

# 비선형 계획법을 이용한 Muskingum 하도 홍수추적 기법의 연구

윤 용남\*   김 중훈\*   강 인주\*\*

## 1. 서론

자연하도에서 홍수추적의 목적은 홍수파가 하류방향으로 진행함에 따라 그 크기의 시간적 변화를 추정하여 하천개수 계획을 수립하고자 할때 각종 수공구조물의 기준수문량을 얻기 위함이며 추적기법은 크게 수리학적 홍수추적기법과 수문학적 홍수추적기법으로 대별된다.

수문학적 하도 홍수추적기법의 하나인 Muskingum방법은 McCarthy가 제안한 이래 고전적 방법인 Wilson의 시행착오 도시법(trial and error graphical method), 선형회귀분석(linear regression analysis)기법인 Gill의 최소자승법(least square method), Matrix 기법을 이용한 O'Donnel의 3-parameter matrix법 및 Stephenson의 선형계획(linear programming)기법을 이용하여 direct optimization으로 해를 구할 수 있는 방법 등이 있다. 이들 방법 중 시행착오 도시법과 최소 자승법은 저류상수(storage constant) K와 가중계수(weighting factor)  $x$ 를 구한 후 추적계수  $C_i$ 를 구하나 3-parameter matrix법과 direct optimization방법은 직접적으로  $C_i$ 를 구할 수 있다.

본 연구에서는 위에서 소개한 각 방법들을 간단히 소개한 다음 비선형계획법(nonlinear programming)의 적용을 위한 수식(formulation)을 유도하고 실 유역에 적용하여 실측치와 계산치를 침투 홍수량과 RMS값 등으로 다른 방법들과 비교하여 보았다. 적용대상의 수계는 낙동강유역으로 하였으며 적용구간은 倭館에서 赤浦橋까지로 하였다.

---

\* 고려대학교 공과대학 토목환경공학과 교수

\*\* 고려대학교 공과대학 토목환경공학과 박사과정

## 2 Muskingum방정식의 발전

홍수추적 기본방정식은

$$I - O = \frac{dS}{dt} \quad (1)$$

I는 유입량, O는 유출량이며, 하도홍수 추적의 Muskingum방정식은

$$\begin{aligned} S &= K O + K x (I - O) \\ &= K [ x I + (1 - x) O ] \end{aligned} \quad (2)$$

여기서 K는 시간차원을 가지는 저류상수(storage constant)이고 x는 가중계수(weighting factor)이며 S는 저류량(storage)이다. x값은 0에서 0.5까지 변하는 하도특성 계수로써 저수지의 경우 저류량에 대한 유입량은 무시 할 수 있으므로 x = 0이 되어 S = KO 가 되며 자연하천에서 등류인 경우 유입량과 유출량이 저류량에 미치는 효과가 같으므로 x = 0.5가 된다. K값은 홍수파의 질량 중심(mass center)이 구간의 상류단에서 하류단까지 통과하는 시간으로 정의된다. 추적구간에 대한 유출기록이 없는 경우, K값은 추적구간에서 홍수파가 통과하는 시간을 사용하며 x값은 보통 평균치 0.25를 사용한다.

식 (1), (2)에서 임의 추적구간에 대하여 다시 쓰면

$$1/2 [ (I_1 + I_2) - (O_1 + O_2) ] = \Delta s / \Delta t = (S_2 - S_1) / \Delta t \quad (3)$$

시간간격  $\Delta t$ 인 유한차분 방정식은

$$O_{j+1} = C_1 I_j + C_2 I_{j+1} + C_3 O_j \quad (4)$$

여기서 계수  $C_i$ 는

$$C_1 = \frac{\Delta t + 2 K x}{\Delta t + 2K(1-x)} \quad (5)$$

$$C_2 = \frac{\Delta t - 2 K x}{\Delta t + 2K(1-x)} \quad (6)$$

$$C_3 = \frac{-\Delta t + 2K(1-x)}{\Delta t + 2K(1-x)} \quad (7)$$

$$C_1 + C_2 + C_3 = 1 \quad (8)$$

또한 식 (5), (6), (7)에서 x와 K에 대하여 풀면

$$x = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{C_2 + C_1 C_3}{C_1 + C_2 C_3} \right] \quad (9)$$

$$K = \Delta t \frac{C_1 + C_2 C_3}{(1-C_3)(C_1+C_2)} \quad (10)$$

홍수추적의 전개시 최초의 outflow 값을 최초의 inflow값과 같이 놓고 식 (4)에 의하여 연속적으로 추적한다.

### 3. Mukskingum 홍수추적 계수 결정방법

#### 1) 시행착오 도시법(trial and error graphical method)

시행착오 도시법은 Wilson에 의하여 정립되었으며 변수 결정 방법은 기왕의 자료로부터 식 (2)의 저류량 S와  $[xI + (1-x)O]$ 에서 x값을 0.0 에서 0.5 까지 변화시키면서 그림1과 같이 도시하였을때 가장 직선에 가까운 loop의 x값을 채택하며, K값은 채택된 loop를 지나 그은 직선의 경사를 측정하여 구한다.

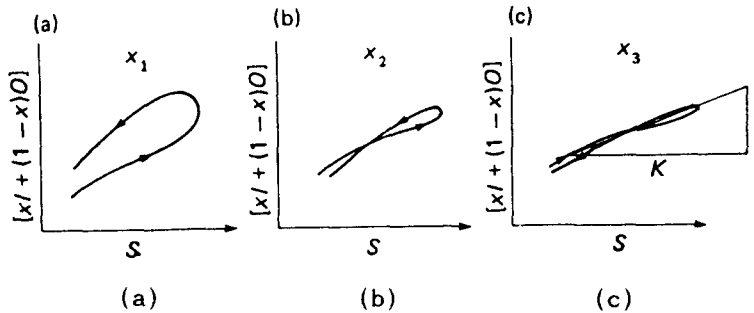


그림 1 시행착오 도시법에 의한 x 및 K의 결정

#### 2) 최소 자승법(least squares method)

Gill은 지루한 시행착오 도시법을 피하고 선형 회귀분석(linear regression analysis) 중에서 최소 자승법으로 x와 K값을 구하였다.

식 (2)에서  $Kx = A$ ,  $K(1-x) = B$  라 두면

$$S = K [ xI + (1-x)O ] + \sigma \quad (11)$$

$$= AI + BO + \sigma$$

여기서, S는 상대저류량이고  $\sigma$ 는 절대저류량과 상대저류량의 차이이다.

따라서 종속변수 S와 2 개의 독립변수 I, O에 대하여 중선형회귀분석(multiple linear regression analysis)에 의하여 최소자승법으로 표준방정식을 구하면

$$\begin{aligned} \sum S - A \sum I - B \sum O - N \sigma &= 0 \\ \sum SI - \sum I^2 - B \sum IO - \sigma \sum I &= 0 \\ \sum OS - A \sum IO - B \sum O^2 - \sigma \sum O &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

식 (12)에서 A와 B를 푼 후  $x/(1-x) = A/B$ ,  $K = A + B$ 에서 x와 K를 구한다.

#### 3) 3-parameter matrix 방법

위에서 설명한 두 방법은 x와 K값이 결정된 후 간접적인 접근 방법으로 계수 Ci값이

결정되므로 근사해가 구해 지는 단점이 있다. O'Donnell은 이러한 단점을 보완하여 계수  $C_i$  값이 직접계산 가능하고 측방 유입인자  $u$ 를 추가한 3 변수모형을 제안하였다. 계수  $C_i$  값 산출은 기왕의 유입 및 유출 홍수자료를 이용하여 선형대수(linear algebra)에서 동차연립 방정식 해를 구하는 Cramer법칙인 Matrix 기법을 이용하면 식 (4)는

$$| O_{j+1} | = | I_j \quad I_{j+1} \quad 0_j | * | C_i | \quad (13)$$

$n$  열 3 행 ( $n \times 3$ )인 장방행렬(rectangular matrix)이다.

$| I_j \quad I_{j+1} \quad 0_j | = | P |$ 라 두고 전치(transpose)시켜 양변에 곱하면

$$| P |^T | O_{j+1} | = | P |^T | P | * | C_i | \quad (14)$$

$| Q | = | P |^T | O_{j+1} |$ ,  $| R | = | P |^T | P |$ 라 두면

$| R |$ 은  $3 \times 3$  정방행렬(square matrix)이 되며

$$| C_i | = | R |^{-1} * | Q | \quad (15)$$

식 (15)에 의하여 계수  $C_i$ 가 결정되며 식 (14)는 전치시켜 양변에 곱하므로 최소 자승효과(least square sense)를 얻을 수 있으므로  $\sum (0-0)^2_{j+1}$ 의 값을 최소로 할 수 있다.

#### 4) direct optimization방법

첫번째 방법은 선형 계획(linear programming)기법을 이용하여 계수  $C_i$  값이 직접 최적화(direct optimization)가 가능한 방법으로 Stephenson에 의하여 제안 되었으며 결정변수(decision variables)  $C_1$ 과  $C_3$ 를 구한 후 간접적으로  $C_2$ 를 구하였다. 즉,

$$C_1(I_{j+1} - I_j) + C_3(I_{j+1} - 0_j) = I_{j+1} - 0_{j+1} \quad (16)$$

식 (16)은 식 (4)에 식 (8)을 대입하여 변형시킨 식이다.

그러나 본 연구에서는 결정변수  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ 를 모두 직접적으로 최적화시켰으며 수식 (formulation)은 다음과 같이 유도될 수 있다.

목적함수(objective function)는

$$\text{Minimize } \sum_{j=1}^n ( U_j + ( - V_j ) ) \quad (17)$$

Subject to :

$$C_1 I_j + C_2 I_{j+1} + C_3 0_j + ( U_j - V_j ) = 0_{j+1} \quad (18)$$

$$C_1 + C_2 + C_3 = 1 \quad (8)$$

여기서  $U_j$ 와  $V_j$ 는 각 시간 step의 오차항으로  $U_j$ 는 양의 변수(positive variables)이고  $V_j$ 는 음의 변수(negative variables)이며 식 (4)에 1와 0의 실측 자료 set를 대입하여  $j = 1, 2, \dots, n$ 까지 전 방정식을 만족시키려면 각 시간 step에서 식의 우변에 양(+) 또는 음(-)의 오차항이 생긴다. 목적함수는 오차항의 합 즉,  $U_j$ 와 절대값  $V_j$ 의 합의 최소화이다.

두번째 방법인 비선형계획법(nonlinear programming)의 수식(formulation)은 다음과 같이 유도될 수 있다.

목적함수는

$$\text{Minimize } \sum_{j=1}^n (E_j^2) \quad (19)$$

Subject to :

$$C_1 I_j + C_2 I_{j+1} + C_3 O_j + (E_j^2)^{0.5} = O_{j+1} \quad (20)$$

$$C_1 + C_2 + C_3 = 1 \quad (8)$$

여기서  $E_j$ 는 각 시간 step에서의 실측값과 계산값의 오차항이다.

위에서 소개한 LP와 NLP는 GAMS(General Algebraic Modeling System) package를 이용하여 풀 수 있었다. NLP로 해를 구할 경우, 결정변수(decision variables)  $C_i$ 에 대한 초기해(initial solution)를 여러번 변화시키므로써 좀 더 나은 국지 최적해(local optimum)를 구하려 하였다.

#### 4. 실 유역적용

##### 1) 적용의 하천 특성

적용하천의 선정은 낙동강 유역으로 상류단은 倭館으로 하류단은 赤浦橋로 하였다. 상류단인 倭館은 유역면적이 11,074.4 Km<sup>2</sup> 으로 전체 유역 23,589Km<sup>2</sup>의 46.8 %를 차지하며, 평균 하상경사는 1/2540, 하폭은 410m 이다. 赤浦橋는 유역면적 16,449.6Km<sup>2</sup>, 평균 하상경사는 1/2500 하폭은 550m 이다. 두 지점간 거리는 약 72.2 km 이고 유역면적은 5,375.2Km<sup>2</sup> 이며 낙동강 중 하류부에 위치하여 비교적 완만한 경사로 형성되어 있다.

##### 2) 적합도 검정(goodness-of-fit test)

홍수추적 결과에 대한 적합도 검정은 RMS 편차(root-mean-square deviation)와 R<sup>2</sup>값에 의하였다.

$$\text{RMS} = \frac{1}{n} \sqrt{\sum_{i=1}^n (\hat{O}_i - O_i)^2} \quad (21)$$

$$\text{VAR} = \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (O_i - O_{\text{mean}})^2}{n} \quad (22)$$

$$R^2 = 1 - \frac{(\text{RMS})^2}{\text{VAR}} \quad (23)$$

여기서,  $\hat{O}_i$ 는 계산된 유출량(outflow)이고  $O_i$ 와  $O_{\text{mean}}$ 은 관측된 유출량 및 평균값이며 VAR은 산술평균값 주위의 분산 (variance about their arithmetic mean) 이다.

### 3) 실 유역적용

본 연구에 적용된 홍수사상의 유입 및 유출 수문곡선은 그림 2와 같다. 적용된 홍수사상 84년 9월3일에서 9월 7일이며 시간간격이 6시간인 동일 동시간별 홍수유출 수문 자료를 사용하였다. 유입 및 유출 수문곡선의 첨두 홍수량은 상류단인 倭館은  $9,998 \text{ m}^3/\text{sec}$  이고 하류단인 赤浦橋는  $7,854 \text{ m}^3/\text{sec}$  이며, 홍수 지체시간(lag time)은 유입 수문곡선과 유출 수문곡선 첨두홍수량의 시간 간격으로 정의하여 20시간이다.

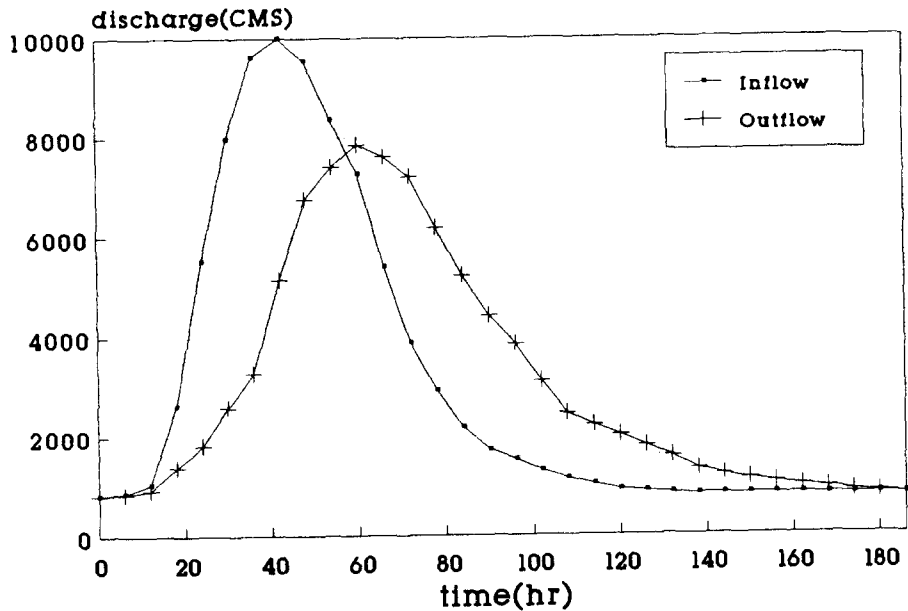


그림 2 적용 홍수사상

각 방법에 의한 계산 결과는 표 1 및 그림 3과 같다.

계산결과를 실측치와 비교하여 보면, 첨두 홍수량은 GAMS를 이용하여 NLP로 풀 값이 가장 실측치에 가깝으며 RMS와 R<sup>2</sup>값은 각 방법들의 계산값이 비슷하나 Gil1의 최소 자승법 (least squares method)이 상대적으로 우수한 값을 보여주고있다. 저류상수 K값은 NLP로 풀 값이 홍수 지체시간 20시간과 비슷하였으며, 가중계수 x값은 본 연구에 적용된 대하천의 중·하류에서는 하천의 저류효과가 커서 평균값 0.25보다 작은 0.10에서 0.15까지의 값을 보여 주고 있다.

표 1. 유출수문곡선에 대한 각 방법의 비교

구 분	실측치	계 산 치				
		Wilson	Gill	O'Donnel	LP(GAMS)	NLP(GAMS)
지체시간 Q <sub>p</sub> (CMS)	20.0 7854.0	7676.1	7689.9	7602.0	7682.4	7855.2
C <sub>1</sub>		0.286	0.282	0.284	0.233	0.270
C <sub>2</sub>		-0.020	-0.016	-0.023	0.035	0.015
C <sub>3</sub>		0.735	0.733	0.739	0.732	0.715
K(hr)		23.08	22.85	23.50	21.60	20.74
x		0.1500	0.1467	0.1507	0.1026	0.1294
RMS(CMS)		194.4	193.3	200.5	223.5	251.2
R <sup>2</sup>		0.993	0.993	0.993	0.991	0.989
적 용 기 법		시행착오 도시법	최소자승	3 변수 Matrix	직접 최적화	직접 최적화

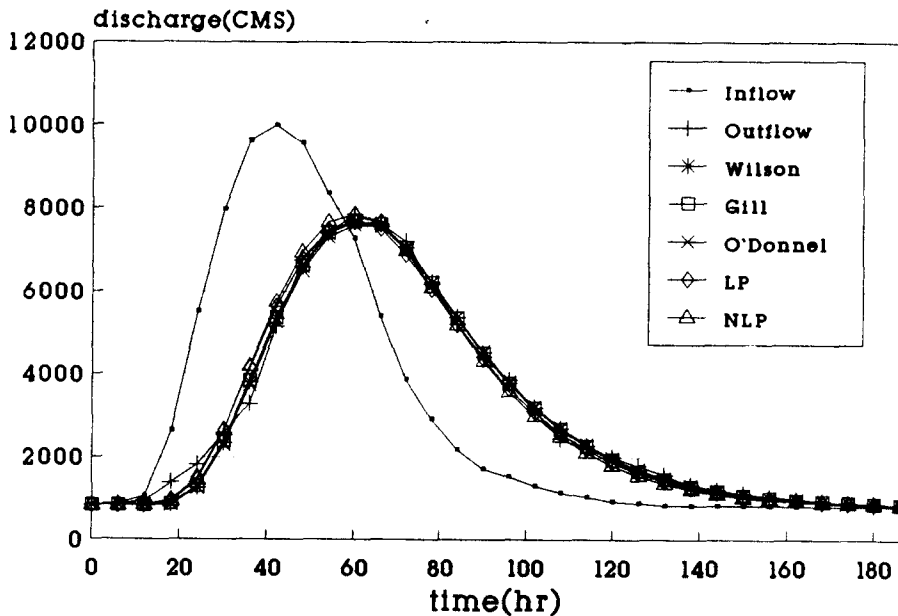


그림 3 각 방법에 의한 유출수문곡선

## 5 결론

Muskingum 홍수추적을 각 방법으로 수행하여 실측치와 계산치를 비교해 본 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

- 1) 첨두 홍수량은 비선형계획(nonlinear programming)법을 이용해서 얻어진 값이 실측치에 제일 가깝게 나타났다.
- 2) RMS와 R<sup>2</sup> 값은 각 방법의 계산값이 비슷하나 Gill의 최소 자승법(least squares method)이 상대적으로 비교적 우수한 값을 보여주고 있다.
- 3) 저류상수(storage constant) K 값은 비선형계획법을 이용한 결과가 홍수의 지체시간 20시간과 비슷하게 나타났다.
- 4) 가중계수(weighting factor) x 값은 적용 하천인 낙동강과 같은 대하천에서는 하천의 저류효과가 커서 평균값 0.25보다 작은 0.10에서 0.15까지의 값을 보여 주고 있다.
- 5) 향후 계속 연구 되어야 할 과제로는 각 방법을 다양한 홍수사상과 다양한 하천의 상중·하류지점에 구간을 변화 시키면서 여러 경우에 적용하여 하도경사, 하폭, 홍수 도달거리 등 지상학적 인자에 따른 저류상수 K와 가중계수 x 값의 적용범위를 설정하면 유출기록이 없는 지점의 홍수추적에 도움이 될 것이다.

## 6. 참고 문헌

1. Chow, V. T., Maidment, D. and Mays, L. "Applied Hydrology", McGraw Hill, 1988 PP 78-80, PP243-304
2. Gill, M. A. "Flood routing by the Muskingum method.", Journal of Hydrology Vol.36, 1978 PP 353 -363
- 3 David Kendrick et al "GAMS a user's guide", Scientific Press, 1992
- 4 Mays, L. T., Tung, Y. K. "Hydrosystems Engineering and Management ", McGraw - Hill, Inc, 1992
5. O'Donnel, T. "A direct three-parameter Muskingum procedure incorporating lateral inflow", Hydrological Science, Vol.30, No. 4, 1985 PP 479 - 496
6. O'Donnel, T., Pearson, C. P. and Woods, R. A. "Improved fitting for three parameter Muskingum procedure", ASCE, Vol.114, No 5, 1988 PP 516 - 528
7. Shaw, E.M. "Hydrology in practice.", Van Nostrand Reinhold CO., 1983 PP 407 - 423
8. Stephenson, D. "Direct optimization of Muskingum routing coefficients.", Journal of Hydrology, No 41, 1979 PP 161 - 165
9. Wiessman, W., Jr Knapp, J.W., Lewis, G. L. and Harbaugh, T.L. "Introduction to Hydrology.", CROWHARPER and ROW, 1977 PP232 - 247
11. Wilson, E. M. "Engineering Hydrology.", Macmillan, London, 2nd ed, 1974 PP 180 - 193
10. 윤 용남, "공업 수문학", 청문각, 1986