

z 방향의 에너지 흐름을 위한 실린더 운동 방정식 유도

조형국, 김정국
동서 공과대학교

요약

실린더 형태의 관에서, 소음발생과 소음의 제어를 위해서는 실린더 운동 방정식이 필요하다. 지금까지 많은 음향 학자들에 의해 실린더 운동 방정식이 유도되었다. 본 논문에서는, z방향으로 에너지 흐름의 계산을 위해 실린더 벽 두께(h)사이의 임의의 점에서 z와 φ 방향의 strain과 stress를 고려하여 새로운 실린더 운동 방정식을 유도 하였다.

On Cylindrical Shell Equation for Energy Flow in z Direction

Jo Heung-Kuk and Kim Jeong-Kook
Dept. of Electronic Dong-Seo Univ.

A Cylindrical shell equation turns out to be very important in noise generating and noise controlling. Up to now several different types of cylindrical shell equation has been introduced by acoustician.

In this paper by considering z and φ directed strain and stress at an arbitray point of cylindrical wall to evaluate energy flow for z direction. We induce a new cylindrical shell equation

1. 서론

실린더 형태의 원통관은 가정의 수로 관, 화학 공장의 유체나 증기 혹은 가스를 전달하는 통로로 많이 쓰인다. 이런 이유로 많은 음향 학자들이 실린더 형태의 원통관에서 Structure-Borne Sound와 그것으로 부터 음의 발생에 대해 많은 연구가 진행되어 왔다.

실린더에서 발생하는 소음해석은 실린더 운동방정식이 필요로 한다. 지금까지 실린더 운동방정식의 유도에서는 실린더 관의 두께 h가 매우 얇다는것으로

가정하여 실린더 벽 두께의 중간선에서 변위만으로 실린더 운동 방정식을 유도 하였다. 이와 같은 가정으로 만든 실린더 운동 방정식은 실린더위에 지지대를 한경우, 임의의 자극에 의해 z방향으로 향하는 힘을 계산하는데 어려움이 발생한다. 본 논문에서는, 실린더 운동 방정식을 실린더 벽 두께사이 $h/2 \sim -h/2$ 의 임의의 점에서 z와 φ 방향의 변위에 따른 strain과 stress을 고려하여 유도 하였다.

2. Junger and Feit의 실린더

운동 방정식

그림1은 실린더 벽의 관두께가 얇고, 무한히 긴 실린더로 가정한다. 이 그림에서 z, φ 그리고 r은 실린더 좌표이고, u, v 그리고 w는 실린더 벽 두께의 중간선(h=0)에서 z, φ 그리고 r방향의 변위이다.

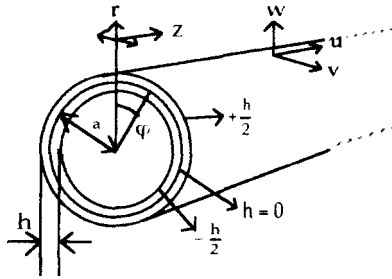


그림 1. 실린더 좌표 시스템

Fig. 1. System of coordinates for cylindrical shell(tube).

실린더 운동 방정식은 다음과 같은 과정으로 유도가 되어진다. 첫째 과정은 실린더 벽의 두께(h)의 중간선에서 각 방향의 변위를 구한다. 두번째 과정은 Taylor급수를 이용한 변위를 strain과 stress로 표현한다. 세번째 과정으로 위치에너지와 운동에너지를

실린더의 표면에 대해 적분함으로써 계산한다. 네번째 과정은 Hamilton 원리를 이용하여, 에너지로부터 실린더 운동 방정식을 유도해 낸다. 두번째 유도 과정에서 Taylor급수를 이용한 strain과 stress의 표현 방법의 실린더 운동방정식에는 오차가 발생한다. 이러한 오차에 의해 여러 형태의 실린더 운동 방정식을 유도할수 있다.

식(1), (2) 와 (3)은 Junger and Feit의 실린더 운동방정식이다. 이들 식에서 상수의 의미는 다음과 같다.

- ω : 각 속도
- μ : Poisson's ratio
- a : 실린더 반경[m]
- h : 실린더 관벽의 두께[m]
- ρ₀ : 실린더 재료의 밀도 [kg/m³]
- c₀ : 횡파의 속도[m/s]
- E : Young's Modul [N/m²]
- j : 허수 단위
- β² = h² / 12a²

Leissa[1] 가 보인 여러 종류의 실린더 운동방정식과 Junger and

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1-\mu}{2a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1+\mu}{2a} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi \partial z} + \frac{\mu}{a} \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{C_L^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{1+\mu}{2a} \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \varphi} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \frac{1}{C_L^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (2)$$

$$-\frac{\mu}{a} \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \beta^2 \left(\frac{\partial^3 v}{\partial z^2 \partial \varphi} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^3 v}{\partial \varphi^3} \right) - \frac{1}{a^2} w - \beta^2 \left(a^2 \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial z^2 \partial \varphi^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} \right) - \frac{1}{C_L^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\frac{(1-\mu^2)}{Eh} Pa \quad (3)$$

Feit의 실린더 운동방정식의 차이점은 단지 β^2 항이다. 만약 실린더 벽의 두께(h)가 매우 얇다면 β^2 을 생략할수 있으므로 Junger and Feit[2]와 Leissa [1]가 보여준 실린더 운동방정식은 거의 같게된다.

3. 새로운 실린더 운동 방정식의 유도

Junger and Feit의 실린더 운동 방정식은 실린더 벽의 두께사이($h/2 \sim -h/2$)의 임의의 점에서 변위를 고려치 않았다. 또한 Junger and Feit의 유도 과정에서는 실린더 관벽의 중간선에서 변위와 굽힘을 단지 실린더 벽의 표면에서 표현하였다. 그러나 실제로는 실린더 벽의 두께(h) 사이의 모든 임의의 점에서 변위와 굽힘이 일어난다. 이러한 점을 고려치 않는다면 반지형태의 지지대를 갖는 실린더에서 임의의 자극으로 인한 힘은 지지대를 통과하지 못할 것이다. 그림2 그리고 그림3과 같이 실린더 벽 두께(h)의 임의의 점에서 각 방향의 변위를 식(4), (5) 그리고 (6)과 같이 가정하였다.

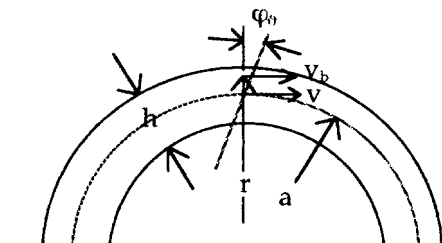


그림 2. 실린더 벽면 두께(h) 사이의 임의의 점에서 ϕ 방향의 변위 v_b .
Fig.2. ϕ directed displacement(v_b) at an arbitrary interior point cylindrical wall.

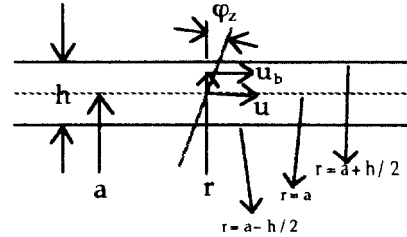


그림 3. 실린더 벽면 두께(h) 사이의 임의의 점에서 z 방향의 변위 u_b .
Fig.3.z directed displacement(u_b) at an arbitrary interior point cylindrical wall.

$$v_b = \frac{r}{a}v + (r-a)\phi_b \quad (4)$$

$$u_b = u + (r-a)\phi_z \quad (5)$$

$$w_b = w \quad (6)$$

u_b, v_b 그리고 w_b 는 실린더 벽 두께(h) 사이의 임의의 점에서 각 방향의 변위이다. 구한 변위를 이용하여 실린더 운동방정식을 유도하려면, 탄성연속체의 일반장공식[3]에 대입하고, 실린더의 벽의 표면에서 strain의 자유도를 고려하면 다음과 같은 normal strain과 transverse shear strain을 구할수 있다.

$$\epsilon_r = \frac{1}{a} \left(1 - \frac{x}{a}\right) w + \frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial \phi} + \frac{x}{a} \frac{\partial \phi_b}{\partial \phi} \quad (7)$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial u}{\partial z} + x \frac{\partial \phi_z}{\partial z} \quad (8)$$

$$\epsilon_\theta = \left(1 - \frac{x}{a}\right) \phi_b + \frac{1}{a} \left(1 - \frac{x}{a}\right) \frac{\partial w}{\partial \phi} \quad (9)$$

$$\epsilon_{rz} = \phi_z + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (10)$$

$$\epsilon_{z\phi} = \left(1 + \frac{x}{a}\right) \frac{\partial v}{\partial z} + x \frac{\partial \phi_b}{\partial z} + \frac{1}{a} \left(1 - \frac{x}{a}\right) \frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{x}{a} \frac{\partial \phi_b}{\partial \phi} \quad (11)$$

여기서 r, a 와 x의 관계는 식(12)와 같다.

z 방향의 에너지 흐름을 위한 실린더 운동 방정식 유도

$$r-a = x, \frac{1}{r} = \frac{1}{a+x} = \frac{1}{a} \left(1 - \frac{x}{a}\right), \frac{a}{r} = \left(1 - \frac{x}{a}\right), \frac{r-a}{r} = \frac{x}{a} \quad (12)$$

또한 normal stress와 transverse shear stress은 다음과 같이 구할수 있다.

$$\sigma_{\varphi} = \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_{\varphi} + \mu \epsilon_z) \quad (13)$$

$$\sigma_z = \frac{E}{1-\mu^2} (\mu \epsilon_{\varphi} + \epsilon_z) \quad (14)$$

$$\sigma_{rz} = G \epsilon_{rz} \quad (15)$$

$$\sigma_{r\varphi} = G \epsilon_{r\varphi} \quad (16)$$

$$\sigma_{\varphi z} = G \epsilon_{\varphi z} \quad (17)$$

여기서 $C = E/2(1+\mu)$ 이다.

실린더에서 위치에너지와 운동에너지를 구하기 위해 stress와 strain을 이용한. Hamilton원리를 식(20)에 보인다. 위치 에너지와 운동 에너지를 식(20)에 대입하면 실린더 운동방정식을 구할 수있다. 식(21), (22) 그리고 (23)이 새로이 유도된 실린더운동 방정식이다. 여기서 (·)은 시간에 대해 두번 미분한것을 의미한다. Pa는 외부에 가한 힘이다. 식(21), (22) 그리고 (23)과 Junger and Feit의 (1), (2) 그리고 (3)식은 차는 β^2 항이다. 만약 실린더 벽 두께 (h)가 매우 작다면 두 운

$$E_{pot} = \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{\varphi} \epsilon_{\varphi} + \sigma_z \epsilon_z + \sigma_{r\varphi} \epsilon_{r\varphi} + \sigma_{rz} \epsilon_{rz} + \sigma_{\varphi z} \epsilon_{\varphi z}) dr \quad (18)$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \rho_w \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\dot{u}_b^2 + \dot{v}_b^2 + \dot{w}_b^2) dx \quad (19)$$

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (E_{kin} - E_{pot}) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta E_s dt = 0 \quad (20)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{1+\beta^2}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \left(\frac{1+\mu}{2} - \beta^2 \frac{1-\mu}{2} \right) \frac{1}{a} \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial \varphi} + \frac{\mu}{a} \frac{\partial w}{\partial z} + (1-\mu) \frac{\beta^2}{a} \frac{\partial^3 w}{\partial z \partial \varphi^2} - \frac{1}{C_t^2} \ddot{u} = 0 \quad (21)$$

$$\left(\frac{1+\mu}{2} - \beta^2 \frac{1-\mu}{2} \right) \frac{1}{a} \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \varphi} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{1-\mu}{2} (1+\beta^2) \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} - (1-\mu) \beta^2 \frac{\partial^3 w}{\partial z^2 \partial \varphi} - \frac{1}{C_t^2} \left[(1+\beta^2) \ddot{v} - \beta^2 \frac{\partial \ddot{w}}{\partial \varphi} \right] = 0 \quad (22)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\mu}{a} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{(1-\mu)}{a} \beta^2 \frac{\partial^3 u}{\partial z \partial \varphi^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - (1-\mu) \beta^2 \frac{\partial^3 v}{\partial z^2 \partial \varphi} + \frac{1+\beta^2}{a^2} w \\ & + \frac{\beta^2}{a^2} \left[\frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} + 2a^2 \frac{\partial^4 w}{\partial z^2 \partial \varphi^2} + a^4 \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} \right] + 2\beta^2 \left[\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] \\ & + \frac{1}{C_L^2} \left[\ddot{w} - \beta^2 \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial \varphi^2} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^2 \ddot{w}}{\partial z^2} + \beta^2 \frac{\partial \dot{v}}{\partial \varphi} \right] = \frac{(1-\mu^2)}{Eh} P_s \end{aligned} \quad (23)$$

동방정식은 거의 같게 된다.

한 제어를 할수 있다.

4. 결론

실린더 벽이 얇고, 무한히 길다고 가정 하였을때, 일반적으로 실린더 벽 두께를 면으로 취급하여, 실린더 벽의 중간선에서 일어나는 strain과 stress를 이용하여 실린더 운동 방정식을 유도하였다.

이러한 방법으로 유도된 실린더 운동방정식은 실린더의 벽면에서 z방향으로 흐르는 힘을 계산하는데는 어려움이 발생한다. 본 연구에서 유도된 실린더 방정식은 그러한 문제점을 해결키 위하여 벽두께 사이의 모든 임의의 점에서 일어나는 strain과 stress를 고려하여 실린더 운동 방정식을 유도하였다. 유도된 실린더 운동 방정식으로, 두께가 얇은 실린더 벽면에 지지대를 한 경우에도 쉽게 z방향으로 향하는 힘을 구할수 있다. Junger and Feit의 식과 비교하여 볼때 실린더 벽 두께가 커질수록 현저한 차이를 보이고 있으며, 두께가 매우 얇다면 두식은 거의 같게 된다. 유도된 식을 실린더 형태의 관에서 일어나는 소음제어(능동 소음 제어)를 할때 이용하면 보다 정확

참 고 문 헌

- [1] Leissa, A. N., "Vibration of Shells," NASA, SP-288.
- [2] Junger M.C. and Feit D., "Sound, Structures, and Their Interaction," 2th edition, pp. 231-253.
- [3] Cremer M. and Heckl M. Ungar E.E., "Structur-Borne Sound," Springer Verlag Berlin 1988.
- [4] G. Pavić, "The Influence of Curvature on Structure-Borne Acustical Power Propagation in a Cylindrical Circular Shell." ICA, vol.12, D6-6, TORONTO.