제한된 수의 Sensor를 이용한 Averaged MUSIC의 효용성에 관한 연구

김 영 집*° 이 일 근* 최 안 경** 김 세 훈*
* 한남대학교 공과대학 전자공학과
** 한국과학기술대학 수학과

A Study on the Effectiveness of Averaged MUSIC Using Limited Number of Sensors

Young-Jip Kim*, Ill-Keun Rhee*, In-Kyeong Choi**, Sea-Hoon Kim*
* Dept. of Electronic Eng., Hannam Univ.
** Dept. of Mathematics , KAIST

ABSTRACT

The main purpose of this paper is to verify the effectiveness of e a high resolution direction finding method, so called the 'averaged MUSIC'. This method uses a new sample array covariance matrix that consists of diagonal components obtained by taking averages of the diagonal component values of the sample covariance matrix for the MUSIC.

This paper shows that the proposed method performs higher resolved direction-of-arrival estimation and better resolution probability than the MUSIC in such cases as low signal-to-noise ratio, when the number of sensors used is finite, based on the statistical analysis.

I. 서 론

Parameter Estimation의 일태를 취하는 도래방향각 예측 (DOA:Direction of Arraival) 에 관한 연구에는 ME (Maximum Entropy) 나 ML (Maximum Likelihood) 등의 Spectral Estimation Process [1,2] 등이 많이 이용되어 왔다.

그러나 1980년대 이후 Eigenstructure Algorithm을 이용한 방법들 [3,4,5] 이 출현하면서 이 분야에서 획기적인 발전이 이룩되었다. 이 Eigenstructure Algorithm은, Sensor Array를 이용하여 시간, 공간적으로 얻어진 Sample 데이터값으로 부터 Sample Array Covariance Matrix 를 구해내고 이 Matrix의 Eigenvalue 들 과 Eigenvector 들을 계산하여 최적의 Parameter 예측이나 결정들을 이끌어 낸다.

이 Eigenstructure Algorithm은 기존의 ME 나 ML 등에 비하여 계산면에서의 간단성과 효용성 뿐만 아니라 다른 빠른 Algorithm과 Hardware의 도움으로 강력한 Tool을 제공한다. 이 Eigenstructure Algorithm은 DOA 예측뿐만 아니라 Filtering, Detection, Data Reduction등 많은곳에 응용될 수 있다 [3,4,5,6].

Eigenstructure-based 방법들중 Schmidt에 의해 제안된 MUSIC(MUltiple Signal Classification) [7,8] 은, 80년대 중반 Bell Lab. 에서 기존의 DOA 예측방법들을 모아 Simulation을 통해 비교한 결과 가장 우수한 예측방법으로 평가를 내린바 있고, 현재까지도 새로 개발되는 많은 DOA 예측방법들을 위한 Benchmark로 사용되고 있다 [3,4,5].

Sensor Array로 부터 얻은 데이터들의 Sample Array Covariance Matrix의 대각선 요소값들은 이론상 서로 같은 값을 가지게 되나, 실제적인 측면에서 본래 유한한 갯수의 Sensor로 부터 얻어진 한정된 수의 Sample 데이터들의 Sample Array Covariance Matrix의 대각선 요소값들은 서로 조금씩 다른값들을 지니며, 이는 DOA 예측시 해상도 저하의 요인으로 작용한다. 따라서 [9] 에서는, 대각선 요소들의 평균값을 취하여 이를 새로운 대각선 요소값들로 대치하여 DOA 예측을 수행하는 소위 Averaged MUSIC 을 사용하므로써, MUSIC 에 비하여 해상도가 향상됨을 보였다.

본 논문에서는, 신호대잡음비 (S/N) 강하, Sensor 수의 변화에 따른 MUSIC 과 Averaged MUSIC 사이의 Resolution Probability와 이에 따른 해상도를 통계적인 방법을 이용한 비교 및 분석을 통하여 Averaged MUSIC 의 효용성을 밝히고자 한다.

II. Averaged MUSIC 과 MUSIC 의 해상도 비교

2-1. 신호 및 잡음 모델

M 개의 신호원으로 부터의 협대역신호들이 $\{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_M\}$ 의 방향각을 가지고, Q 개의 Sensor들로 구성된 Linear Array 로 도래할때, i 번째 Sensor에서 얻어진 신호는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$r_i(t) = \sum_{m=1}^{M} s_m\left(t-(i-1)(D/c)\sin\theta_m\right) + x_i(t), \qquad (1)$$

여기서

$s_m(t)$ = m 번째 Source 로 부터 나온 신호,
D - Sensor 사이의 간격 ,
c - 신호의 전파속도 ,
θ_m - m 번째 Source 의 도래방향각 ,
$x_i(t)$ = i 번째 Sensor 에서의 부가잡음임.

중심 주파수 ω_0 를 갖는 m 번째 신호원으로 부터의 협대역 신호 $s_m(t)$ 을 복소 포락선 표현법으로 바꾸면, 식(1)의 $r_i(t)$ 는 다음과 같이 쓸 수 있다 [10].

$$r_i(t) = \sum_{m=1}^{M} s_m(t)\exp\left[-j\omega_0\tau_{mi}\right] + x_i(t), \qquad (2)$$

여기서

$$\tau_{mi} = (i-1)(D/c)\sin\theta_m \qquad (3)$$

Q 개의 Sensor 들에 받아들여진 신호들을 벡터 형식으로 표현하면

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{m=1}^{M} \mathbf{a}(\theta_m)\, s_m(t) + \mathbf{x}(t), \qquad (4)$$

또는

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{A}(\theta)\,\mathbf{s}(t) + \mathbf{x}(t), \tag{5}$$

여기서

$$\mathbf{r}^T(t) = [r_1(t), r_2(t), \cdots, r_Q(t)],$$
$$\mathbf{s}^T(t) = [s_1(t), s_2(t), \cdots, s_M(t)],$$
$$\mathbf{x}^T(t) = [x_1(t), x_2(t), \cdots, x_Q(t)],$$

그리고 $Q \times M$ Direction Matrix $\mathbf{A}(\theta)$ 의 Column들은 다음과 같이 표현되는 Directional-vector 들로 구성된다.

$$\mathbf{a}^T(\theta_m) = [1, \exp[-j\omega_0\tau_{m2}], \exp[-j\omega_0\tau_{m3}] \cdots, \exp[-j\omega_0\tau_{mQ}]]. \tag{6}$$

2-2. MUSIC 및 Averaged MUSIC

식(1)에서, 부가잡음들이 Zero-mean 이고 신호원으로부터의 신호들과는 서로 상관관계가 없을때 (uncorrelated), 식(5)에 대응하는 Array Covariance Matrix $\mathbf{R}$ 은 다음과 표현된다.

$$\mathbf{R} = E[\mathbf{r}(t)\,\mathbf{r}^*(t)] = \mathbf{A}(\theta)\,\mathbf{P}\,\mathbf{A}^*(\theta) + \sigma^2\mathbf{I} \tag{7}$$

여기서,

* 는 Matrix 또는 Vector의 Complex Conjugate Transpose 이고, $\mathbf{P}$는 Nonsingular $M \times M$ Source Covariance Matrix 이고 σ^2은 부가잡음의 Variance (또는 평균전력)이며 $\mathbf{I}$ 는 $Q \times Q$ Identity Matrix 임.

만일 샘플 데이터의 수가 N개로 제한되어 주어진다면, Sample Array Covariance Matrix는 다음과 같이 얻어진다.

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\mathbf{r}(t)\,\mathbf{r}^*(t) \tag{8}$$

이제 $\hat{\mathbf{R}}$의 최소 Eigenvalue들과 대응하는 Eigenvector들을, 다음의 잘 알려진 Eigenstructure Algorithm [9,10]를 적용하여 식(9)에 대입하여 $\hat{\mathbf{D}}$ 의 peak 점들을 찾아내면 이들이 바로 Q개의 sensor들로 구성된 Sensor Array에 도래하는 신호원으로부터의 신호들의 바람직한 방향각들이 됨을 쉽게 알 수 있다.

$$\hat{\mathbf{D}} = \left[\mathbf{a}^*(\theta)\left(\sum_{k=M+1}^{Q}\mathbf{v}_k\,\mathbf{v}_k^*\right)\mathbf{a}(\theta)\right]^{-1} \tag{9}$$

Theorem (Eigenstructure Algorithm)

만일 얻어진 Sample Array Covariance Matrix 의 Eigenvalue 들과 이에 대응하는 Eigenvector 들을 각각 $\{\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \cdots \geq \varepsilon_Q\}$ 와 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \cdots, \mathbf{v}_Q\}$ 라고 하고, 이들을 이론적으로 식(7)과 같이 표현하면, 여기서 $\mathbf{A}(\theta)$ 는 Rank M ($M < Q$) 을 가지는 $Q \times M$ Vandermonde Matrix임, $M \times M$ Matrix $\mathbf{P}$가 Non-singular 하기만 하면 다음의 사실들이 성립한다.

i) $\mathbf{R}$ 의 minimum Eigenvalues ($Q-M$개)

$$\varepsilon_{M+1} = \varepsilon_{M+2} = \cdots = \varepsilon_Q = \sigma^2$$

ii) i)에 대응하는 Eigenvector 들은 $\mathbf{A}(\theta)$의 Column Span 에 직교함. 즉,

$$\{\mathbf{v}_{M+1}, \mathbf{v}_{M+2}, \cdots, \mathbf{v}_Q\} \perp \{\mathbf{a}(\theta_k), k = 1, 2, \cdots, M)\}$$ ■

하지만 Array Covariance Matrix의 대각선 요소들이 이론상으로는 서로 같은 값을 가져야 함에도 불구하고, 현실적으로 유한한 갯수의 Sensor들로부터 얻어낸 한정된 수의 Sample 데이터들에 의한 Sample Array Covariance Matrix $\hat{\mathbf{R}}$의 대각선 요소들은 서로 조금씩 다른 값을 가지게된다. 따라서 이 Matrix $\hat{\mathbf{R}}$ 의 Eigenvalue들과 대응하는 Eigenvector값들이 이론치와는 조금씩 다른값들을 갖게되어, 도래방향각 예측시 해상도 저하의 요인이 된다.

이러한 점에 착안하여, 이제 본 논문에서는 Sample Array Covariance Matrix $\hat{\mathbf{R}}$의 대각선 요소값들의 평균값을 취하여 이 새로운 값을 대각선 요소값들에 대치하여 얻어낸 새로운 Eigenvalue들과 대응하는 Eigenvector들을 생성하고, 이들중 Minimum Eigenvalue들과 이에 대응하는 Eigenvector들을 이용하여 식(9)로부터 $\hat{\mathbf{D}}$ 의 Peak점들을 찾아내어 도래방향각을 예측하는 Averaged MUSIC 을 사용하므로써, 특히 Sensor의 수가 한정되어 있는 현실적인 경우에 있어서 MUSIC 에 비해 월등히 해상도의 향상을 가져옴을 보였다.

그림 1 의 Block Diagram은, MUSIC 과 제안된 Averaged MUSIC 에 의해 도래방향각을 예측하는 계통도를 나타내고 있다.

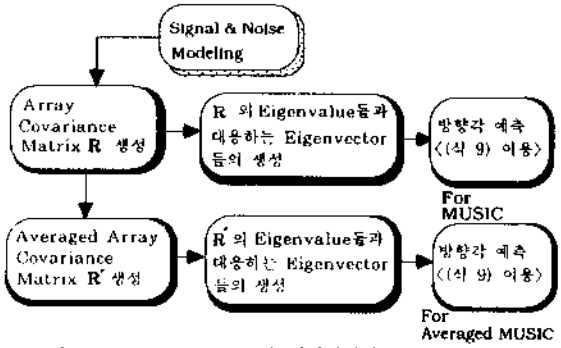

그림 1. Averaged MUSIC 을 실현시키기 위한 계통도

다음의 예제를 통하여, Sensor의 수가 한정되어 있는 경우에 있어서 Averaged MUSIC 을 사용하여 두개의 신호원을 예측할때에 MUSIC 에 비해 상대적으로 월등히 해상도의 향상을 가져옴을 보인다.

예 제 :

첫째로, 256개의 유한한 Sample 데이터 (N=256) 와 Sensor 의 갯수가 8개로 구성된 Uniform Linear Array를 사용하며, Source Signal들은 Uniform Random Phase를 갖는 평면파 (Plane-wave) 들이고, Sensor들의 간격은 도래하는 Wavefront의 Wavelength 반(Half) 이 된다고 가정한다. S/N 이 -9.54 dB인 환경하에서, 2 개의 Source Signal 들이 $\theta_1 = 30^0$, $\theta_2 = 40^0$ 의 방향각을 가지고 도래할 경우 MUSIC과 Averaged MUSIC 을 사용하여 얻어진 도래방향각 예측결과가 그림 2에 보여진다. 그림에서 알 수 있듯이, 앞에 기술된 환경하에서 8 개의 Sensor를 사용할때에 MUSIC 을 이용할 때는 두개의 도래방향각을 전혀 예측해 내지 못하고 완만한 곡선의 형태를 나타내고 있으나, Averaged MUSIC 을 이용시에는 $\theta_1 = 30^0$, $\theta_2 = 40^0$로 정확하게 두개의 Peak를 예측해 내게된다.

이제 S/N 및 다른 조건들은 앞의 경우에서와 같을때, Sensor 의 수를 늘려 11 개의 Sensor 로 구성된 Array를 사용하여 $\theta_1 = 30^0$, $\theta_2 = 40^0$ 의 방향각을 가지고 도래하는 2 개의 Source Signal들의 방향각 예측을 수행한 결과가 그림 3 과 같이 얻어졌다. 이와같이 11 개로 Sensor수를 증가시켜야만 MUSIC 은 2 개의 도래방향각을 예측해내기 시작하나 이때에도 여전히 Averaged MUSIC 에 비해서는 완만하고 부정확한 Peak 들 ($\theta_1 = 29.5^0$, $\theta_2 = 41^0$)을 예측해 냄을 쉽게 알 수 있다.

2-3. 통계적 접근에 의한 MUSIC 및 Averaged MUSIC 의 효용성 분석

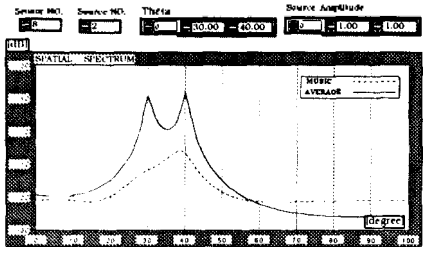

그림 2. S/N = 9.54 dB, Sample Data수 = 256, Sensor 수 = 8 일때, MUSIC과 Averaged MUSIC을 사용하여 $\theta_1 = 30^0$, $\theta_2 = 40^0$ 로 도래하는 두개의 Source Signal의 도래방향각 예측.

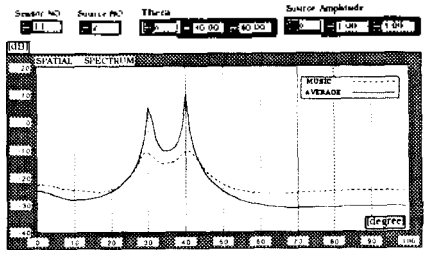

그림 3. S/N = 9.54 dB, Sample Data수 = 256, Sensor 수 = 11 일때, MUSIC과 Averaged MUSIC을 사용하여 $\theta_1 = 30^0$, $\theta_2 = 40^0$ 로 도래하는 두개의 Source Signal의 도래방향각 예측.

여기서는, Sensor의 수가 한정되어 있는 현실적인 상황에 있어서 Averaged MUSIC을 사용할 경우의 MUSIC 에 대한 해상도 향상을 다음의 관점에서 비교 분석 하였다.

1) 5 개로 제한된 Sensor를 사용할때 S/N 의 변화에 따른 신호원 검출확률 (Resolution Probability) 및 도래방향각 예측.
2) S/N 을 고정하고 Sensor수를 변화시키며 관측한 신호원 검출확률 및 도래방향각 예측.

이하 모든 상황들에 있어서 한 두 경우 나오는 특별한 결과를 배제하기 위하여 통계적인 방법을 사용하므로서 가능한한 정확한 결과 비교를 위하여 노력하였다. 즉, 모든 경우에 있어서 Random Number Generator 의 Seed를 변화시켜 가며 50 번의 독립적인 시행 (50 Independent Runs) 한후 에 통계를 냄으로써 두가지 방법을 비교하였다. 또한 모든 경우에 있어서 신호원으로 부터 나온 신호들이, Sensor 들이 Wavelength 의 반(Half)의 간격으로 배열된 Uniform Linear Array로 도래할때 Gaussian 부 가잡음이 섞인 256 개의 Sample 데 이터를 구하여 사용하였다.

2-3-1. 5 개로 제한된 Sensor를 사용할때 S/N 의 변화에 따른 신호원 검출확률 및 도래방향각 예측

여기서는 단일 신호원이 $\theta = 40^0$ 의 방향각을 가지고, 5 개의 Sensor들로 구성된 Uniform Linear Array 로 도래할 경우에 MUSIC 과 Averaged MUSIC 을 사용하여 50 번의 독립 시행 결과 얻어낸 신호원 검출확률(Resolution Probability) 을 S/N 의 함수로서 구하여 그림 4 에 나타내었다. 또한 50 번 시행결과 얻어진 예측값과 실제값의 절대오차의 평균치 및 오차의 표준편차를 S/N 의 함수로서 구하여 그림 5 와6 에 나타내었다.

그림 4 에서 보이듯이, MUSIC 은 S/N 이 -6.02 dB 가 될때 신호원 검출확률이 30 % (50번 시행중 15번 검출) 밖에 되지 않는데 비하여 Averaged MUSIC 은 S/N 이 -6.02 dB 인 경우에 이미 100 % 의 Resolution Probability를 기지며, MUSIC 은 S/N 이 4.44 dB 가 될때 100 % 신호원의 방향각을 구분해낼 수 있게 되어 Averaged MUSIC 이 MUSIC 에 비해 훨씬 우수한 신호원 검출특성을 보임을 알 수 있다.

또한, 그림 5 와 6 에서 보는바와 같이, 비록 두가지 방법이 모두 S/N 이 증가할수록 절대오차와 오차의 표준편차들이 감소하지만, 제안된 방법이 MUSIC 에 비해 전체 S/N 을 통하여 우수한 결과를 보임이 명백하다.

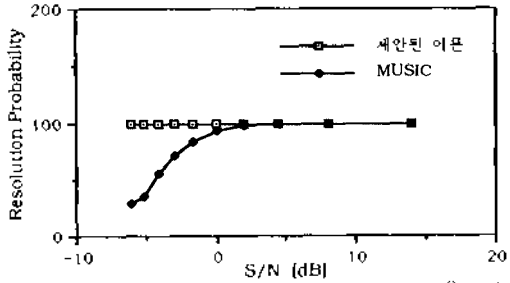

그림 4. MUSIC 과 Averaged MUSIC을 이용한 $\theta = 40^0$ 인 단일 신호원의 S/N 에 따른 Resolution Probability. Q=5, 이고 50 runs

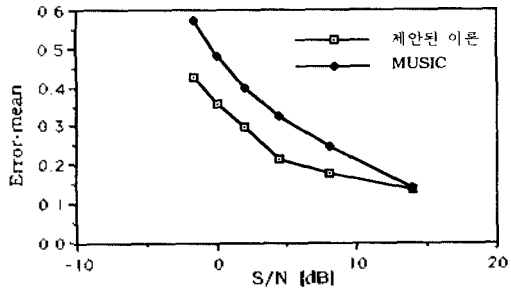

그림 5. $\theta = 40^0$ 인 단일 신호원에 대한 MUSIC 과 Averaged MUSIC 의 S/N 의 변화에 따른 오차의 평균치, Q=5 이고 50 runs

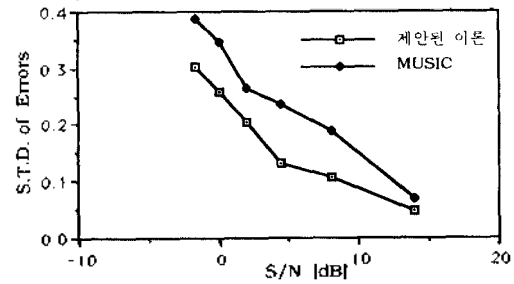

그림 6. $\theta = 40^0$ 인 단일 신호원에 대한 MUSIC 과Averaged MUSIC의 S/N 의 변화에 따른 오차의 표준편차, Q=5 이고 50 runs

2-3-2. S/N 을 고정하고 Sensor수를 변화시키며 관측한 신호원 검출확률 및 도래방향각 예측

여기서는 S/N = -3.52 dB 로 고정한뒤에 단일 신호원의 도래각이 $\theta_1 = 40^0$ 인 경우에 Sensor의 갯수를 3 개 부터 10 개인 경우까지 증가시켜 가면서, 각 50 번의 독립적 시행을 통하여 얻은 측정치를 이용하여 MUSIC 과 Averaged MUSIC 의 신호원 갯수 검출확률 (Resolution Probability) 을 Sensor 갯수의 함수로서 구하여 그림7 에 나타내었다. 그림에서 보이듯이, MUSIC 은 이용하는 Sensor의 수가 3 일때 34 %의 신호원 검출확률을 가지는데 비하여, Averaged MUSIC 은 Sensor의 수가 3 개 일때부터 이미 검출확률이 100% 가 됨을 알 수

있다. MUSIC 은 Sensor의 수가 8개인 경우에야 100 % 의 신호원 검출확률을 가지게 되어, S/N을 고정시키고 Sensor의 수를 변화시키며 도래방향각을 예측하는 경우에 있어서도 MUSIC 에 비해 Averaged MUSIC 이 월씬 우수한 신호원 검출을 해냄을 알 수 있다.

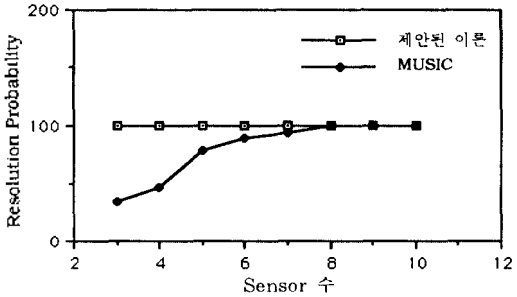

그림 7. MUSIC 과 Averaged MUSIC을 이용한 단일 신호원의 Sensor 갯수에 따른 Resolution Probability. $\theta = 40^{\circ}$, S/N = -3.52 dB, 이고 50 runs

또한 50 번 시행결과 얻어진 예측값과 실제값의 절대오차의 평균치 및 오차의 표준편차를 S/N 의 함수로서 구하여 그림 8 과 9 에 나타내었다. 여기서 볼 수 있듯이 실제값과 예측시의 절대오차의 평균치와 오차의 표준편차값을 비교할때, Averaged MUSIC 이 MUSIC 에 비하여 모든 경우에 우수한 결과를 제공한다. 앞의 2-3-1 절 및 2-3-2 절에서 구해진 결과들은 신호원이 검출되는 경우들만에 대한 통계이므로, 실제 신호원 갯수를 검출해 내지 못하는 경우까지 고려한다면 두 방법의 해상도차이는 더욱 커짐이 명백하다.

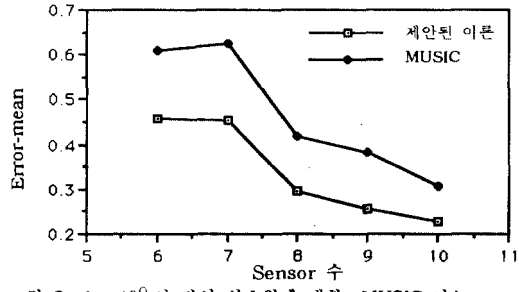

그림 8. $\theta = 40^{\circ}$ 인 단일 신호원에 대한 MUSIC 과Averaged MUSIC 의 Sensor의 갯수에 따른오차의 평균치, Q=5 이고 50 runs

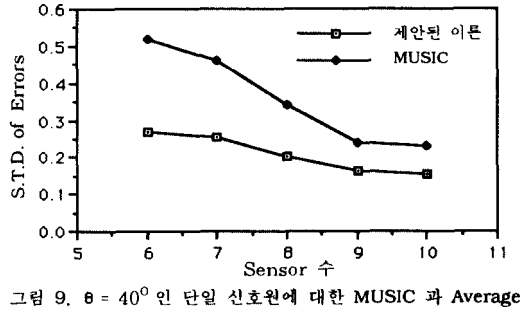

그림 9. $\theta = 40^{\circ}$ 인 단일 신호원에 대한 MUSIC 과 Averaged MUSIC 의 Sensor의 갯수에 따른 오차의 표준편차, Q=5 이고 50 runs

III. 결 론

Eigenstructure Algorithm을 이용하는 MUSIC의 Sensor Array 로 부터 얻은 데이터들의 Sample Array Covariance Matrix의 대각선 요소값들은 이론상 서로 같은 값을 가지게 되나, 실제적인 측면에서 볼때 유한한 갯수의 Sensor로 부터 얻어진 한정된 수의 Sample 데이터들와 Sample Array Covariance Matrix의 대각선 요소값들은 서로 조금씩 다른값들을 지니며, 이는 DOA 예측시 해상도 저하의 요인으로 작용한다. 따라서 본 논문에서는 Sample Array Covariance Matrix 의 대각선요소들의 평균치를 취하여 이를 대각선 요소값들로 대치한 새로운 Sample Array Covariance Matrix 를 이용하여 도래방향각 예측을 수행하는 소위 'Averaged MUSIC' 을 사용하므로써, MUSIC 에 비하여 해상도가 향상됨을 특히 유한한 갯수를 사용할때의 현실적인 관점에서 보였다. 즉, MUSIC과 Averaged MUSIC 사이의 Resolution Probability 와 S/N 의 변화, Sensor 수의 변화에 따른 성능을 통계학적인 방법을 사용하여 비교 및 분석을 하므로써, 사용되는 Sensor의 수가 한정된 경우에 대한 Averaged MUSIC 의 효용성을 밝혔다.

여기서 사용된 방법은, MUSIC 에 비해 한번의 수행과정을 더 거쳐야 하는 점은 있으나, 해상도를 크게 향상시키는 장점을 가지고 있으므로 다른 기존의 다른 도래방향각 예측방법들에 접목하여 사용하므로써 부가적인 성능향상을 가져올 것으로 기대된다.

이 논문은 1993년도 한남대학교 교비 학술연구조성비 지원에 의하여 연구되었습니다.

참 고 문 헌

1. J.P. Burg, " The Relationship between Maximum Entropy and Maximum Likelihood Spectra," Geophsics, Vol. 37, 375-376, 1972.
2. J. Capon, "High Resolution Frequency Wavenumber Spectrum Analysis," Proc. IEEE Vol. 57, 1408-1418, 1969.
3. M. Wax, T. Shan, and T. Kailath, "Spatio-temporal Spectral Analysis by Eigenstructure Methods," EEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing, Vol ASSP-32, No.4, 817-827, 1984.
4. J.F. Yang and M. Kaveh, "Adaptive Eigen-subspace Algorithms for Direction or Frequency Estimation and Tracking," 1987 International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, Dallas, 1987.
5. 이 일 근, "특수상황에서 극히 효율적인 도래방향각 예측방법," 한국통신학회 논문지, 제 18권 3호, 439-448, 1993.
6. L.L. Scharf and B.D. VanVeen, "Low Rank detectors for Gaussian Random Vectors," IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing, Vol. Assp-35, No.11, 1579-1582, 1987.
7. R.O. Schmidt, "A Signal Subspace Approac to Multiple Source Location and Spectral Estimation," Ph.D. Dissertation, Stanford University, Stanford, CA, 1981.
8. R.O. Schmidt, "Multiple Emitter Location and Signal Parameter Estimation," IEEE Trans. Antenna and Propagation, Vol AP-34, 276-280, 986.
9. 김 영 집 외 3인, "LabVIEW 2 를 사용한 MUSIC 과 그의 평균효과에 관한 연구," 1993년도 대한 전자공학회 하계종합학술대회 논문지, 제16호 제 1호, 531- 534, 1993.
10. 이 일 근, "일반적인 센서잡음상관에 이용되는 도래방향각 예측방법," 한국통신학회논문지, 제 17권 4호, 379-386, 1992.