

# 河川水質에 관한 不確實度 解析의 必要性

한건연\*, 김상현\*\*, 김광섭\*\*, 이종석\*\*

## 1. 서론

하천 수질해석을 위한 확정론적 모형은 오차와 불확실성을 내포하게 되어 실제 자연시스템에서의 모든 상황을 완벽하게 재현하기는 어렵다. 이 과정에는 자연 현상자체에 내포되어 있는 본질적인 임의성이나 자연 현상을 수학적 모형으로 간략화시키는 과정에서 복잡성이나 경제성등의 이유등으로 계산되지 못한 부분들이 있게 된다. 즉, 모형개발 중 어떤 구성 성분을 무시하거나 부적절한 가정을 취함으로써 주어진 시스템을 기술하는데 부정확한 모형을 사용함으로써 얻어지는 성분, 모형에 쓰여지는 각종 계수나 부하량, 초기조건등과 같이 모형에서의 불확실한 매개변수에서 기인되는 성분등이 그 예다. 따라서, 본 연구에서는 하천 수질해석시의 불확실도의 요인을 도출하여 분석하고 Streeter-Phelps식의 확장모형 적용시의 문제점을 검토하여 향후 국내 실정에 적합한 하천 수질관리 기법을 제시하고자 한다.

## 2. 불확실도 해석기법의 검토

### 2.1 銳敏度 分析

예민도 분석은 최초의 오차해석 기법으로서 모형 매개변수를 하나씩 변화시켜 변화하는 계수에 대한 불확실도의 변화 양상을 검정하는 가장 보편적인 불확실도 해석 방법이다. 예민도 분석은 이 기법에 내재한 세가지 가정 때문에 전체 불확실도에 대한 각 변수의 기여도만을 근사화 할수 있다.

첫째, 모형에서 기대될수 있는 거동은 기대되는 매개변수값을 사용한 모형의 거동과 동일하다. 둘째, 전체오차는 각 매개변수에 대한 기여도를 개별적으로 처리하여 근사화 시킬수 있어 많은 매개변수 간에서 동시에 발생하는 오차에 기인된 효과는 무시되고 있다. 셋째, 매개변수의 변동이 1차 근사해가 유효한 영역에서만 존재하여야 한다는 것이다. 예민도 분석은 적절한 환경 조건하에서 수행된다면 수질모형에 있어서의 오차의 근원과 그양에 대한 어느 정도의 통

---

\* 경북대학교 공과대학 부교수, 토목공학과

\*\* 경북대학교 대학원 토목공학과

활능력을 제시할 수도 있겠다. 그러나, 제한된 양의 정보로부터 사용된 경우에는 예민도 분석의 가정이 위배될수도 있고 이것이 예민도 분석 기법을 모형 오차해석에 대한 빈약한 수단으로 만들게 될 것이다. 결론적으로 예민도분석은 실용적인 상황에서 크게 받아들일수 있음에도 불구하고 이제는 연구목적으로는 거의 사용되지 않으며 하천 수질해석시 장래 연구관점에서도 더 이상 추천할만한 불확실도 해석기법이 되지 못한다.

## 2.2 1次誤差解析

1차오차해석은 예민도 분석에 비하여 크게 개선된 방법이다. 예민도 해석에서의 가장 큰 문제점인 다수의 매개변수에 있어서의 불확실성에 기인한 동시적인 오차에 대한 고려가 되지 못한 점이 1차오차해석에서는 고려되고 있다. 1차오차해석은 모형을 기술하는 미분방정식을 각기 Taylor의 급수에 의하여 확장하고, 선형항 이하를 절단하는 과정으로 구성된다. 각 방정식의 항들이 조합이 되고 이것들이 모형입력에서의 불확실도의 함수로서 모형결과 연관된 분산을 결정하는데 사용될수 있겠다. 1차오차해석은 예민도 분석 과정에서 존재하고 있는 제한조건 일부만을 여전히 가지고 있다. 첫째로, 불확실성의 결과가 확정론적 해를 중심으로한 분산으로 표현된다는 것이다. 앞에서 언급한 바와 같이 확정론적 해는 잠재적으로 기대값으로 부터 크게 변화할수 있다. 두번째의 제약조건은 매개변수의 변동이 단지 모형궤적 주변의 선형범위 내에서만 국한되어야 한다는 것이다. 1차오차해석은 또다른 제약조건은 관련된 수학적 계산과정이 복잡하다는 것이다. 이 경우 오차방정식은 매번 다시 유도되어야만하고 계산에 적합하도록 변형되어야 한다. 1차오차해석의 주요한 제약은 이 기법이 좀더 구체적인 해석을 수행해보지 않고 이 기법이 만족할 만한 것인지의 여부를 결정할수 없다는 것이다. 또한 선형가정이 유효하다는 것을 증명하는 것은 고차의 매우 복잡한 오차해석을 필요로 한다. 이러한 이유 때문에, 1차오차해석은 일반적인 오차해석기법으로 추천되지 못한다.

## 2.3 Monte Carlo 해석

Monte Carlo 해석은 1차오차해석에 존재하는 제한적인 가정없이도 수질모형 계획에서의 불확실도를 결정하는 이론적으로도 직접적인 기법이다. Monte Carlo 해석을 통하여 불확실한 매개변수가 통계학적 분포로 기술된다. 모형결과의 불확실성이 각 반복계산과정에 대하여 미리 규정된 분포형으로부터 임의로 선정된 불확실한 모형 입력을 사용하여 확정론적 모형의 시뮬레이션을 수백번 수행함으로써 결정된다. Monte Carlo 해석은 모형 불확실도를 정량화하는데 그 이론과 적용에 대한 수학적 이해가 용이하기 때문에 가장 보편적인 방법으로 급격히 발전하고 있다. 과거의 이 기법의 주요 제한조건은 막대한 계산 요구량이었으나 컴퓨터 산업이 급격히 발전하였기 때문에 계산시간을 감소시킬수 있어서 이 장애는 제거되었다.

생태계 분야에 대한 연구결과 Monte Carlo 해석결과가 확정론적 결과에 비하여 더욱 안정해를 제시하는 것으로 나타났다는 것이다. 이는 모형입력의 작은 변화가 확정론적 해석결과에는

큰 영향을 미치는 것으로 나타난 반면 Monte Carlo 결과에는 그 영향이 작게 나타났다. 입력 매개변수의 통계학적 분포를 적절하게 정의할수 없는 능력이 Monte Carlo 기법의 단 하나의 약점이다. 많은 모형 매개변수가 직접적으로 측정할수 없다 하더라도 독자적으로는 확률분포에 의하여 정확하게 기술될수 있다. 대부분의 경우에 있어서 사용된 통계학적 분포가 해석에 기초한 실제 자료와 관계가 적다고 하더라도 매개변수가 어떻게 거동하느냐에 관한 모형과의 최선의 가정을 나타낸다. 현재 사용하는 오차해석 기법을 검토하여 본 결과 Monte Carlo 해석이 장래 연구를 위하여 가장 바람직한 연구기법으로 나타났다. Monte Carlo 기법의 장점은 요구하는 대로 높은 정도의 계산결과를 얻을수 있는데 반하여 그것과 관련된 이론은 비교적 간단하다는 것이다. 이 기법의 주요한 단점은 모형입력의 불확실성과 변동성이 올바르게 규정되어야 하는 요구조건이다. 이러한 불리한 조건에도 불구하고 Monte Carlo 기법은 오차해석 방법 중 가장 기대되는 불확실성 해석기법으로 제시될수 있겠다.

### 3. 불확실도 해석 및 신뢰도 해석

불확실도는 모형에 의한 대상 시스템에서의 실제 반응치와 모형에 의한 예측치와의 총편차를 나타내는 값으로서 (1)식과 같이 시스템 반응치와 모형예측치와의 편차의 자승합의 평균치로 정의 될수 있는데 이는 모형의 구조적 요인에 의한 불확실도와 매개변수의 변동성에 의한 불확실도의 합으로 표시될수 있다.

$$\text{불확실도} = \sum_{i=1}^{N1} \sum_{j=1}^{N2} (Y_{ij}^M - Y_i)^2 / (N1 N2) \quad (1)$$

여기서, N1 : 자료를 얻을수있는 X값의 수      N2 : Monte Carlo 반복계산수

$Y_{ij}^M$  : 주어진 X값에 대한 j 번째 Monte Carlo 계산의 결과

$Y_i$  : 주어진 X값에 대한 실측치의 평균치

위의 과정은 실측치가 이 시스템에서의 실제 거동을 나타낸다는 가정하에 이루어진 것으로서 이 경우 실측치에서 오차는 개개변수들의 산정에서 나오는 오차에 비해 무시할수 있을 만큼 작다는 가정에 기초한 것이다. 여기서 개개변수의 산정에서 발생하는 오차는 그 변수값에 대한 확률 분포 해석으로 고려되어질 수 있다. 그러나 실측치 자체가 상당한 오차를 포함하고 있다면 전체 모형의 불확실도에 미치는 이 오차의 효과에 대한 고려도 필요한 것으로 사료된다.

#### 3.1 매개변수에 의한 불확실도

매개변수의 변동성에 의한 불확실도는 모형 계수나 초기조건 혹은 부하량등의 불확실한 요소로부터 기인하는 것으로서 이는 Monte Carlo 시뮬레이션 해석결과의 분산 또는 확산을 의미한다. 이 경우 불확실도는 개개의 Monte Carlo 반복계산(  $Y_{ij}^M$  )의 결과와 Monte Carlo 반복계산의 평균값과의 편차의 자승의 합의 평균으로 (2)식이 나타내진다.

$$\text{매개변수의 불확실도} = \sum_{i=1}^{N1} \sum_{j=1}^{N2} (Y_{ij}^M - \bar{Y}_i^M)^2 / (N1 N2) \quad (2)$$

여기서,  $\bar{Y}_i^M$  : 주어진 X값에 대한 Monte Carlo 반복계산의 평균값

### 3.2 구조적 요인에 의한 불확실도

모형의 구조적 요인에 의한 불확실도는 부적합한 모형의 사용으로 인하여 발생된 오차를 의미하는데 이는 모형의 개발과정에서 부적절한 가정이나 정보의 부족등으로 기인될 수 있다. 예를 들면 부적절한 반응 차수의 가정이나 서로 상이한 요소의 개개의 성질을 고려하지 않은 상태에서 여러가지 요소를 한가지요소로 총괄하여 취급하는 경우이다. 모형의 구조적 요인에 의한 불확실도는 전체 불확실도의 식으로 부터 (3)식과 같이 유도될 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{모형구조의 불확실도} &= \sum_{i=1}^{N1} \sum_{j=1}^{N2} (Y_{ij}^M - Y_i^M)^2 / (N1 N2) \quad (3) \\ &= N2 \sum_{j=1}^{N2} (Y_i^M - Y_i)^2 / N1 \end{aligned}$$

### 3.3 신뢰지수

신뢰지수는 모형의 계산결과가 대상시스템에 의한 반응자료에 얼마나 가까이 근접하고 있는가를 나타내게 된다. 예를 들어 특정 모형이 더 신뢰성이 클수록 신뢰계수의 값은 1에 가깝게 되고, 만약 신뢰지수가 1 이면 이 모형의 구성은 완전한 것으로 판단할 수 있으나 자연 환경시스템에서 완전한 경우는 불가능할 것으로 사료된다. 모형의 예측치 ( $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ )과 이에 대응하는 관측치( $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ )에 대하여 신뢰지수는 (4)식과 같이 나타내질 수 있다.

$$RI = \frac{1 + \left\{ (1/N) \sum_{i=1}^N |(1-Y_i/Z_i)/(1+Y_i/Z_i)|^2 \right\}^{0.5}}{1 - \left\{ (1/N) \sum_{i=1}^N |(1-Y_i/Z_i)/(1+Y_i/Z_i)|^2 \right\}^{0.5}} \quad (4)$$

여기서, RI : 신뢰지수로서  $RI \geq 1$  으로 표시됨                      N : 관측회수  
 $Z_i$  : 모형에 의한 예측치     $Y_i$  : 관측치

## 4. 불확실도에 대한 고찰

### 4.1 Extended Streeter-Phelps 모형

일반적으로 하천수질해석 모형은 사용된 구성성분의 수가 증가됨에 따라 모형의 복잡성이 커지게 된다. 모형내의 변동성을 가진 매개변수, 모형구성시의 부적절한 가정과 그에 따라 무시된 구성성분등에 기인하고 있는 모형이 가지는 불확실성 규명하고, 신뢰도해석을 통하여 최적의 복잡성을 가진 수질모형을 도출할 수 있다.

하천에서의 용존산소해석 모형은 수체내에서의 용존산소의 물리, 화학, 및 생물학적 반응을

수식으로 표시한 것이다. 물리적인 과정은 유체의 이동, 혼합 및 확산등이 포함되며, 화학및 생물학적 과정은 생물학 산화나 탄소나 질소계통의 물질의 산화과정등이 그것이다. 이 밖에도 하상 퇴적물에 의한 산화나 공기중에서의 재포기, algae의 광합성 활동, 호흡등도 용존산소에 영향을 미치는 인자이다. 본 연구에서는 다양한 지배인자들을 단계적으로 증가시킴에 따라 확장된 Streeter-Phelps식으로서 (5)식과 같이 확장된 모형을 구성하였고, 이들 모형중 최적의 복잡성을 갖는 모형을 실측치와의 비교를 통한 신뢰도해석기법에 의하여 도출할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 D(X, t) = & D_0 ( t - X/U ) \lambda_1 \\
 & + \frac{L_0 K_d}{K_a - K_r} ( \lambda_2 - \lambda_1 ) + \frac{N_0 K_{nd}}{K_a - K_n} ( \lambda_3 - \lambda_1 ) \\
 & + \frac{L_{rd} K_d}{K_a K_r} ( 1 - \lambda_1 ) - \frac{L_{rd} K_d}{K_r(K_a - K_r)} ( \lambda_2 - \lambda_1 ) \\
 & + \frac{L_{nd} K_{nd}}{K_a K_n} ( \lambda_3 - \lambda_1 ) - \frac{L_{nd} K_{nd}}{K_n(K_a - K_n)} ( \lambda_3 - \lambda_1 ) \\
 & + \frac{R + B}{K_a} ( 1 - \lambda_1 ) - P
 \end{aligned} \tag{5}$$

여기서,  $\lambda_1 = \text{EXP}(-K_a X/U)$ ,  $\lambda_2 = \text{EXP}(-K_r X/U)$ ,  $\lambda_3 = \text{EXP}(-K_n X/U)$

#### 4.2 불확실도와 모형의 복잡성의 관계

일반적으로 불확실도는 모형에서의 복잡성이 증가함에 따라 매개변수의 변동성에 의한 불확실도는 증가하고 모형의 구조적 요인에 의한 불확실도는 감소한다. 이 경우(case1)를 도시하면 그림 1 과 같다.

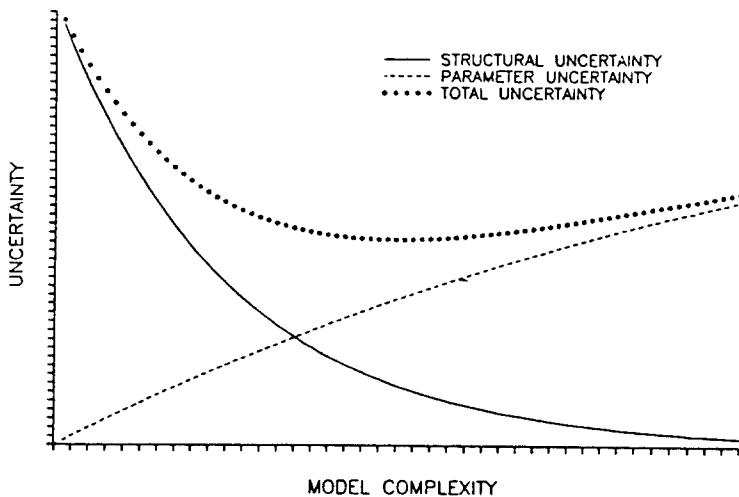


그림 1 불확실도와 모형의 복잡성의 관계(case1)

여기서 매개변수의 변동성에 의한 불확실도와 모형의 구조적 요인에 의한 불확실도의 합으로 표시되는 전체 불확실도는 일정한 정도까지는 모형의 구조적 요인에 의한 불확실도의 감소로 인하여 전체 불확실도가 감소하나 어느 정도 이상에서는 모형의 구조적 요인에 의한 불확실도의 감소요인보다 매개변수의 변동성에 의한 불확실도의 증가요인이 커져서 총 불확실도는 증가한다. 모형의 불확실도에 모형의 변동계수의 불확실성이 주는 영향과 최적의 모형 복잡정도를 산정하기 위하여 다음의 상반되는 두가지의 경우(case2, case3)를 고찰하여 보았다. 즉, case2는 모형의 변동계수들이 상당히 큰 정도의 불확실도를 가지는 경우로서 그림 2와 같이 나타난다.

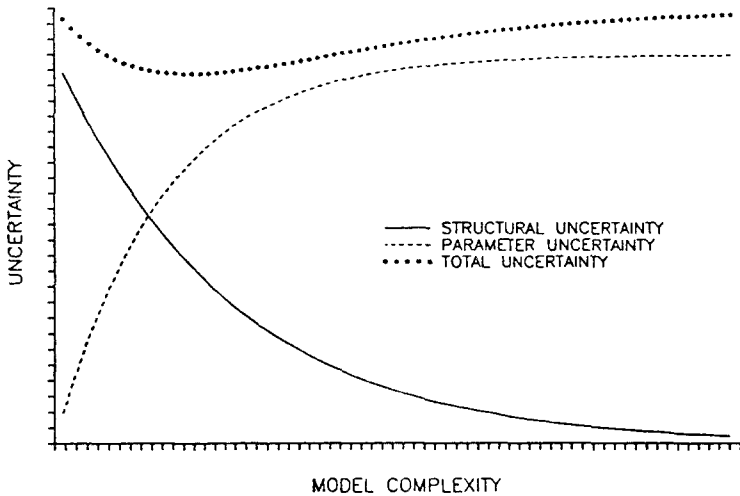


그림 2 불확실도와 모형의 복잡성의 관계(case2)

이 경우는 모형의 복잡성의 증가에 따라 매개변수의 변동성에 의한 불확실도가 급격히 증가하고 전체 불확실도는 비교적 작은 복잡성을 가진 모형에서 최소값을 나타내는 양상을 보이고 있다. 실제로 측정되거나 산정된 자료의 불확실도의 정도를 증가시키는 여러가지 요인 중 하나는 부정확한 자료가 부적절한 모형에서의 변동계수를 야기시키게 되는데, 이러한 경우는 간단한 모형이 복잡한 모형보다 신뢰도 있는 계산결과를 제시할수 있다는것을 의미한다.

case3는 case2와 대비되는 매개변수가 매우 작은 정도의 불확실도를 가지는 경우이다. case3를 그림으로 나타내면 그림 3과 같다. 이 경우에는 상당히 복잡한 모형의 형태까지 전체 불확실도가 감소하는 경향을 보인다. 비록 매개변수의 변동성에 의한 불확실도가 모형의 복잡성의 증가에 따라 증가에 따라 증가는 하고 있으나 그 변동성이 작은 이유로 아주 복잡한 모형에서야 최적의 모형이 도출될 수 있는 경우로 모형에서 더 많은 관계변수를 고려함으로써 얻어지는 정확도가 이 모형에서 추가되는 불확실한 변동계수로 부터 얻어지는 불확실도보다 큰 경우이다.

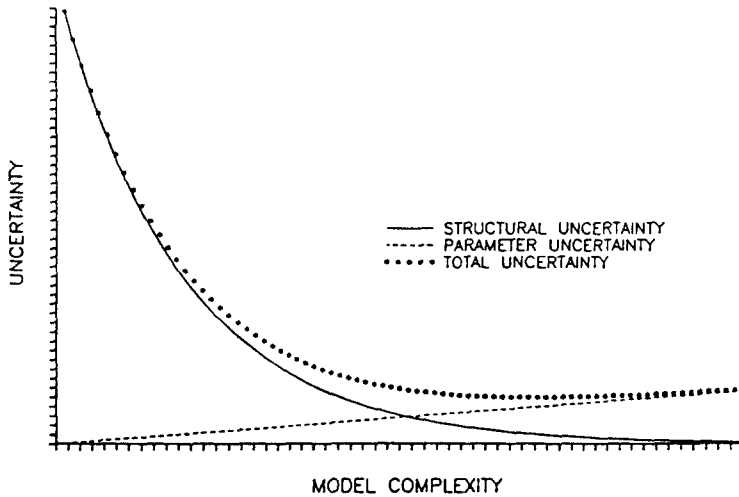


그림 3 불확실도와 모형의 복잡성의 관계(case3))

### 5. 불확실도 및 신뢰도의 검정

단순한 함수식에 대한 불확실도의 계산예를 위해 (6)식과 같이 하천 수질해석 시스템에서 널리 사용하는 1차 반응모형을 사용하였다.

$$dY/dt = - KY \quad (6)$$

이 모형의 해는 (7)식과 같다.

$$Y(t) = Y_0 \text{ EXP}(-Kt) \quad (7)$$

여기서, Y : 상태변수 K : 반응계수 t : 시간 Y<sub>0</sub> : t=0 일때의 Y값

Monte Carlo 시뮬레이션을 시행함에 있어서 개개의 Monte Carlo 반복계산별로 불확실 계수 K 는 이 계수의 특성을 나타내는 확률분포로부터 추출되어져 주어진 모형에 대입된다. 이 경우 이 변수를 위해 평균값 0.3과 평균값의 20%의 변동계수를 가지는 정규확률분포를 가정하였다. 모형의 결과는 각각의 다른 X값에 대해 각각의 Monte Carlo 반복계산별로 계산된다. 300 회의 Monte Carlo 시뮬레이션에 수행되었다. 또한 모형에서 불확실한 계수를 증가시켜 가면서 계산하였는데 1차반응식에서 불확실한 요소 K와 Y<sub>0</sub>를 가지는 것을 의미한다. 초기 조건 Y<sub>0</sub> 의값도 평균값 10 표준편차는 평균값의 12.5%를 가지는 정규분포를 사용하여 계산한 결과 K만이 불확실계수의 경우보다도 더 큰 범위를 가지고 계산 결과가 되는것을 확인 할 수 있었다.

위의 두경우에 대한 표준편차의 변화를 고찰하여보면 불확실도 계수의 증가는 비교적 초기 시간에 모형의 결과의 범위정도에 영향이 있다는 사실을 발견 할 수 있었으나 시간이 경과한 후에는 실제로 복합적인 계수들에 의한 불확실성은 감소하고 있음을 관찰 할 수 있었다.

## 6. 결 론

하천 수질해석에 있어 확정론적 모형이 가지는 불확실성은 모형에서의 각종반응상수, 부하량, 초기조건등과 같이 불확실한 매개변수에 기인되는 불확실도와 모형개발 과정중에서 주어진 시스템을 기술하는데 부적절한 모형을 사용함에 기인되는 구조적 요인에 의한 불확실도로 구분될 수 있다. 기존의 불확실도 해석기법으로는 Monte Carlo기법이 추계학적 하천수질 해석시 가장 적합한 것으로 검토되었다. 최적의 복잡성을 가진 수질모형의 도출을 위하여 모형의 복잡성과 모형 불확실도와의 관계를 규명하였다.

Monte Carlo 해석을 통하여 여러가지 수질관리 방안에 따른 수질 개선 효과를 효율적으로 검토할 수 있을 것이다. 특히, 폐수 및 분뇨처리장에서의 방류량과 오염부하량, 각종 반응계수, 하천유량 및 유속등의 변동성이 심한 국내 하천에서의 수자원의 효율적인 관리를 위해서는 불확실성 해석을 통한 추계학적 수질관리 기법의 도입이 이루어져야 할 것으로 사료되었다.

## 7. 참고문헌

- 1) Chadderton, R.A., Miller, A.C., and McDonnell, A.J., "Uncertainty Analysis of Dissolved Oxygen Model", J. of Env. Eng. Div., ASCE, EE5, 1003-1011, 1982.
- 2) Dewey, R.J., "Application of Stochastic Dissolved Oxygen Model", J. of Env. Eng. Div., ASCE, Vol.110, No.2, 412-429, 1984.
- 3) Gromiec, M.J., Loucks, D.P., and Orlob, G.T., "Stream Quality Modeling", in Mathematical Modeling of Water Quality : Streams, Lakes, Reservoirs, Orlob, G.T. ed., John Wiley & Sons, 1983.
- 4) Padgett, W.J., et.al, "A Random Differential Equation Approach to the Probability Distribution of BOD and DO in Streams", J. of Applied Mathematics, Vol.32, No.2, 467-483, 1977.
- 5) Thomann, R.V., and Mueller, J.A., "Principles of Surface Water Quality Modeling and Control", Harper and Row, 1987.
- 6) Tiwari, J.L., and Hobbie, J.E., "Random Differential Equations as Models of Ecosystems - Monte Carlo Simulation Approach", Math Biosci, 25-44, 1976.
- 7) Willem, F.B., "Water Quality Modeling of Monte-Carlo Simulation", Water Resources Bulletin, Vol.11, No.2, 1975.
- 8) Whitehead, P.G., and Young, P.C., "Water Quality in River Systems - Monte Carlo Analysis", Water Resources Research, 1979.