2$, $1 - \eta^2$ 및 $1 - \zeta^2$ 을 기본적으로 추가하여 사용하고있다 [Cook(1981)]. 따라서 적용적 체논 세분화 과정에서 세분화된 영역과 조악한 영역사이의 변이구간을 연결하는 변이요소가 일관된 정확성을 도출하기위해 전 질에서 제안된 임의의 변이요소에 대해서도 불규칙절점의 위치 및 갯수에 따라 상용하는 비적합 변위형을 추가하였다.

기존의 8절점 입체요소에 대한 정식화와 동일한 방법으로 불규칙 절점이 추가된 위치에 따라 수정된 비적합변위형을 고려한 임의의 입체 변이요소에 대한 요소변위는 다음과 같다.

$$U_e = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta, \zeta) U_i + \sum_{i=1}^3 \tilde{N}_i(\xi, \eta, \zeta) \tilde{U}_i \quad (1)$$

여기서, n 은 추가된 불규칙 절점을 포함한 요소 총절점수이고 N_i 는 불규칙 절점추가에 의한 영향을 고려한 형상함수이다. 그리고 \tilde{N}_i 는 아래와 같이 수정된 비적합변위형이다;

$$\begin{aligned} \tilde{N}_1 &= (1 - \xi^2) - (\tilde{N}_9 + N_{11} + N_{13} + \tilde{N}_{15}) \\ \tilde{N}_2 &= (1 - \eta^2) - (\tilde{N}_{10} + N_{12} + \tilde{N}_{14} + \tilde{N}_{16}) \\ \tilde{N}_3 &= (1 - \zeta^2) - (\tilde{N}_{17} + N_{18} + N_{19} + \tilde{N}_{20}) \end{aligned} \quad (2)$$

상기의 형상함수에서 \tilde{N}_9 부터 \tilde{N}_{20} 은 부록에 나타낸 형상함수이며 해당위치에 절점이 존재할 경우에만 영이 아닌값을 갖는다. 그리고 비적합 변위형이 고려된 임의의 입체변이요소에 대한 요소 변형률은 다음과 같이 표현된다.

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^n B_i U_i + \sum_{i=1}^3 G_i \tilde{U}_i \quad (3)$$

상기식에서 변형률-변위 관계행렬 B 및 G 는 변위형상함수 N_i 및 \tilde{N}_i 의 미분을 통해 얻어 지는데 다음 미분항은 영이라는 제한조건을 부여하여야 한다.

$$\frac{\partial \tilde{N}_1}{\partial \eta} = \frac{\partial \tilde{N}_1}{\partial \zeta} = 0, \frac{\partial \tilde{N}_2}{\partial \xi} = \frac{\partial \tilde{N}_2}{\partial \zeta} = 0, \frac{\partial \tilde{N}_3}{\partial \xi} = \frac{\partial \tilde{N}_3}{\partial \eta} = 0 \quad (4)$$

한편, 임의의 3차원 입체요소에 대한 변형에너지는 식 (5)와 같이 정의되며 식 (3)을 이용하여 정리하면 식 (6)과 같이된다.

$$W = \frac{1}{2} \int_V \sigma^T \varepsilon dV \quad (5)$$

$$W = \frac{1}{2} \int_V \sigma^T B u_c dV + \frac{1}{2} \int_V \sigma^T G u_n dV \quad (6)$$

본 연구에서는 Wilson 및 Ibrahimbegovic(1990)이 8절점 입체요소에 대해 제시한 방법을 확장 적용하여 일정한 응력하에서 임의의 변이요소에 상용하는 비적합변위형에 의한 변형에너지를 제거하는 조건을 부과하였다;

$$\frac{1}{2} \sigma^T \int_V G dV u_n = 0 \quad (7)$$

요소내의 영이 아닌 응력은 적분과정에서 소거되어야 하므로 식 (7)은 다음 식 (8)과 같이 단

순화된다.

$$\int_V G dV = 0 \quad (8)$$

상기 식(8)은 행렬 G 에 다음식 (9)를 만족시키는 일정(constant)한 보정 행렬 G_c 를 더하여 적분함으로써 만족될 수 있다.

$$\int_V \tilde{G} dV = \int_V (G + G_c) dV = 0 \quad (9)$$

그런데 상기식에서 G_c 가 일정한 상수행렬이라는 사실을 이용하면 G_c 는 다음과 같이 유도된다.

$$G_c = -\frac{1}{V} \int_V G dV \quad (10)$$

상기의 보정행렬 G_c 는 요소의 강성행렬이 산정되기전에 수치적으로 산정되며, 이때 보정행렬도 동일한 적분점에서 고려되어야하므로 요소강성행렬에서 사용하는 것과 동일한 적분공식을 사용하여야한다.

최종적인 강성행렬 K 는 정적응축(condensation)에 의해 비적합변위형의 절점변위를 제거함으로써 구성될 수 있다[Taylor et al.(1976)].

2.4 3차원 입체 변이요소의 수치검증

8절점에서 27절점까지 임의로 추가할 수 있도록 제안된 적합 및 비적합 변이요소의 타당성 및 적용적 체분화에서의 적용가능성을 검증하기 위해 몇가지 테스트를 수행하였다. 본 검증에서는 수치해석에서 구한 결과와 비교할 수 있는 정확한 이론해가 존재하는 예제를 고려하였다.

테스트-1 고유치 해석

제안된 3차원 입체 적합 및 비적합 변이요소에 대한 고유치해석을 수행하여 가영-에너지 모드(spurious zero-energy mode)의 발생 여부를 검증하기 위하여 9절점에서 27절점까지 임의의 위치에 불규칙절점을 추가된 변이요소들에 대해 수행하였다. 3차원 입체요소는 6개의 강체모드를 갖는데 모든 경우에 6개의 영(zero) 고유치가 존재하였으므로 가영-에너지 모드는 존재하지 않는다.

테스트-2 조각(Patch)시험

본 연구에서 적용적체는 세분화를 위해 제안된 상응하는 비적합변위형이 고려된 3차원 입체 변이요소들이 일정변형률상태(constant strain state)를 표현할 수 있는가를 검증하기 위해 Patch 테스트를 수행하였다. 일반적으로 3차원 입체요소의 Patch 테스트에 사용하는 모델을 이용하되 임의의 변이요소에 대한 타당성을 검증하기 위해 다양한 위치에 변질점이 존재하는 변이요소를 조합한 모델을 구성하여 수행하였다. 전형적인 모델의 기하학적 형태, 재료특성 및 체분등은 그림 3에 나타나 있는 바와 같으며, 변위로 정의된 경계조건 및 이론해는 표 2에 나타난 바와 같다. 임의의 변이요소로 혼합한 모델에 주어진 변위경계조건에 대해 해석결과 Patch 테스트를 정확히 통과하였다.

표 1 3차원 입체변이요소의 조각시험 모델의 내부절점좌표

절점번호	x	y	z
5	0.320	0.186	0.643
6	0.677	0.305	0.683
7	0.826	0.288	0.288
8	0.249	0.342	0.192
9	0.165	0.745	0.702
10	0.788	0.693	0.644
11	0.850	0.649	0.263
12	0.273	0.750	0.230

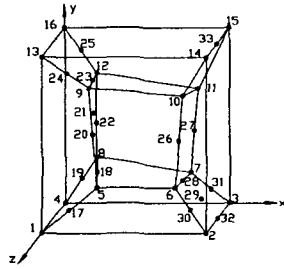


그림 3 입체 조각시험 모델

주) $E=1 \times 10^6, \nu = 0.25$; 단위길이의 입방체

주) 각 요소의 모서리중간 절점좌표는 해당모서리 양끝 절점좌표의 평균값임

표 2 경계조건 및 이론해

경 계 조 건	이 론 해
$u = 10^{-3}(2x + y + z)/2$	$\epsilon_x = \epsilon_y = \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 10^{-3}$
$v = 10^{-3}(x + 2y + z)/2$	$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 2000$
$w = 10^{-3}(x + y + 2z)/2$	$\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 400$

테스트-3 끝단에 휨 혹은 전단하중을 받는 외팔보

임의의 입체 변이 요소의 적용성을 검증하기 위하여 끝단에 휨하중 혹은 전단하중을 받는 외팔보(그림 4)에 대한 해석을 수행하였다. 본 예제에서는 그림 5(a) 및 그림 5(b)에 도시한 정규 체는 및 비정규체에는 임의의 변이요소를 혼합하여 사용함으로써 적응적 체는 세분화에 대한 적용 가능성 및 요소자체의 성능을 동시에 검증하였다.

임의의 변이요소가 조합된 모델에 대해 위치 A에서의 수직변위 및 위치 B에서의 휨모멘트를 정확해 및 변이요소를 사용하지않은 경우와 비교해 보았으며, 체는 세분화과정에서 발생빈도가 높은 변이요소의 조합에 대한 해석결과 및 정확해를 표 3 및 표 4에 수록하였다. 결과 비교에 의하면 체는의 상태 및 상응하는 비적합 변위형의 추가여부에 따라 정확한 정도는 다르지만 8절점 입체 요소만을 이용한 동일한 체는의 해석결과와의 비교에 의하면 임의의 입체변이요소의 추가로 인한 문제점은 없으며 불규칙절점의 추가에 따른 상응하는 비적합 변위형을 고려함으로써 해석의 결과가 개선됨을 알 수 있다.

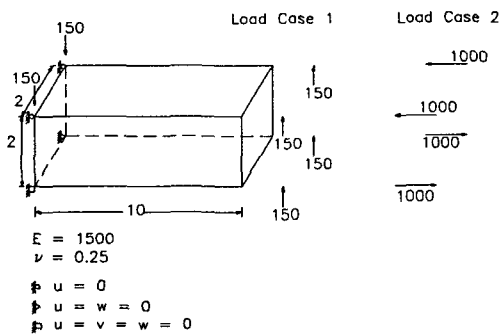


그림 4 끝단에 휨 혹은 전단하중을 받는 외팔보

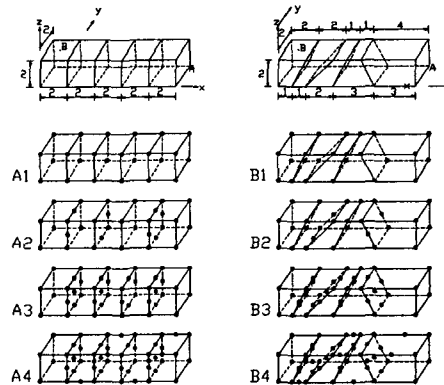


그림 5(a) 정규 체는

(b) 비정규 체는

표 3 정규체눈으로 구성된 변이요소의 조합에 따른 해석결과

체눈	지점 A에서의 수직변위				지점 B에서의 응력 σ_{xx}			
	하중경우-1		하중경우-2		하중경우-1		하중경우-2	
	적합요소	비적합요소	적합요소	비적합요소	적합요소	비적합요소	적합요소	비적합요소
A1	68.45	101.40	66.67	100.00	-2972.0	-4050.0	-2200.0	-3000.0
A2	70.10	100.96	68.86	99.43	-2972.0	-4050.0	-2200.0	-3000.0
A3	72.33	101.28	70.83	99.97	-2936.0	-4063.0	-2167.0	-3005.0
A4	78.48	100.27	77.86	98.07	-3001.0	-3968.0	-2241.0	-2905.0
정확해	102.60		100.0		-4050.0		-3000.0	

표 4 비정규체눈으로 구성된 변이요소의 조합에 따른 해석결과

체눈	지점 A에서의 수직변위				지점 B에서의 응력 σ_{xx}			
	하중경우-1		하중경우-2		하중경우-1		하중경우-2	
	적합요소	비적합요소	적합요소	비적합요소	적합요소	비적합요소	적합요소	비적합요소
B1	49.33	89.89	44.38	87.45	-2415.0	-3097.0	-1736.0	-2262.0
B2	56.38	86.66	51.59	83.46	-2420.0	-3103.0	-1757.0	-2286.0
B3	64.61	89.57	58.42	86.03	-3129.0	-4018.0	-2300.0	-3002.0
B4	79.49	97.40	78.60	95.99	-3338.0	-3959.0	-2460.0	-2908.0
정확해	102.60		100.0		-4050.0		-3000.0	

테스트-4 반무한 탄성체의 Boussinesq 문제

Boussinesq는 반무한히 계속되는 등방성 탄성재료에 수직으로 집중하중이 가해졌을 때의 응력을 이론적으로 구했다. 일명 Boussinesq문제(그림 6)라고 하는 이러한 문제를 수치적으로 해석하기 위해 3차원 입체변이요소를 사용하여 그림 7(a)에 보인 바와같이 근사적으로 모델링하였다. Z=-45인 바닥면의 경계조건은 완전 고정단이며 X=0 및 Y=0인 면은 대칭성을 고려하여 X방향 과 Y방향으로 각각 구속시켰다. 점하중 P=10,000lb를 수직방향으로 작용시켰다. 그리고 하중이 작용된 부분은 요소를 세분화시켰으며, 세분화된 영역과 세분화되지 못한 영역의 경계면에는 적절한 입체 변이요소를 사용하였다. 한편 입체변이요소를 사용하지않고 8절점 입체요소만으로 구성된 모델(그림 7(b))에 대한 수치해를 이론해와 동시에 표 5에 제시하였다. 본 예제는 상용하는 비적합 모드를 고려한 3차원 입체변이요소의 성능을 검증함과 동시에 경계면에 사용된 입체변이요소의 적응적 체눈 세분화의 적용가능성 및 타당성을 확인하기위한 것이다.

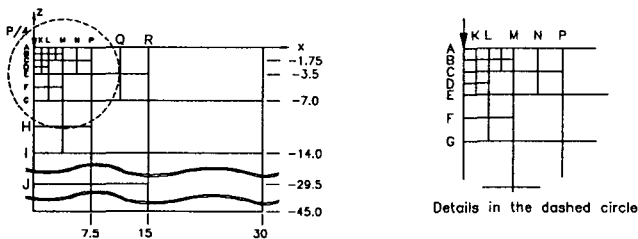


그림 6 Boussinesq 문제의 해석모델(측면도)

표 5(a) Z-방향의 수직변위(in × 10⁻⁵)

	Z-축 방향					X-축 방향			
	A	B	C	E	G	L	M	P	R
NC-8	182.70	53.15	24.32	12.59	5.72	14.57	6.29	3.09	1.34
C-8	166.46	55.42	25.30	12.23	5.78	14.20	6.18	3.03	1.34
NC-V	183.37	53.58	24.61	13.82	6.62	15.46	7.01	3.23	1.45
EXACT	∞	56.75	28.38	14.19	7.09	15.45	7.72	3.86	1.93

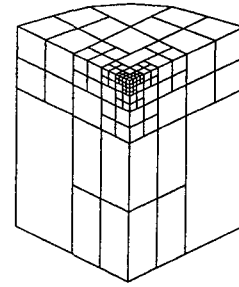


그림 7(a) 변이요소 모델

표 5(b) 대칭 모서리를 따른 수직방향의 응력(σ_z)

	AB	BC	CE		EG		GI	
			CD	DE	EF	FG	GH	HI
NC-8	17940.	3291.	665.0		185.9		40.9	
C-8	16790.	3803.	782.0		175.5		42.5	
NC-V	17970.	3294.	788.2	404.9	300.0	102.8	77.4	27.5
EXACT	24945.	2771.	692.9		173.2		43.3	
			997.8	509.1	249.5	127.3	62.4	31.8

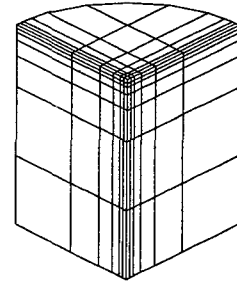


그림 7(b) 8절점요소 모델

3. 결 론

유한요소법을 사용한 구조해석에서 응력변화가 심하여 세분화시킨 영역과 응력이 상대적으로 균일하여 조악하게 구성된 영역 사이의 변이구간을 처리해야 할 경우가 빈번히 발생한다. 본 연구에서는 이러한 경우 구조해석자들이 효율적으로 모델링하고 또한 궁극적으로는 3차원 적응적 h-세분화에 적용키 위한 8절점 부터 27절점까지의 임의의 변이요소를 제안하였다.

상용하는 비적합모드를 고려한 제안된 임의의 변이요소는 위험한 spurious zero-energy mechanism을 발생시키지 않고 요소를 개선함으로써 응력집중부분의 국부적인 체는 세분화시 변이구간의 효율적인 체는구성 뿐만아니라 해의 정확성도 유지할 수 있음을 수치해를 통하여 입증하였다.

3차원 입체요소를 사용한 기존의 적응적 체는세분화시 변이제한조건을 사용하고 있다. 제안된 8절점 부터 27절점까지의 임의의 변이요소를 사용함으로써 이웃요소들간의 적합조건을 만족시키기 위한 제한조건을 부여하지않고 독립적으로 체는을 세분화할 수 있으므로 3차원 적응적 체는세분화에 효율적으로 사용할 수 있을것으로 사료된다.

참고문헌

1. Choi C.K. and Park Y.M. 1989. Nonconforming transition plate bending elements with variable mid-side nodes, Computers and Structures, vol. 32, No.2: 295-304.
2. Cook R.D. 1981. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis, 2nd edn.* Jhon Wiley & Sons, New York.
3. Devloo P.R. 1991. A three-dimensional adaptive finite element strategy, Computers and Structures 38, No.2: 121-130.
4. Taylor R.L., Beresford P.J. and Wilson E.L. 1976. A non-conforming element for

stress analysis, Int. J. Numer. Meth. Engng. 10: 1211-1219.

5. Timoshenko S. and Goodier N.J. 1970. *Theory of Elasticity, 3rd edn.* McGraw-Hill, New York:398-402. No.4: 736-754.

6. Wilson E.L. and Ibrahimbegovic A. 1990. Use of incompatible displacement modes for the calculation of element stiffnesses or stresses. *Finite Element in Analysis and Design* 7: 229-241.

부록

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \hat{N}_1 - \frac{1}{2}(N_9 + N_{12} + N_{17}) - \frac{1}{8}N_{21} - \frac{1}{4}(N_{22} + N_{25} + N_{26}) \\
 N_2 &= \hat{N}_2 - \frac{1}{2}(N_9 + N_{10} + N_{18}) - \frac{1}{8}N_{21} - \frac{1}{4}(N_{22} + N_{23} + N_{26}) \\
 N_3 &= \hat{N}_3 - \frac{1}{2}(N_{10} + N_{11} + N_{19}) - \frac{1}{8}N_{21} - \frac{1}{4}(N_{23} + N_{24} + N_{26}) \\
 N_4 &= \hat{N}_4 - \frac{1}{2}(N_{11} + N_{12} + N_{20}) - \frac{1}{8}N_{21} - \frac{1}{4}(N_{24} + N_{25} + N_{26}) \\
 N_5 &= \hat{N}_5 - \frac{1}{2}(N_{13} + N_{16} + N_{17}) - \frac{1}{8}N_{21} - \frac{1}{4}(N_{22} + N_{25} + N_{27}) \\
 N_6 &= \hat{N}_6 - \frac{1}{2}(N_{13} + N_{14} + N_{18}) - \frac{1}{8}N_{21} - \frac{1}{4}(N_{22} + N_{23} + N_{27}) \\
 N_7 &= \hat{N}_7 - \frac{1}{2}(N_{14} + N_{15} + N_{19}) - \frac{1}{8}N_{21} - \frac{1}{4}(N_{23} + N_{24} + N_{27}) \\
 N_8 &= \hat{N}_8 - \frac{1}{2}(N_{15} + N_{16} + N_{20}) - \frac{1}{8}N_{21} - \frac{1}{4}(N_{24} + N_{25} + N_{27}) \\
 N_i &= \hat{N}_i - \frac{1}{4}N_{21} - \frac{1}{2}(N_{i+13} + N_{26}), \quad i=9,10,11,12 \\
 N_i &= \hat{N}_i - \frac{1}{4}N_{21} - \frac{1}{2}(N_{i+9} + N_{27}), \quad i=13,14,15,16 \\
 N_{17} &= \hat{N}_{17} - \frac{1}{4}N_{21} - \frac{1}{2}(N_{22} + N_{26}) \\
 N_i &= \hat{N}_i - \frac{1}{4}N_{21} - \frac{1}{2}(N_{i+4} + N_{i+5}), \quad i=18,19,20 \\
 N_{21} &= \hat{N}_{21} \\
 N_i &= \hat{N}_i - \frac{1}{2}N_{21}, \quad i=22,23,\dots,27
 \end{aligned}$$

여기서,

$$\begin{aligned}
 \hat{N}_i &= \frac{1}{8}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(1 + \zeta\zeta_i), \quad i=1,2,\dots,8 \\
 \hat{N}_i &= \frac{1}{4}(1 - \xi^2)(1 + \eta\eta_i)(1 + \zeta\zeta_i), \quad i=9,11,13,15 \\
 \hat{N}_i &= \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 - \eta^2)(1 + \zeta\zeta_i), \quad i=10,12,14,16 \\
 \hat{N}_i &= \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(1 - \zeta^2), \quad i=17,18,19,20 \\
 \hat{N}_i &= (1 - \xi^2)(1 - \eta^2)(1 - \zeta^2), \quad i=21 \\
 \hat{N}_i &= \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta\eta_i)(1 - \zeta^2), \quad i=22,24 \\
 \hat{N}_i &= \frac{1}{2}(1 + \xi\xi_i)(1 - \eta^2)(1 - \zeta^2), \quad i=23,25 \\
 \hat{N}_i &= \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta^2)(1 + \zeta\zeta_i), \quad i=26,27
 \end{aligned}$$