

관마찰계수 산정을 위한 Moody 도표와 최근의 공식들과의 비교연구

A Comparative Study on the Moody Diagram and Recent Formula
for the Evaluation of Friction Factor

조 원 철 * 이 종 설 ** 박 환 철 ***

Cho, Won Cheol Lee, Jong Seol Park, Hwan Cheol

1. 서론

관내의 흐름해석을 위해서는 관내의 마찰손실을 산정해야 하는데, 이 때 사용하는 마찰계수를 산정하기 위해 여러 가지 공식들이 제시되어 왔다. 그러나, 이들 공식은 Re 수에 따라 범위가 한정되어 있을 뿐만 아니라 시산과정을 통하여 그 해를 구해야 하는 음해적 형태의 식들이다. 1944년 L. F. Moody는 상업용관 실험을 통해 층류, 천이류, 난류영역의 모든 범위에서 이용가능하며, 실용적인 Moody도표를 제시하였다. 이 Moody도표는 현재까지도 상업용관의 마찰계수 산정을 위해 널리 이용되고 있고 그 오차도 상당히 적으나, Re 수와 상대조도값을 직접 도표에서 읽어야 하는 불편함이 있기 때문에 Moody도표를 수식으로 표현하고자 하는 많은 연구들이 진행되어 왔다.

따라서, 본 논문에서는 기존에 발표된 마찰계수공식과 최근 제안된 공식들을 소개하고, Moody 도표를 사용하지 않고도 정확한 마찰계수값을 구할 수 있는 음해적 형태의 Colebrook-White식, 최근 발표된 양해적 형태의 Chen식, Churchill식의 특징과 이 공식들을 이용해 산정한 값들을 기존의 Moody도표에 의해 구한 값과 비교하여 그 실용성을 검증해 보고자 한다.

* 정회원, 연세대학교 토목공학과 부교수

** 정회원, 연세대학교 대학원 토목공학과 박사과정

*** 정회원, 연세대학교 대학원 토목공학과 석사과정

2. 기존의 마찰계수 산정공식

(1) Mises공식

독일인 Mises는 λ 의 값을 Re 수와 ε/d 의 함수로 생각하여 1941년경 다음 식을 발표했다.

$$\lambda = 0.0096 + \frac{4}{\sqrt{\frac{\varepsilon}{d}}} + 1.7 \frac{1}{\sqrt{Re}} \quad (1)$$

(2) Blasius공식

Blasius는 매끈한 관내의 난류 즉, Re 수가 3,000과 100,000사이의 영역에서 실험하여 다음과 같은 실험식을 얻었다.

$$\lambda = \frac{0.316}{\sqrt[4]{Re}} \quad (2)$$

(3) Von Karman공식

Von Karman은 파이프에서 $Re > 6\varepsilon$ 이면 점성저층이 ε 의 영향을 받게 된다는 것을 알아냈고, Nikuradse의 실험자료로부터 매끈한 관($Re < 6\varepsilon$)에 대해서 다음과 같은 식을 제시했다.

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log Re \sqrt{\lambda} - 0.8 \quad (3)$$

$Re < 0.3\varepsilon$ 인 경우 파이프는 완전히 거친 파이프(wholly rough pipe)와 같이 거동하며 마찰계수가 Re 수와는 무관하다는 것을 발견하고 거친관 ($Re < 0.3\varepsilon$)에 대해서는 다음과 같은식을 제시했다.

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log \frac{d}{\varepsilon} + 1.14 \quad (4)$$

(4) Colebrook공식

Colebrook는 Von Karman이 고려하지 않은 천이영역 ($6\varepsilon > Re > 0.3\varepsilon$)에서 다음과 같은 관계가 성립한다는 것을 발견했다.

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left[\frac{\varepsilon/d}{3.7} + \frac{2.51}{Re \sqrt{\lambda}} \right] \quad (5)$$

(5) Nikuradse 실험

Nikuradse는 거친 관에서 상 '조도(ϵ/d)가 마찰계수에 미치는 영향을 실험하여, 각 조도에 대한 마찰계수와 Re 수와의 관계를 도출하였다. Nikuradse는 실험을 통해, 매끈한 관인 경우 마찰계수 λ 는 Re 수만의 함수이며, 거친 관인 경우 λ 는 상대조도 ϵ/d 의 크기에 따라 결정된다는 사실을 발견했다. Nikuradse의 실험 결과는 아주 균일한 조도를 갖는 관을 사용하였기 때문에 실용관의 경우와는 차이가 나므로 Nikuradse도표는 실용관에는 적용하기가 어렵다.

(6) Moody 도표

Lewis F. Moody는 상업용관을 구입하여 실험한 결과를 도표화하였다. 실험 결과에서 표면조도는 관내의 흐름에 큰 영향을 미치고 있는 것으로 나타났으며 거친 경계의 유동역에서는 조도의 간격 역시 마찰 손실에 아주 중요한 요인으로 나타났다. 여러 가지 요인을 통합하여 볼 때, Moody 선도가 가장 실용적임을 알 수 있다. 또한 Moody는 다음과 같은 실험식을 제시하였다.

$$\lambda = 0.0055 \left\{ 1 + \left(20,000 \frac{\epsilon}{d} + \frac{10^6}{Re} \right)^{1/3} \right\} \quad (6)$$

이 식은 양해적 형태의 공식이긴 하지만 이 식의 해 자체는 완전한 근사값이 아니며 단지 음해적 식인 식 (7)의 첫번째 근사값을 구하는 데에 사용한다.

(7) Colebrook-White 공식

Colebrook와 White는 실험을 통해 대부분의 상업용관내 난류의 마찰계수는 식 (3)와 식 (4)로 표시되는 매끈한 관과 거친 관에 대한 관계를 따르지 않고 이들 두 직선에 연속하는 한 개의 곡선적인 관계로 표시될 수 있음을 증명했다.

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1.14 - 2 \log \left\{ \frac{k}{D} + \frac{9.35}{Re\sqrt{\lambda}} \right\} \quad (7)$$

이 공식은 상업용관내 난류 및 천이류의 마찰손실계수를 표시하는 단일식이지만 실제 문제에 적용하기가 대단히 불편하다. 음함수의 꼴로 표현되어 있으므로 시산과정을 통하여 얻어지며 본 연구에서는 Newton-Raphson 반복계산법을 사용하여 구하였다.

(8) Chen 공식

난류 및 천이류 영역에서 Re 수의 범위에 관계없이 어느 범위에서나 사용 가능하며 Colebrook-White 공식의 음해적인 불편을 제거한 양해적인 공식이며 Re 수와 상대조도값을 대입하여 구한다.

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2.0 \log \left\{ \frac{\varepsilon}{3.7065D} - \frac{5.0452}{Re} \right. \\ \left. \times \left[\log \frac{1}{2.8257} \left(\frac{\varepsilon}{D} \right) + \frac{5.8506}{Re^{0.8981}} \right] \right\} \quad (8)$$

(9) Churchill 공식

이 공식은 Chen 공식과 마찬가지로 양해적인 식이며 층류 범위에서 적용되지 못 하는 Chen 공식의 단점까지 보완하여 층류, 천이류와 난류영역 모두에서 Re 수 범위에 제한받지 않고 모든 영역에 대해 사용가능한 가장 최근에 발표된 공식이다.

$$\lambda = 8 \left\{ \left(\frac{8}{Re} \right)^{12} + \frac{1}{(B + C)^{1.5}} \right\}^{1/12} \quad (9)$$

$$B = \left[2.457 \ln \frac{1}{(7/Re)^{0.9} + (0.27\varepsilon/d)} \right]^{16}$$

$$C = \left[\frac{37530}{Re} \right]^{16}$$

3. 비교 고찰

음해적 형태인 Colebrook-White 식에 의한 마찰계수 산정은 Newton-Raphson 반복법을 사용하였으며, 반복 계산을 위한 초기값으로 양해적 형태의 Moody 실험식에서 산정된 마찰계수 값을 취하였다. 또한, 직접해가 가능한 양해적 형태의 Chen 식, Churchill 식에 의해 계산된 마찰계수 값과 위의 Colebrook-White 식에 의해 산정된 마찰계수 값을 Moody 도표에 상대조도와 Re 수를 대입하여 구한 마찰계수 값과 비교한 결과는 표 1과 그림 1~5와 같다.

표 1. 상대조도에 따른 마찰계수값

상대조도 (ϵ/D)	Re수	Moody 도 표	음해적 공식	양해적 공식	
			Colebrook 공 식	Chen 공 식	Churchill 공 식
0.006	3x10 ⁶	0.032	0.032144	0.032128	0.032151
	4x10 ⁵	0.032	0.032329	0.032322	0.032419
	4x10 ⁴	0.034	0.034105	0.034154	0.034508
	2x10 ⁴	0.036	0.035837	0.035911	0.036396
	1x10 ⁴	0.039	0.038803	0.038888	0.039572
	6x10 ³	0.042	0.042111	0.042177	0.043121
	2x10 ³	0.032	0.053918	0.053747	0.032043
0.002	3x10 ⁶	0.023	0.023483	0.023476	0.023507
	4x10 ⁵	0.024	0.023878	0.023891	0.023996
	4x10 ⁴	0.027	0.027131	0.027212	0.027411
	2x10 ⁴	0.030	0.029788	0.029876	0.030116
	1x10 ⁴	0.034	0.033793	0.033862	0.034243
	6x10 ³	0.039	0.037847	0.037873	0.038503
	2x10 ³	0.032	0.050968	0.050710	0.032040
0.0008	3x10 ⁶	0.018	0.018734	0.018734	0.018774
	4x10 ⁵	0.019	0.019473	0.019505	0.019597
	4x10 ⁴	0.024	0.024286	0.024362	0.024416
	2x10 ⁴	0.028	0.027552	0.027619	0.027705
	1x10 ⁴	0.033	0.032089	0.032124	0.032365
	6x10 ³	0.036	0.036460	0.036448	0.036956
	2x10 ³	0.032	0.050061	0.049766	0.032043
0.0001	3x10 ⁶	0.012	0.012555	0.012578	0.012626
	4x10 ⁵	0.015	0.014836	0.014879	0.014865
	4x10 ⁴	0.022	0.022285	0.022318	0.022220
	2x10 ⁴	0.026	0.026101	0.026120	0.026080
	1x10 ⁴	0.031	0.031037	0.031029	0.031178
	6x10 ³	0.035	0.035624	0.035570	0.036008
	2x10 ³	0.032	0.049527	0.049190	0.032040
0.00001	3x10 ⁶	0.010	0.010167	0.010186	0.010203
	4x10 ⁵	0.013	0.013832	0.013848	0.013777
	4x10 ⁴	0.021	0.022001	0.022020	0.021898
	2x10 ⁴	0.025	0.025904	0.025910	0.025860
	1x10 ⁴	0.030	0.030898	0.030881	0.031020
	6x10 ³	0.035	0.035514	0.035450	0.035880
	2x10 ³	0.032	0.049458	0.049119	0.032043

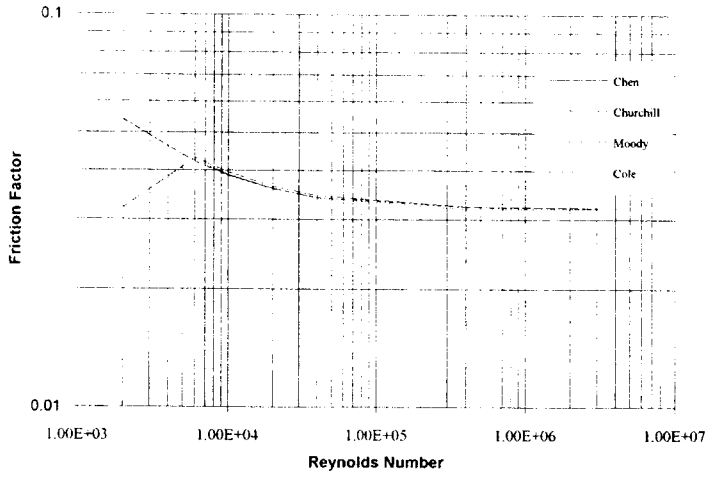


그림 1. 마찰계수 값의 비교(상대조도 0.006 인 경우)

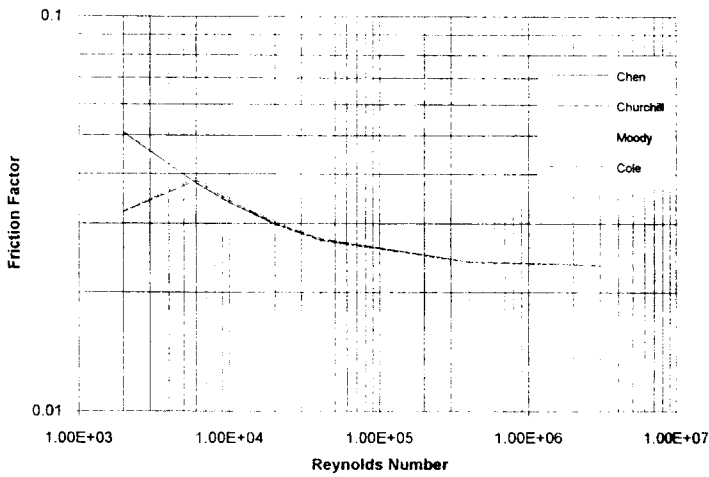


그림 2. 마찰계수 값의 비교(상대조도 0.002 인 경우)

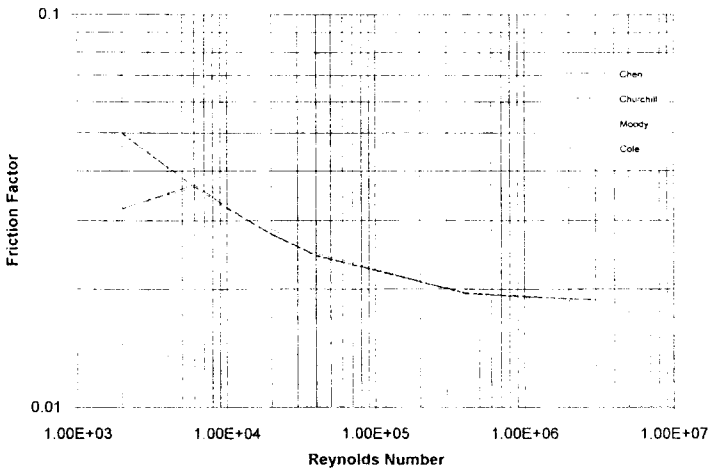


그림 3. 마찰계수 값의 비교(상대조도 0.0008 인 경우)

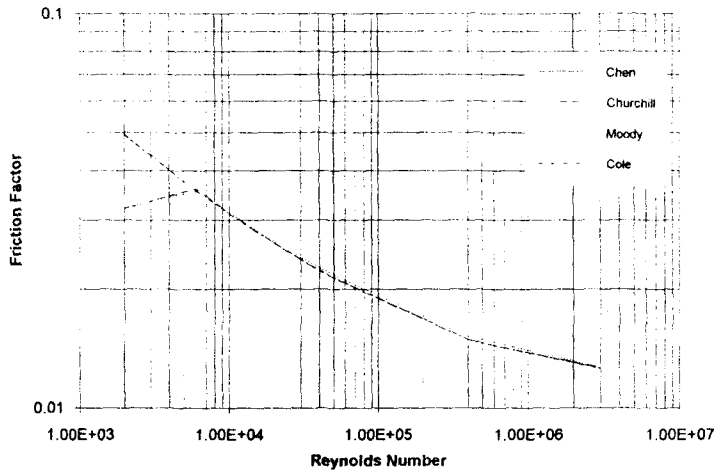


그림 4. 마찰계수 값의 비교(상대조도 0.0001 인 경우)

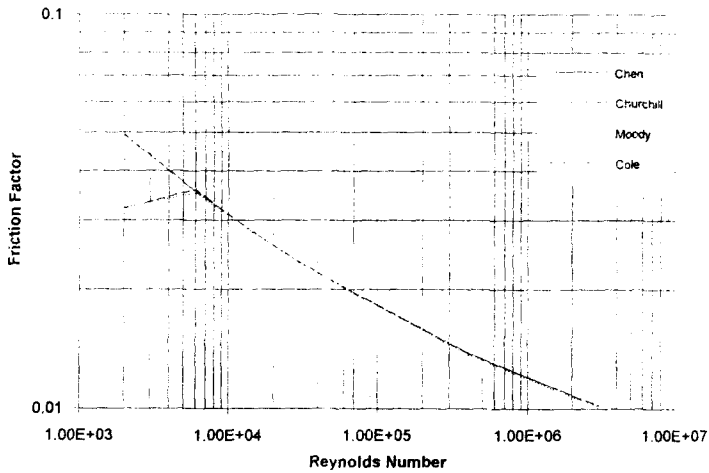


그림 5. 마찰계수 값의 비교(상대조도 0.00001 인 경우)

표 1 과 그림 1~5 에서 보는 바와 같이 각 공식과 Moody 도표를 이용한 값들을 비교해보면 Re 수가 2,000 이상인 천이류와 난류범위에 대해서는 모든 값들이 아주 근소한 차이만을 보이고 있어 실질적으로 직접적인 사용이 가능함을 보이고 있다. 다만 Re 수가 2,000 이하인 층류영역에서는 Churchill 공식만이 사용 가능함을 확인할 수 있었다.

4. 결론

본 연구는 관수로 흐름의 마찰계수 산정을 위한 Moody도표의 사용과 이를 대신할 수 있는 음해적, 양해적 공식들을 사용하여 마찰계수값을 산정한 것으로서

그 결과를 요약하면 다음과 같다.

1. 대부분의 공학적인 문제에서 층류와 천이류 영역의 마찰계수 값은 크게 중요하지 않으므로 난류영역에서 상대조도에 대한 정확한 마찰계수 값을 산출하는 최근의 공식들은 Moody 도표의 다소 불편한 점을 충분히 보완할 수 있었다.
2. 공식의 적용에 있어서 음해적 공식인 Colebrook-White 식은 시산과정을 포함해야 하는 반면, 양해적 공식인 Chen식이나 Churchill식은 직접 해법이 가능하므로 마찰계수의 산정이 편리하고 계산속도면에서도 경제적이며 정확도에서도 거의 차이가 없는 것으로 나타났다.
3. Moody 도표는 층류, 천이류와 난류영역 모두를 포괄하는 도표인 만큼 이를 대신하기 위한 공식으로는 모든 영역에서 정확한 값을 가지는 Churchill 공식이 가장 적당한 것으로 확인되었다.

5. 참고문헌

1. 이원환., 수리학, 문운당, pp. 78-82, 1991.
2. 노병준., 이종순., 표준 유체역학, 동명사, pp. 251-261, 1987.
3. David Stephenson., Pipeflow Analysis, Elsevier, pp. 3-10, 1984.
4. Janar., Introduction to Fluid Mechanics, 2th Edition, PWS Publishers, pp. 185-221,
5. Rebert L. Daugherty., Joseph B. Franzini., and E. John Finnemore., Fluid Mechanics with Engineering Applications 8th Edition, Mcgraw-Hill, pp. 223-228, 1985.