

수중 공기방울의 선형 배열에 의한 음향 방출 특성

최복경, 윤석왕
성균관대학교 물리학과 음향학 연구실

Acoustic radiation from a line array of bubbles in water

B. K. Choi, S. W. Yoon
Acoustics Research Laboratory, Department of Physics, Sung Kyun Kwan University

요약

물 속에 만들어진 공기방울들은 각자 자신의 반지름에 반비례하는 공진주파수로 음파를 방출하며, 많은 공기방울들이 모인 공기방울 집단은 집단의 전체 크기에 반비례하는 집단 공진주파수를 가진다는 현상이 그동안 연구되어 왔다. 그러나, 수십, 수백 개의 유사한 갯수를 가진 공기방울들의 음파방출 주파수 특성 연구는 부족한 실정이다. 본 연구에서는 수중에 일차원 배열의 공기방울들을 발생시켜 공기방울들에서 나오는 음파방출 주파수를 측정하였다. 수중에 형성된 공기방울들은 그들 간에 거리 간격이 존재하므로 본 연구에서는 공기방울들 간의 상호작용이 변한다고 간주한 유효 결합 조화진동자 모형을 새로이 만들어 해석하였으며, 실험값과 좋은 일치율을 보여주었다.

I. 머리말

공기방울의 음향현상에 관한 연구는 1933년 Minnaert[1]가 공기방울 진동을 단순 조화진동자로 취급하여 공진주파수 및 여러 음향특성을 연구하면서 부터 시작되었다. 최근 개개 공기방울 진동음향과 공기방울집단의 음향특성에 관한 많은 논의들이 이루어지고 있지만[2,3], 한 개 공기방울의 진동에서 공기방울 집단에 이르는 중간과정(여러개의 공기방울)의 음향특성에 대한 이론적 접근 및 실험은 부족한 실정이다. 본 연구는 공기방울들을 유효 결합조화진동자로 간주한 다음, 공기방울 간의 결합상수를 새로이 도입하여 이론을 구성하고, 측정된 결과와 비교하였다.

II. 여러 공기방울들의 상호작용

1. 한 개 공기방울의 진동모형

수중에서 공기방울은 음향임피던스가 주변매체(물)의 값보다 작으며, 공진현상을 가진다는 특징이 있다. 공기방울이 고유진동수나 또는 그에 가까운 주파수를 감지하게 되면 그 공기방울은 아주 잘 공진하게 된다. 공기방울 구표면의 운동이 밀폐된 기체의 압축성, 그리고 공기방울이 진동하면서 움직이게 하는 액체의 질량에 관계된다고 가정하자. 단, 여기서 감쇠는 무시할 수 있고 표면장력이나 열전도의 효과는 없다고 가정한다.

공기방울 내부와 물 사이에 열교환이 없다고 가정하므로 단일기체의 관계, $pV^\gamma = \text{상수}$, 를 이용하여 관계식의 양변을 미분하면 다음과 같다.

$$\frac{dp}{dV} = -\frac{\gamma p}{V} \quad (1)$$

여기서, $dp = p_i - p = p - P_0$ ($P_0 \gg |p_i|$, P_0 : 주변평형 압력)라 놓고, $V = 4\pi a^3/3$ 와 $dV = 4\pi a^2 \xi$ (ξ : 반경변위)를 이용하면,

$$p_i = -\frac{3\gamma P_0 \xi}{a} \quad (2)$$

표면장력이 없으면 전체 구표면에 작용하는 복원력 F_r 는,

$$F_r = 4\pi a^2 p_i = -(12\pi\gamma P_0 a) \xi = -k_0 \xi \quad (3)$$

그러므로, 공기방울의 힘상수 k_0 는

수중 공기방울의 선형 배열에 의한 음향 방출 특성

$$k_o = 12\pi\gamma P_o a \quad (4)$$

로 주어지는 데, γ 는 공기방울 내부기체의 비열비, a 는 평형 공기방울 반지름이다. 그리고, 진동하는 대부분의 질량은 기체의 질량보다 공기방울 가까이에 있는 액체의 질량에 기인하게 되는 데, 이러한 공기방울 진동의 유효질량을 구하면[4]

$$m = 4\pi a^3 \rho_o \quad (5)$$

로 주어지므로, 공진주파수 f_o 는 다음과 같이 된다.

$$f_o = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_o}{m}} = \frac{1}{2\pi a} \sqrt{\frac{3\gamma P_o}{\rho_o}} \quad (6)$$

이것은 물속에서 주변압력이 1기압일 때, 공기방울의 공진주파수 f_o 와 반경 a 는 $f_o \approx 3.3/a$ 의 관계를 가진다.

2. 여러 공기방울들의 유효 결합 상호작용

물 속에 만들어진 공기방울들은 실제로는 어떤 거리만큼 떨어져 있고 그들 사이에는 매개체인 물이 있으므로, 그들 간에 완벽한 상호작용이 있다고 보기는 어렵다. 즉, 한 개의 공기방울이 진동하여 진동음압이 주위로 퍼져 나가는 경우를 생각하자. x 축상으로 1차원인 경우를 고려할 때, 임의의 거리 x에서 음압은 다음으로 주어진다.

$$P(x) = \frac{a}{x} P_w(a) \quad (7)$$

(7)식을 거리 x에서의 힘 $F(x)$ 로 나타내면 (8)식으로 된다.

$$F(x) = \frac{a}{x} F_w(a) \quad (8)$$

여기서 $F_w(a) = F_r = -k_o \xi$ 는 기포벽에서의 복원력을 나타낸다. 두 공기방울 사이의 거리가 d인 경우, 작용되는 힘은

$$F(d) = \frac{a}{d} F_w(a) = -\frac{a}{d} k_o \xi \equiv -k_c \xi \quad (9)$$

즉, d만큼 떨어진 거리에 있는 기포는 $F(d)$ 만큼의 힘을 받는다는 것을 뜻한다. 그러므로 전달상수 k_c 는 다음이 된다.

$$k_c = \frac{a}{d} k_o \quad (10)$$

그러므로, 공기방울 간에 상호작용이 변화할 수 있다고 보고, 공기방울과 공기방울 사이의 유효전달력을 나타내는 전달상수 k_c 를 새로이 도입한 모형을

그림[1]에 나타내었으며, 각각 고유 힘상수 k_o 를 가지는 공기방울 세 개가 그 사이에 k_c 의 영향을 받고 있음을 나타낸다. 이들의 운동방정식을 쓰면 (11)식과 같다.

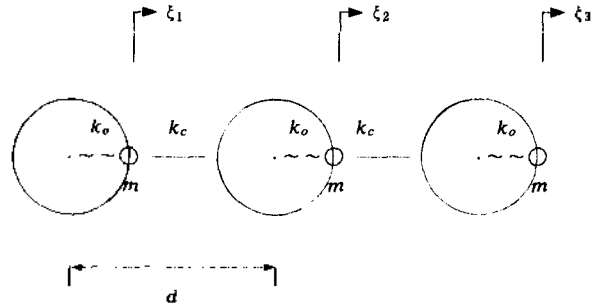


그림 [1] 3개 공기방울인 경우의 1차원 유효 결합 조화진동자 모형.

$$\begin{aligned} m \xi_1 &= -k_o \xi_1 - k_c \xi_2 \\ m \xi_2 &= -k_c \xi_1 - k_o \xi_2 - k_c \xi_3 \\ m \xi_3 &= -k_c \xi_2 - k_o \xi_3 \end{aligned} \quad (11)$$

식 (11)을 행렬로 표시하면,

$$K = \begin{bmatrix} k_o & k_c & 0 \\ k_c & k_o & k_c \\ 0 & k_c & k_o \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \quad (12)$$

이 되는 데, 힘상수 행렬의 행렬요소를 보면, 각 공기방울 사이에 k_c 라는 결합 힘상수가 관계하고 있음을 나타낸다.

$$K[X] = \omega^2 M[X] \quad (13)$$

이 되고, 해는 $(K - \omega^2 M)[X] = 0$ 가 되는 고유값 ω 와 고유벡터를 구하면 된다. 여기서 $f = \omega/2\pi$ 는 결합 공진주파수를 나타내며, k_o 는 한 개 공기방울의 힘상수, k_c 는 공기방울과 공기방울 사이의 전달 힘상수이다. $d \rightarrow \infty$ 인 경우에 공기방울들은 서로 멀리 떨어져 있으므로, 개개 공기방울의 독립된 진동을 기대할 수 있다. 즉, k_c 가 0으로 갈수록 공기방울 사이의 연결상태가 약하다는 뜻이며, 개개 공기방울의 공진주파수로 접근한다. k_c 가 $0 < k_c < k_o/2$

인 경우 공기방울들은 유효 결합 진동모드를 가진다. 이제, 공기방울이 N개인 경우로 확장하면 (12)식은 $N \times N$ 행렬로서 다음과 같이 된다.

$$K = \begin{bmatrix} k_o & k_c & 0 & \dots & 0 \\ k_c & k_o & k_c & 0 & \vdots \\ 0 & k_c & \ddots & & 0 \\ \vdots & 0 & & k_o & k_c \\ 0 & \dots & 0 & k_c & k_o \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & m & 0 & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & m \end{bmatrix} \quad (14)$$

N개의 공기방울에 대한 해는 (14)식을 (13)식에 대입하여 N개의 고유값을 구함으로써 유효 결합 조화진동자의 최저 공진주파수를 찾을 수 있다. 그림[2]와 그림[3]은 각각 공기방울의 갯수와 공기방울 간의 간격에 따른 최저 공진주파수의 변화를 계산한 결과이다. 그림[2]에서 공기방울의 갯수가 늘어남에 따라 결합 공진주파수가 급격하게 감소함을 알 수 있다. 반면에 공기방울 간의 간격이 벌어질 수록 갯수 증가에 따라 주파수가 완만하게 감소하는 경향을 보이며, 공기방울의 갯수가 어느 크기 이상이면 각각 일정 주파수에 수렴하는 것을 알 수 있다. 즉, 공기방울의 갯수가 많아질수록 주파수에 미치는 영향이 작아지는 것을 나타낸다. 그러나, 그림[3]에서는 공기방울 간

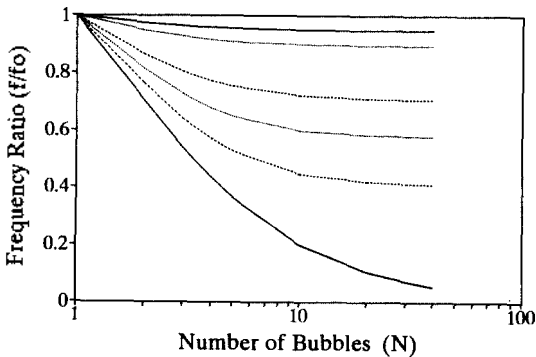


그림 [2] 일정한 공기방울 간격에서 공기방울의 갯수 증가에 따른 최저 공진주파수의 변화(이론)
(굵은실선: $d/2a = 1.0$, 굵은쇄선: 1.2, 굵은점선: 1.5, 쇄선: 2.0, 점선: 5.0, 실선: 10.0).

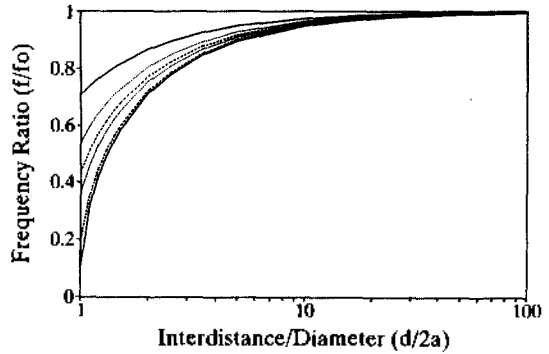


그림 [3] 일정한 공기방울 갯수에서 공기방울 간격의 증가에 따른 최저 공진주파수의 변화(이론)
(실선: $N = 2$, 점선: 3, 쇄선: 4, 굵은점선: 5, 굵은쇄선: 10, 굵은실선: 20 : N은 공기방울의 갯수).

의 거리가 가까울 수록 실제로 공기방울이 인접하는 거리인 $d \approx 2a$ 에서 결합 공진주파수는 급격하게 감소하는 경향을 보인다. 이것은 결합 공진주파수는 공기방울의 갯수보다 공기방울들의 간격에 크게 의존한다는 것을 뜻한다. $d < 2a$ 인 경우는 실제로는 일어나기 어려운 경우이다.

III. 측정방법

측정은 안쪽 벽면이 흡음재로 흡음처리된 길이, 너비, 폭이 각각 2 m, 3 m, 2 m 인 무반향 수조에서 수행하였다. 압축기체질소를 미세조절 유량계 (Cole-Parmer N062)로 20 ml/min 부터 150 ml/min 까지 유량을 조절하면서 한 개의 주사기 바늘로부터 수중으로 공기방울이 분출되도록 하였으며, 수중청음기(B&K B103)로 수신된 공기방울의 진동음향을 증폭기(B&K 2635)로 증폭한 다음 주파수 스펙트럼 분석기(B&K 2033)로 주파수 및 파형을 분석하였다. 수신된 공기방울의 방출 음파는 주파수 스펙트럼 분석기에서 주파수대역 0 - 10 kHz (주파수 분해능 $\Delta f = 25$ Hz), rectangular window, 16회 연속평균으로 분석한 후 컴퓨터에 자동으로 저장하였다. 그림[4]는 공기방울 방출음향의 측정장치 그림이다.

측정방식은 두 종류로 구분하여 실험하였는데, 이를 그림[5]에 나타내었다. 방식 A는 공기방울 분출

수중 공기방울의 선형 배열에 의한 음향 방출 특성

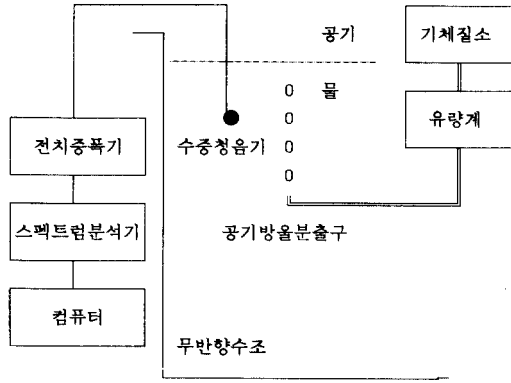
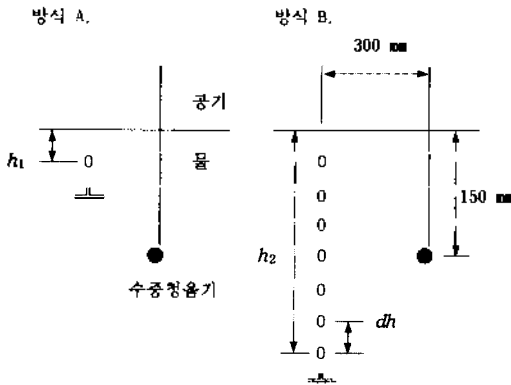


그림 [4] 공기방울 방출음향의 측정장치.



[그림 5] 공기방울의 방출음향 측정방식 (방식 A: 한개의 공기방울, 방식 B: 여러개의 공기방울).

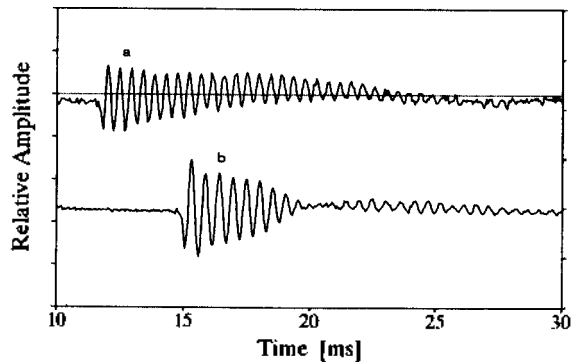
구를 물표면 가까이 위치시켜 공기방울 분출구에서 분출된 공기방울이 한 개만 형성되도록 한 조건이며, 방식 B는 일정한 깊이에서 공기방울 분출구를 위치시켜 공기방울들이 연속으로 수직으로 형성되도록 한 조건이다. 주입되는 공기의 양을 고정시킨 상태에서, 주어진 공기방울 반지름에 대해서 수면과 50 cm 깊이에서의 공기방울 반지름의 변화는 이론적으로 수면의 공기방울이 약 1.5 %의 반지름 증가 변화를 보이며, 이것은 마찬가지로 방출 공진주파수에 약 1.5 %의 주파수 감소 변화를 줄 수 있다. 이러한 변화를 고려한다면 본 측정값의 주파수비는 약 1.5 %씩 더 낮아질 것으로 생각된다. 그러나 임의성을 없애기 위해 측정값의 주파수비를 최종값으로 택하였다. 또한 각 조건에서 방출되는 공기방울 반지름변화의 영향을 없애기 위해 한개의 공기방울 분출구에서 연속으로 공기방울

을 발생시켜 측정된 주파수(방식 A)와 그 공기방울 개개의 공진주파수를 측정된 주파수(방식 B)의 비를 구하여 이론과 비교하였다.

두 경우 모두 같은 크기의 공기방울이 나오도록 깊이에 따라 유량을 일정하게 유지시켰다. 방식 A에서 수면 아래 공기방울 분출구의 깊이(h_1)는 10 mm로 유지시켰으며, 방식 B에서 h_2 는 270 mm (22 G), 340 mm (16 G)로 실험상황에 맞게 조절하였다. 수중청음기의 깊이는 150 mm, 수중청음기와 공기방울들과의 수평거리는 300 mm로 항상 고정하였다. 공기방울의 반지름, 공기방울 사이의 간격(dh)과 공기방울의 갯수는 유량이 바뀔 때마다 변하며, 이 양들은 공기방울 상승시간과 공기방울의 발생시간 간격을 측정함으로써 결정할 수 있었다. 방식 A에서는 공기방울이 1개, 방식 B에서는 공기방울이 여러개이므로 공기방울의 갯수 또는 공기방울 간격의 변화에 의한 공기방울 상호작용의 음향효과를 보고자 하였다.

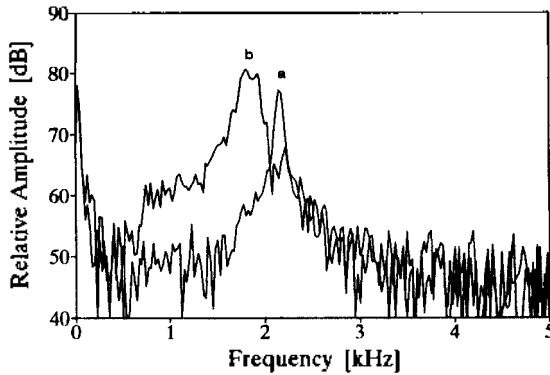
IV. 측정결과와 이론비교

같은 유량에서 평균반지름 1.6 mm인 공기방울의 고유진동 파형(a)과 연속적으로 발생될 때의 결합진동 파형(b)을 그림[6]에 나타내었다. 고유진동파형은 전형적인 한 개 공기방울의 감쇠 조화진동 파형을 보여 주고 있다. 반면에 결합진동파형은 일종의 변조된 파형으로 보이며, 파장이 늘어나 있음을 알 수 있다. 그림[7]에 그림[6]의 주파수스펙트럼을 나타내었는데, 방출 공진주파수가 저주파수쪽으로 이동된 것을



그림[6] 평균반지름 1.5 mm 인 공기방울이 한 개만 발생될 때의 고유진동파형(a)과 4개의 같은 공기방울들이 연속으로 발생될 때 공기방울의 진동파형(b).

알 수 있다. 이것은 결합진동으로 나타나는 효과로 해석될 수 있다.



그림[7] 그림 6의 경우에 대응되는 공기방울의 방출 주파수 스펙트럼.

공기방울 간격 변화에 대한 주파수비 f/f_0 를 이론값과 측정값을 비교하여 그림 [8]에 나타내었다. 표시된 측정값들(+)은 공기방울의 크기와 공기방울 사이의 간격이 각 점마다 다른 상태이므로 주파수비로 통일한 다음 편의상 공기방울 간격의 함수로 이론값(실선)과 대비하였다. 전체적으로 이론값과 측정값의 경향이 일치함을 볼 수 있다. 공기방울 사이의 간격이 좁아질수록 실험값과 이론값이 차이가 남을 볼 수 있는데, 이것은 간격이 좁을 때 주파수의 변화가 심하게 나타나므로 실험에서 그 영향으로 오차가 커질 수 있다고 생각된다. 본 논문의 이론계산에 사용된 행렬은 최대 50 x 50 행렬이었으며, 특성방정식인 (13)식을 풀어서 최대 공진주파수를 구하였다.

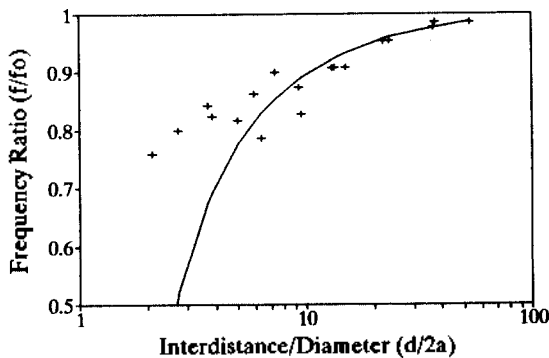


그림 [8] 공기방울의 간격 변화로 나타낸 주파수비 f/f_0 의 변화. (+ : 측정값, — : 유효 결합 조화진동 모형)

V. 맺는 말

공기방울들 사이의 상호작용으로 방출주파수가 변화함을 실험으로 측정하고, 이를 유효 결합 조화진동자로 가정하여 해석한 결과, 실험값과 좋은 일치를 보여주었다. 여기에 사용된 이론모형은 본 연구에서 제안된 여러개의 모형 중에서 물리적으로 가장 타당하다고 판단된 모형으로 기술한 것이며, 다른 여러 모형들도 가능하다. 그러나, 이론모형에서 전달 힘상수를 $k_c = (a/d)k_0$ 로 한 가정과 운동방정식의 구성에 대해 앞으로 더욱 논의되어야 할 것으로 생각된다. 나아가 유효 상호작용모형을 더욱 발전시켜 공기방울 집단의 음향특성 결과의 해석에도 적용할 예정이다.

참고문헌

1. M.Minneart, "On musical air bubbles and the sounds of running water," *Phil.Mag.*, **16**, 235-248 (1933).
2. K.W.Commander and A.Prosperetti, "Linear pressure waves in bubbly liquids: Comparison between theory and experiments" *J.Acoust.Soc.Am.* **85**(2), 732-746 (1989).
3. S.W.Yoon, L.A.Crum, A.Prosperetti and N.Q.Lu, "An investigation of the collective oscillations of a bubble cloud," *J. Acoust. Soc. Am.* **89**, 700-706 (1991).
4. C.S.Clay and H.Medwin, *Acoustical Oceanography: Principles and Applications*, 194-203, John Wiley & Sons, Inc. (1977).