

내부공진을 고려한 2 자유도 보-질량 구조물의 비선형진동

오 일근*, 이 현*

(Nonlinear Vibration of a Two-degree-of-freedom Beam-Mass Structure in the Presence of Internal Resonance)

Il Geun Oh, Hyun Lee

ABSTRACT

The nonlinear dynamic characteristics of a two-degree-of-freedom beam-mass structure is investigated. The flexible L-shaped structure with a two-to-one internal resonance is subject to a primary resonance and the resulting planar dynamic responses are examined. A quadratic damping, which has been avoided to use because of the difficulties in the analysis, is considered to take into account the effect of viscous damping due to the surrounding fluid. The method of multiple scales is used to determine first-order approximations to the solutions. Force-response and frequency-response curves are generated.

1. 서론

항공기를 비롯한 여러 구조물에서 유연한 경량의 보와 강체 질량등은 그 계를 이루는데 있어서 빼놓을 수 없는 요소들이다. 이들 구조물의 설계와 제어를 위해서는 그 계의 동역학적 특성을 이해해야 하는 것이 필수적임은 주지의 사실이다. 구조물에 내재한 비선형성은 이러한 동역학적 특성에 큰 영향을 미칠 수 있다. 그러한 영향에 의해 주기적 응답의 서로 다른 모드 간의 상호작용이 나타나기도 한다. 모드간의 비선형 상호작용은, 각 모드의 진동수가 어떤 관계를 이루거나 대략 그러한 조건에 있을 때 발생한다. [1,2]

본 논문에서는 그림1에 보인 것과 같은 구조물의 평면내 비선형 응답에 대해 조사하였다. 이 구조물은 두 개의 가벼운 강철 보와 두 개의 강체 질량으로 만들어졌다. 굽힘이 있는 진동모우드만으로 그 응답이 이루어져 있으면, 그 구조물의 응답은 평면적이다. 연직 방향으로 설치된 보 위에 부착되는 질량의 위치를 조정하여, 구조물의 제 2 고유 진동수가 제 1 고유 진동수의 약 두 배 정도 되도록 하였다. 이러한 진동수 비는 2 : 1의 내부공진

상태를 야기한다. 조화기진력을 구조물에 가하고 기진 진동수가 제 2 고유 진동수의 근처에 있도록 유지하면, 제 2 모우드의 주공진 상태를 얻는다. 이와 유사한 구조물들이 Nayfeh and Zavodney [3]와 Haddow, Barr, and Mook [4]에 의해 연구된 바 있다.

본 논문의 해석적 결과에 의하면, 구조물의 제 2 고유 진동모우드와 제 1 고유 진동모우드 간의 2:1 진동수비는 2:1의 내부공진과 결과적인 모드간의 상호작용을 유발하게 됨을 확인할 수 있다.

2. 운동방정식

Haddow, et al. [4]은 구조물에 대한 운동방정식을 유도할 때 보의 관성 영향을 집중질량의 관성과 함께 묶어서 이산계로 취급하였다. 다척도법 [5]을 사용하여 얻게 되는 상미분방정식의 근사해를 구하였다. 그들의 연구에서는, 선형 및 비선형 주기 응답에 대한 예측 결과가 실험적 관찰과 정성적으로 일치하였다. 본 논문에서는 Nayfeh and Zavodney [3]에서와 같이 일반화된 해석적 모형을 사용하여 구조물의 정성적 응답을 예측하였다.

연직보에 부착되어 점성유체속에서 움직이는 집중질량 m_1 의 변위와 수평보에 부착된 집

* 한국전력공사 기술연구원, 정회원

증질량 m_2 의 변위를 표현하기 위해, 그 계의 제 1 모우드와 제 2 모우드의 응답을 u_1 과 u_2 로 표시한다. 그러면, 그림 1의 대상 구조물에 대한 운동방정식은 다음과 같이 주어진다 :

$$\begin{aligned} \ddot{u}_1 + \omega_1^2 u_1 &= \varepsilon [-2\mu_1 \dot{u}_1 - \mu_3 \dot{u}_1 | \dot{u}_1 | \\ &+ \delta_1 u_1 u_2 + \delta_2 u_1 \ddot{u}_2 + \delta_3 u_2 \ddot{u}_1 + \delta_4 \dot{u}_1 \dot{u}_2 \\ &+ F_1 \cos \Omega t] \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \ddot{u}_2 + \omega_2^2 u_2 &= \varepsilon [-2\mu_2 \dot{u}_2 + \alpha_1 u_1^2 + \alpha_2 u_1 \ddot{u}_1 \\ &+ \alpha_3 u_2^2 + \alpha_4 u_2 \ddot{u}_2 + \alpha_5 \dot{u}_1^2 + \alpha_6 \dot{u}_2^2 \\ &+ F_2 \cos(\Omega t + \tau)] \end{aligned} \quad (2)$$

여기서 ω_1 과 ω_2 는 각각 제 1 모우드와 제 2 모우드의 고유 진동수이며, δ_i 와 α_i 는 제곱형 비선형항을 나타내는 계수이고, Ω 는 가진 주파수, F_1 과 F_2 는 가진 진폭, τ 는 위상차이다. 또, μ_1 과 μ_2 는 선형감쇠력 계수이며, μ_3 는 제곱형 감쇠력을 나타내는 계수이다: 그리고, 이들은 모두 상수라고 가정한다. 또한, ε 은 다음에 수행할 섭동법에서 사용될 부호로서 무차원의 작은 진폭임을 나타내는 파라미터이다.

3. 해석

3.1 다척도법

식 (1)과 (2)의 제 1계 근사해를 구하기 위해 다척도법을 사용한다. 우선,

$$u_1(t; \varepsilon) = u_{10}(T_0, T_1) + \varepsilon u_{11}(T_0, T_1) + \dots \quad (3)$$

$$u_2(t; \varepsilon) = u_{20}(T_0, T_1) + \varepsilon u_{21}(T_0, T_1) + \dots \quad (4)$$

이라고 놓는다. 여기서, $T_0 = t$ 는 원래의 빠른 시간척도를 나타내며, ω_1 과 Ω 의 척도에 대한 응답특성을 규정한다; 그리고, $T_1 = \varepsilon t$

는 느린 시간 척도로서, 응답의 진폭과 위상의 변조특성을 규정한다. T_0 와 T_1 을 이용하면, 시간도함수는 다음과 같이 변환된다.

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 + \dots \quad (5)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \dots \quad (6)$$

여기서 $D_n = \frac{\partial}{\partial T_n}$ 을 나타낸다.

식 (3) - (6) 를 식 (1) 과 (2)에 대입하고 ε 의 같은계를 가진 계수들끼리 등치시키면 다음을 얻는다.

$O(\varepsilon^0)$:

$$D_0^2 u_{10} + \omega_1^2 u_{10} = 0 \quad (7)$$

$$D_0^2 u_{20} + \omega_2^2 u_{20} = 0 \quad (8)$$

$O(\varepsilon)$:

$$\begin{aligned} D_0^2 u_{11} + \omega_1^2 u_{11} &= -2D_0 D_1 u_{10} - 2\mu_1 D_0 u_{10} \\ &- \mu_3 D_0 u_{10} | D_0 u_{10} | + \delta_1 u_{10} u_{20} \\ &+ \delta_2 u_{10} D_0^2 u_{20} + \delta_3 u_{20} D_0^2 u_{10} \\ &+ \delta_4 D_0 u_{10} D_0 u_{20} + F_1 \cos \Omega T_0 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} D_0^2 u_{21} + \omega_2^2 u_{21} &= -2D_0 D_1 u_{20} - 2\mu_2 D_0 u_{20} \\ &+ \alpha_1 u_{10}^2 + \alpha_2 u_{10} D_0^2 u_{10} + \alpha_3 u_{20}^2 \\ &+ \alpha_4 u_{20} D_0^2 u_{20} + \alpha_5 (D_0 u_{10})^2 \\ &+ \alpha_6 (D_0 u_{20})^2 + F_2 \cos(\Omega T_0 + \tau) \end{aligned} \quad (10)$$

식 (7)과 (8)의 해는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$u_{10} = A_1(T_1) e^{i \omega_1 T_0} + \overline{A_1}(T_1) e^{-i \omega_1 T_0} \quad (11)$$

$$u_{20} = A_2(T_1) e^{i \omega_2 T_0} + \overline{A_2}(T_1) e^{-i \omega_2 T_0} \quad (12)$$

여기서 A_1 과 A_2 는 현재의 근사화 단계에서는 아직 미지의 함수들이다. 이들은 다음의

근사화 단계에서 solvability 조건을 부과하여 결정하게 된다. 식 (11)과 (12)는 다음과 같이 다른 형태로 표시할 수 있다.

$$u_{10} = a_1(T_1)\cos[\omega_1 T_0 + \beta_1(T_1)] \quad (13)$$

$$u_{20} = a_2(T_1)\cos[\omega_2 T_0 + \beta_2(T_1)] \quad (14)$$

여기서 a_n 과 β_n 은 응답모우드 u_1 과 u_2 의 진폭과 위상이다.

식 (11) 및 (12) 와 식 (13) 및 (14) 를 비교하면,

$$A_n(T_1) = \frac{1}{2} a_n(t_1) e^{i \beta_n(T_1)} \quad (15)$$

임을 알 수 있다.

제 2 진동 모우드와의 주공진 경우를 해석한다. 공진점과의 근접성을 나타내기 위해 σ_1 과 σ_2 라는 두개의 제어 파라미터를 도입하여, 이들을

$$\omega_2 = 2\omega_1 + \varepsilon\sigma_1 \quad (16)$$

$$\Omega = \omega_2 + \varepsilon\sigma_2 \quad (17)$$

로 표현한다.

식 (11) 과 (12) 를 식 (9) 와 (10) 에 대입하고, 식 (16) 과 (17) 을 사용한 후, 세클라 항들을 소거하면,

$$a_1' = -\mu_1 a_1 + a_1 a_2 \sin \gamma_1 - \frac{4\mu_3 \omega_1}{3\pi} a_1 |a_1| \quad (18)$$

$$a_2' = -\mu_2 a_2 - a_1^2 \sin \gamma_1 + f_2 \sin \gamma_2 \quad (19)$$

$$a_1 \beta_1' = -a_1 a_2 \cos \gamma_1 \quad (20)$$

$$a_2 \beta_2' = -a_1^2 \cos \gamma_1 - f_2 \cos \gamma_2 \quad (21)$$

을 얻고, 여기서

$$\gamma_1 = \sigma_1 T_1 + \beta_2 - 2\beta_1 \quad (22)$$

$$\gamma_2 = \sigma_2 T_1 - \beta_2 + \tau \quad (23)$$

이며, $-\mu_3 D_0 u_{10} |D_0 u_{10}|$ 항의 영향을 고려하기 위해 Fourier 전개를 사용하였다.

3.2 고정해

응답중 규칙적 주기 응답에 해당하는 변조방정식 (18) ~ (23)의 고정해를 구하며, 이는 $a_1' = a_2' = 0$ 와 $\gamma_1' = \gamma_2' = 0$ 에 해당한다. 그러면 식 (18) - (23)의 고정해는 비선형적으로 연성된 대수방정식으로부터 구해진다.

그 해는 가능한 경우가 두 가지 있게 되는데, 먼저,

$$a_1 = 0 \quad (24)$$

$$a_2 = \frac{f_2}{\sqrt{\sigma_2^2 + \mu_2^2}} \quad (25)$$

이며, 이것은 본질적으로 선형방정식의 해에 해당한다. 또 하나의 해는

$$a_2 = \left[\frac{1}{4} (\sigma_1 + \sigma_2)^2 + \left(\mu_1 + \frac{4\mu_3 \omega_1}{3\pi} a_1 \right)^2 \right]^{1/2} \quad (26)$$

이며, a_1 은 대수방정식

$$a_1^4 + c_3 a_1^2 |a_1| + c_2 a_1^2 + c_1 |a_1| + c_0 = 0 \quad (27)$$

으로 주어지는데, 여기서 c_i 는 계의 파라미터로 표현되는 상수계수들이다.

두번째 해인 (26) 및 (27)은 $\mu_3 = 0$ 이 아니면 포화현상은 보이지 않으며, 그 대신 제 1 모우드의 진폭 a_1 뿐만 아니라 직접기진되는 제 2 모우드의 진폭 a_2 도 기진 진폭인 f_2 의 함수로서 변화하고 있다. 프로그램을 만들어 식 (27)을 풀고 여기서 구해진 a_1 을 이용하면, 식 (26) 으로부터 a_2 를 구할 수 있고, 또한 그에 대응하는 γ_1 과 γ_2 (또는 β_1 과 β_2)를 구할 수 있다.

고정해의 안정성을 결정하는 과정은 본 논

문에 신기에는 너무 길기 때문에 여기서는 생략하기로 한다. 이에 관해 관심있는 독자는 Oh [6] 의 박사학위 논문을 참조하시기 바란다.

4. 수치결과 및 토의

IBM 3090의 주계산 컴퓨터를 사용하여 수치적으로 모의실험을 수행하였다. 진폭과 위상의 변조방정식 (18) - (23)을 수치적으로 적분하여 고정해를 확인하였다. 제어 파라미터 σ_2 나 기진 진폭 f_2 , 또는 제곱감쇄력의 계수 μ_3 등의 분기 파라미터를 변화시켜서 나타나는 응답의 분기를 살펴보았다. 이때, 다른 모든 파라미터들(즉, σ_1, μ_1, μ_2)는 상수로 고정하였다.

식(26) 과 (27) 로부터 a_1 과 a_2 에 대한 실수해의 존재성 여부를 조사한다. 식 (26)에서 a_1 이 실수이면 a_2 도 실수임을 알 수 있는데, 이때 a_1 은 식 (27)이 네제곱형 대수방정식이므로, a_1 이 실수인 영역을 규명하기 위해 $\mu_3=0$ 으로 놓고 후속적 해석을 시작하면 간편하다.

그림 2는 대표적인 초임계형 기진진폭 - 응답곡선을 보이고 있는데, $\mu_3=0$ 인 경우와 μ_3 가 0이 아닌 대표적인 경우로 $\mu_3=0.6$ 인 경우를 보이고 있다. 이때 $\mu_1 = 0.2, \mu_2 = 0.5, \sigma_2 = 0.3, \sigma_1 = 0.1$ 을 사용하였으며, $\Gamma_1 = -0.04$ 가 된다. 여기서는 $\Gamma_1 < 0$ 이므로 $\mu_3=0$ 이든 $\mu_3 \neq 0$ 이든 관계없이 $f_2 \geq \zeta_2$ ($\zeta_2 \approx 0.1649$) 일 때, 한개의 안정한 실수해가 존재한다. $f_2 \leq \zeta_2$ 이면, 응답진폭은 식 (24) 및 (25)로 주어지는데, 이것은 μ_3 와 관련이 없다. 따라서, 제 2 모우드의 응답진폭이 f_2 에 비례하는 반면, 제 1 모우드는 기진되지 않는, 즉, 선형적 응답을 나타낸다. $f_2 > \zeta_2$ 이면, 응답진폭이 식 (26) 및 (27)로 주어진다. 이로 부터 우리는, $\mu_3 \neq 0$ 일때 제 2 모우드의 응답진폭 a_2 는, $\mu_3 = 0$ 일때 보이던 포화현상을 더 이상 보여주지 않음을 확인할 수 있다.

따라서, μ_3 로 표시되는 제곱형 감쇄력은 포화현상을 붕괴시킨다. 그 대신, f_2 가 ζ_2 이상으로 증가할 때, 제 2 모우드의 진폭 a_2 는 일정한 값으로 남아 있지 않고, 비선형적으로 증가한다. 그러나, 선형해인 경우의 기울기에 비해 $f_2 \geq \zeta_2$ 일때의 a_2 의 기울기는 훨씬 작음을 알 수 있다. f_2 증가에 따른 제 1 모우드의 진폭 a_1 의 증가율은 $\mu_3 = 0$ 인 경우에 비해, 제곱형 감쇄력이 도입됨에 따라 더 작아짐을 알 수 있다. 결국, f_2 가 분기점인 ζ_2 이상으로 증가하면, 제 2 모우드로 유입되고 남은 여분의 에너지가 모두 다 제 1 모우드로 넘쳐 들어가지는 않는다는 것이다.

그림 3은 대표적인 아임계형 기진진폭 - 응답 곡선을 보이고 있는데, $\mu_3 = 0$ 인 경우와 $\mu_3 = 0.6$ 인 경우를 보이고 있다. 이때, $\mu_1 = \mu_2 = 0.04, \sigma_1 = \sigma_2 = 0.5$ 를 사용하였으며, $\Gamma_1 = 0.2484$ 가 된다. 여기서는 $\Gamma_1 > 0$ 이므로, $\mu_3 = 0$ 과 $\mu_3 \neq 0$ 인 경우 공히 $f_2 \geq \zeta_2$ ($\zeta_2 \approx 0.2517$)일 때, 오직 한 개의 안정한 실수해가 존재하고; $\mu_3 = 0$ 인 경우 $\zeta_1 \approx 0.04$ 그리고, $\mu_3 = 0.6$ 인 경우 $\zeta_1 \approx 0.1020$ 으로서, $\zeta_1 \leq f_2 \leq \zeta_2$ 일 때 두 개의 실수해가 존재한다. 후자의 경우, 크기가 더 큰 해는 안정해인 반면, 더 작은 해는 불안정해이다. 여기서, 더 큰 분기점 값 ζ_2 는 μ_3 와 무관한 반면, 더 작은 분기점 값 ζ_1 은 μ_3 가 증가함에 따라 점점 더 커진다. $f_2 \leq \zeta_1$ 일 때, 식 (24) 및 (25)로 주어지는 안정한 응답 한가지만 존재하는데, 이는 선형방정식의 해로서 제 2 모우드의 응답만 나타난다. $\zeta_1 \leq f_2 \leq \zeta_2$ 이면, 두 개의 안정해가 한 개의 불안정해와 함께 공존하는데; 식 (24) 및 (25)로 표현되는 하나의 안정한 응답과 식 (26) 및 (27)로 표현되는 또 하나의 안정한 응답이 곧 이 둘이다. 이 영역에서의 계의 응답은 초기 조건에 따라 달라진다. $f_2 \geq \zeta_2$ 일때는, 역시 식 (26) 및 (27)로 안정한 응답 한가지만 존재한다. 여기서 우리는, $\mu_3 = 0$ 과 $\mu_3 = 0.6$ 인 경우 모두, 제 1모우드가 두 개의 안정한 응답과 그에 따른 도약 현상을 보이고 있음을 알 수 있다. $\mu_3 = 0$ 일때 존재하는 제 2 모우드 응답의 포화현상은, $\mu_3 = 0.6$ 일때 존재하지 않는다. $\mu_3 = 0$ 이면, f_2 가 ζ_2 이상으로 증가해 갈 때, 제 2 모우드

의 응답진폭이 일정하게 남아있지 않고 증가한다. 즉, 포화현상이 붕괴되는 것이다. 또, 여기서도 $f_2 \geq \zeta_1$ 인 주어진 f_2 에 대해, μ_3 가 증가함에 따라 a_2 도 증가함을 알 수 있다. 그림 2 에서처럼, 주어진 f_2 에 대해 μ_3 가 증가하면 a_1 은 감소한다.

그림 4는 대표적인 주파수 - 응답곡선으로서 $\mu_3 = 0$ 인 경우와 $\mu_3 = 0.6$ 인 경우를 보이고 있다. 이때, $\mu_1 = \mu_2 = 0.02$, $\sigma_1 = 0.02$ 이며, $f_2 = 0.1$ 이다. 반전된 피치포크 분기점이 μ_3 값과 무관한 반면, 새들 - 노우드 분기점은 μ_3 가 증가하면 반전된 피치포크 분기점으로 가까이 감을 알 수 있다. 또한, 제 1 모우드 응답에서의 도약현상은 $\mu_3 = 0$ 과 0.6 에 대해 공히 존재한다. 여기 보여진 주파수 - 응답곡선은 $\sigma_2 = 0$ 에 대해서 약간 왼쪽으로 치우쳐 있는데, 이는 제어 파라미터 σ_1 이 양수이기 때문이다. 만일 σ_1 이 음수이면, 이 곡선들은 약간 오른쪽으로 치우쳐 있을 것이며, $\sigma_1 = 0$ 이면 즉, 완전 튜닝된 경우, $\sigma_2 = 0$ 에 대해 좌우 대칭으로 나타날 것이다. 이상의 세 가지 경우에 있어서 여러 해의 정성적 특성은 같다.

5. 결론 및 요약

선형과 제곱형을 합한 형태의 모델이 유체역학적 감쇄력을 나타내는데 적합하다라는 것이 오랫동안 알려져 왔다. 그러나, 종전의 많은 연구에서는 해석상의 어려움 때문에 이 모델의 사용을 기피해 왔다. 본 논문에서는 제곱형의 비선형 감쇄력 모델을 직접 사용하였다. 제 2 모우드의 고유진동수가 제 1 모우드의 고유진동수의 두 배일 때 (2:1 내부공진 조건) 조화기진력에 의해서 제 1 모우드와 제 2 모우드가 비선형적으로 결합된 보 - 질량 구조물의 응답을 조사하였다. 다척도법을 사용하여, 제 2 모우드가 기진될 때 제 1 모우드와 제 2 모우드의 진폭과 위상의 변조를 나타내는 네 개의 1계상미분방정식을 유도하였다. 이 변조 방정식을 사용하여 제곱형의 비선형 감쇄력이 주기응답 및 그의 안정성에 미치는 영향을 규명하였다.

기진 주파수가 제 2 모우드의 고유진동수 근처일 때, 제곱형 감쇄력이 0 이든 0 이 아

니든 도약 현상은 공히 존재하였다. 제곱형 감쇄력의 영향이 고려되었을 때, 포화현상은 붕괴되었다. 그것은 제 2 모우드로 유입되는 여분의 에너지가 모두 다 제 1 모우드로 넘쳐 흘러 들어가는 어떤 특정한 기진 진폭의 값이 존재하지 않음을 의미한다. 제곱형 감쇄력의 크기가 커지면 제 1 모우드의 진폭은 점차 감소하는 반면, 제 2 모우드의 진폭은 증가한다. 아임계형 기진진폭 - 응답곡선과 주파수 - 응답곡선에서, 제곱형 감쇄력의 영향이 커짐에 따라 복수개의 해가 중첩된 영역이 점차 좁아졌다.

참고문헌

1. Nayfeh, A. H. and Mook, D. T., Nonlinear Oscillations, New York, Wiley-Interscience, 1979.
2. Schmidt, G. and Tondl, A., Non-Linear Vibrations, Cambridge, Cambridge University Press, 1986.
3. Nayfeh, A. H. and Zavodney, L. D., "Experimental Observation of amplitude- and phase-modulated responses of two internally coupled oscillators to a harmonic excitation", Journal of Applied Mechanics 55, 1988, pp. 706-711.
4. Haddow, A. G., Barr, A. D. S., and Mook, D. T., "Theoretical and experimental study of modal interaction in a two-degree-of-freedom structure", Journal of Sound and Vibration 97, 1984, pp. 451-473.
5. Nayfeh, A. H., Perturbation Methods, Wiley-Interscience, New York, 1973.
6. Oh, I. G., "Theoretical and Experimental Investigation into the Nonlinear Dynamics of Floating Bodies to Harmonic Excitations, "Ph. D. Dissertation, Department of Engineering Science and Mechanics, Virginia Polytechnic Institute and State University,

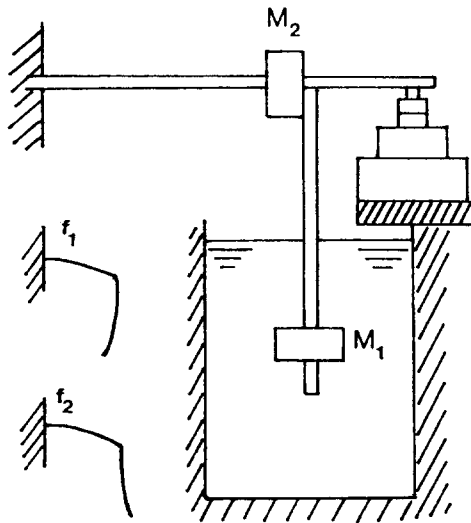


Fig.1 Beam-mass structure and accompanying mode shapes

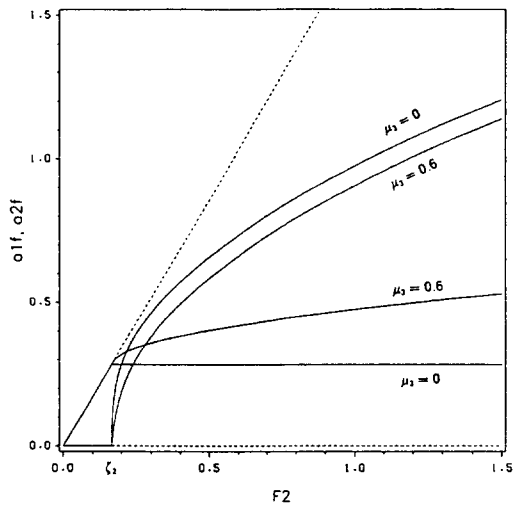


Fig.2 Force-response curves (supercritical type) : for $\mu_3 = 0$ and 0.6 ; stable (____), unstable (-----)

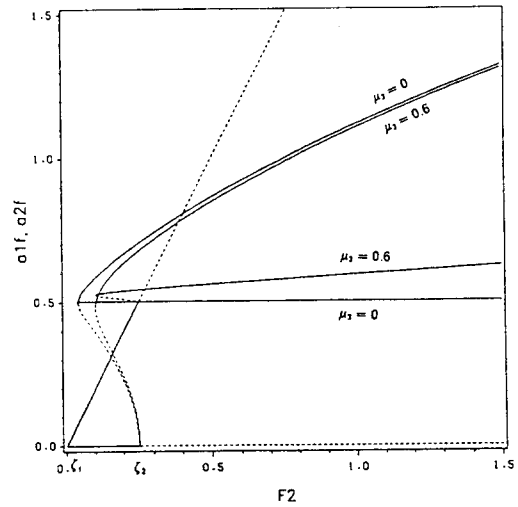


Fig.3 Force-response curves (subcritical type) : for $\mu_3 = 0$ and 0.6 ; stable (____), unstable (-----)

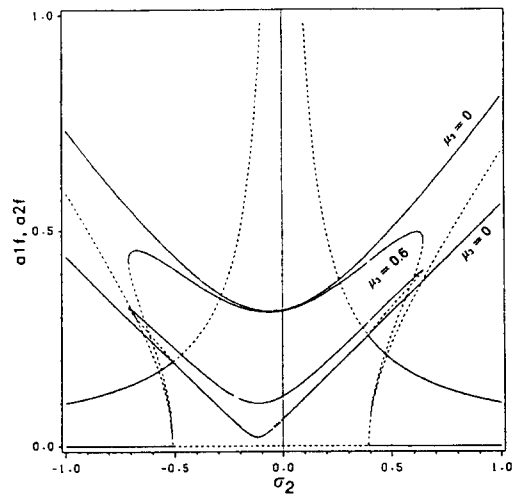


Fig.4 Frequency-response curves : for $\mu_3 = 0$ and 0.6 ; stable (____), unstable (-----)