

## 고차 모멘트를 이용한 비선형성 탐색

°장 한기\*, 김 광준\*

### (Nonlinearity Detection using a Higher Moment)

(Han-Kee Jang, Kwang-Joon Kim)

#### 1. 서론

동적인 시스템을 규명하기 위한 많은 이론적, 실험적인 기법이 발전되고 요구하는 정밀도의 수준이 향상됨에 따라 최근에 들어 그 해석의 영역을 비선형의 범위까지 확장하려는 시도가 많이 행해지고 있다. 비선형 해석을 위해서는 먼저 계의 거동이 선형인지 비선형인지를 판단하는 것이 매우 중요하다. 실제로 이에 대한 많은 연구가 있었으나 [1-6], 대부분의 경우 나름대로의 장점을 가지고 있지만 문제점도 함께 안고 있는 것이 사실이다. 이에 대한 중요한 이유로는 비선형계의 범위가 너무 광범하고 다양하기 때문이다. 또, 동적인 계의 비선형성은 특정 주파수의 입력에 대해 그 정도가 커지는 경향이 있는데도 많은 경우 전체적으로 비선형여부를 판단하기 때문에 관심 주파수 영역을 어떻게 선정하는가에 따라 그 판단 자체가 달라질 수 있다.

본 연구에서는 동적인 비선형계의 범위를 상미분 방정식으로 표현되지 않는 계를 총칭하는 것으로 보고, 이들 계의 거동에서 비선형성을 탐색할 수 있는 실용적인 측면에서의 방법을 제안하였다. 이 방법은, 관심 주파수 범위내에서의 정현파 입력을 계에 가하고 출력에서의 정현파 여부를 판단하여 비선형성을 평가하고 있다. 따라서 주어진 계가 어느 주파수에서

또, 어느 정도의 진폭에 이르면 비선형 거동이 뚜렷해 지는 지를 나타낼 수 있다. 실제로 동적인 비선형계는 자체의 특성에 의해 같은 진폭의 입력을 가하더라도 주파수에 따라 출력의 진폭이 달라지므로 각 주파수에 따라 비선형여부를 평가하는 것이 바람직하다.

#### 2. 4차 모멘트(kurtosis)를 이용한 비선형성 탐색

본 연구에서는 Fig.1에서 보인 바와 같이, 상미분 방정식으로 표현되는 선형계에 정현파 입력을 가하면 출력의 진폭과 위상은 계에 따라 정해지지만 그 파형은 정현파를 그대로 유지하게 된다. 그러나 비선형계의 경우, 특정 주파수를 갖는 정현파 입력이 가해질 때 비선형요소로 인해 파형이 왜곡되며 더이상 정현파 형상이 유지되지 않는데, 본 연구에서는 이와 같은 현상을 이용하여 거동의 비선형 여부를 판단하였다. 이를 위해서, 계를 가진할 때 나타나는 과도 응답이 사라지고 정상상태에 다다른 후의 입, 출력 신호로 판단을 해야만 한다.

비선형계에  $A \sin \omega t$ 의 형태의 입력이 가해질 때, 정상상태의 출력의 형태를 일반적으로 표현하면  $\sum_j B_j(t) \sin(\omega_j(t) + \phi_j(t))$ 의 꼴로 나타낼 수 있다 [7]. 여기서 진폭, 주파수, 위상이 모두 시간의 함수로 표현하는 것이 일반적이라고 하겠다. 그러나 비선형의 정도가 너무 크지 않다면 가진주파수 성분( $\omega$ )이 가

\* 한국과학기술원 기계공학과, 정희원

장 뚜렷하고 그 외에 배수 성분(harmonics)들이 나타나는 것이 가장 흔한 경우라 할 수 있다. 비선형의 정도가 커지면 필요한 항의 수도 많아지지만 대부분의 경우 가진 주파수 성분외에 한 두개 정도의 주파수 성분들로 거동을 표현하는 것이 가능하다. 이 경우, 어떤 과정을 거치든지 출력신호는 정현파로부터 왜곡되는데, 실제로 이와 같은 개념을 이용한 비선형 탐색법으로 sig-function[5]이 있으며 그 정의는 다음과 같다.

$$\text{sig-function}(\omega) = \frac{\int_0^T (y(t) - y_\omega(t))^2 dt}{\int_0^T y(t)^2 dt} (\times 100\%) \quad (1)$$

여기서,  $y(t)$ 는 측정된 신호이고  $y_\omega(t)$ 는 측정신호 중에서 가진 주파수  $\omega$ 에 해당하는 성분이다. 결국 이 함수는 전체 출력 신호의 파워와 가진 주파수 성분을 filtering하고 난 나머지 신호의 파워와의 상대적인 비로 정의된다. 정현파 입력에 대해 선형계를 통과한 응답의 경우는 0(%값)을 나타내며 비선형성이 커지면 이 값도 증가한다. 이 함수는 주파수에 따라 비선형성 여부를 판단할 수 있는 장점이 있으나 비선형에 대한 민감도가 낮고 계산 과정이 복잡해서 많이 사용되고 있지 않다. 따라서 본 연구에서는 보다 계산이 쉽고 민감도가 높은 4차 모멘트를 도입하여 비선형 요소에 의한 정현파 신호의 왜곡 여부를 판단하였다.

### 2.1. 4차 모멘트(kurtosis)의 정의

데이터의 통계해석에 흔히 사용되는 '모멘트'는 1차인 경우 평균치, 2차인 경우 분산이 되고, 3,4차의 경우는 각각 skewness, kurtosis라고 칭하며 확률밀도 함수(probability density function)의 형상의 특징을 분석하는데 사용된다[8,9]. 4차 모멘트 혹은 kurtosis에 대한 정의는 다음과 같다.

$$\text{kurtosis} = \frac{E[x^4]}{[E[x^2]]^2} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} y^4 p(y) dy}{\left[ \int_{-\infty}^{\infty} y^2 p(y) dy \right]^2} \quad (2)$$

이 값은 신호의 진폭과 무관하며, Gaussian랜덤신호의 경우 3, 정현파 신호의 경우 1.5를 각각 나타낸다. 이 함수는 특히 확률밀도함수의 양 끝단, 즉 최대 진폭에서의 형상변화에 민감하므로[10], 정현파의 최대 값 부근의 변화를 잘 감지할 수 있다. 특히, 비선형성은 많은 경우 진폭이 클수록 강조되므로 비선형 효과를 탐색하는데 매우 유리한 성질이라고 할 수 있다.

### 2.2. 4차 모멘트의 신뢰구간

4차 모멘트는 실제로 일정갯수(N)의 데이터로부터 계산되는 랜덤한 변수이며, 잡음의 영향이나 신호의 이산화(discretization)등의 영향으로 정현파라 할지라도 정확하게 1.5가 되지 않을 수 있다. 따라서 이를 판단하기 위한 신뢰구간이 필요하게 된다. 정규분포를 갖는 랜덤 변수의 신뢰구간은  $\pm \frac{z_{\alpha/2} \sigma}{\sqrt{N}}$ 와 같이 정의된다. 여기서  $z_{\alpha/2}$ 는 주어진 유의수준에 대한 신뢰계수이고  $\sigma$ 는 주어진 변수에 대한 표준편차이다. Fisher와 Pearson[11,12]은 kurtosis의 계산에 사용된 데이터 세트의 갯수가 충분히 크고, 또 데이터 세트가 모집단으로 부터 정규적으로 추출됐다는 (normally sampled) 가정하에 kurtosis 변수 자체에 대한 분산을 다음과 같은 식으로 표현하였다.

$$\sigma^2\{\text{kurtosis}\} = \frac{24 N (N-1)^2}{(N-3)(N-2)(N+3)(N+5)} \quad (3)$$

실제로 본 연구에서는 정상(stationary)상태의 입, 출력 데이터 세트를 분석했으므로 정규적으로 추출됐다는 가정은 저절로 만족된다.

### 2.3. 잡음이 4차 모멘트의 계산에 미치는 영향

시뮬레이션이 아닌 실험 데이터의 처리에서는 잡음의 효과를 무시할 수 없으므로 외부 잡음이 kurtosis의 계산에 미치는 영향을 관찰하였다. 표1에는 정현파 함수의 rms값의 1-10%에 해당하는 백색 잡음(white noise)을 정현파 신호에 추가하여 각 경우에 대한 4차 모멘트를 계산하고 정리하였다. 이 때, 데이터 수는 1000개였으며 이에 대한 95% 신뢰구간은  $1.5 \pm 0.009$ 이다. 따라서 이 범위를 만족하는 잡음의 최대치는 5%정도이다. 실제로 최근의 실험장비들은 매우 정밀하며, 또 비선형 해석을 하면서 상당한 크기의 잡음을 고려한다는 것 자체가 무의미하므로 5% 잡음은 작은 양이 아니라고 하겠다. 따라서 실제 비선형계의 적용에는 큰 무리가 없다고 할 수 있다.

### 3. 여러가지 비선형성 탐색에의 응용

4차 모멘트가 과연 비선형의 탐색에 효과적으로 적용될 수 있는지를 보기 위해, 아래의 3가지 비선형성을 갖는 1자유도계에 대해 시뮬레이션을 수행해 보았다. 비선형성으로는 각각 변위의 3제곱에 비례하는 강성(cubic stiffness), 속도의 제곱에 비례하는 유체감쇠(quadratic damping), 마찰(Coulomb friction)을 고려하였다. 이 때, 비선형항의 효과를 제외하면 계의 고유진동수는 1.233Hz이다.

$$m \ddot{y} + c \dot{y} + k y + g(y, \dot{y}) = u$$

( $m=1 \text{ kg}$ ,  $c=2 \text{ N} \cdot \text{sec/m}$ ,  $k=60 \text{ N/m}$ ) (4)

$$\begin{aligned} \text{NLI} & ; g(y, \dot{y}) = 60 y^3 \\ \text{NL II} & ; g(y, \dot{y}) = 6 |\dot{y}| \dot{y} \\ \text{NL III} & ; g(y, \dot{y}) = 0.2 \text{sgn}[\dot{y}] \end{aligned}$$

위의 세가지 모형에 대해 입력의 진폭을 변화시키면서, 각 경우에 대해 정현파 신호를 0.1Hz에서 3Hz까지 일소(sweeping)하며 4차 모멘트를 계산하였다. 데이터의 갯수는 1000개였으며 이에 대한 95%신뢰구

간은  $1.5 \pm 0.009$ , 99% 신뢰구간은  $1.5 \pm 0.012$ 였다. 이 때, 각 경우에 대해 sig-function을 계산하여 kurtosis에 의한 결과를 서로 비교하고자 하였다. Sig-function을 사용할 때, 비선형 여부 판단을 위한 임계치라든가 기준은 없지만 100%가 최대 값이므로 kurtosis의 95% 신뢰구간에 상응하는 값으로 5%를 사용하였다.

결과를 Fig.2~4에 도시하였는데 각 그림에서는 2가지의 선택된 입력 진폭에 대해 4차 모멘트와 sig-function을 나타냈다. 두가지 함수 모두 주파수에 따라 비선형 정도를 정량화하는 기능을 보이고 있음을 알 수 있다. 세가지 경우 모두 선형계의 고유진동수인 1.233Hz이하에서 주로 비선형성이 강조됨을 알 수 있다.

각 경우에 대해 첫번째 입력 크기는 kurtosis가 모든 주파수에서 신뢰구간 내에 들어가는 최대치로 선정했다. 따라서 이보다 큰 입력이 가해지면 특정 주파수에서는 출력신호에 왜곡현상이 나타나므로 거동이 비선형이라는 것을 보이고 있다. 두번째 입력의 크기에 대해서는 3가지 비선형성의 모든 경우가 신뢰구간을 벗어나고 있어서 계의 거동이 해당주파수에서 비선형임을 표현하고 있다. 그러나 sig-function은 선정된 입력진폭의 모든 경우에 대해 3%미만의 값을 보이고 있어서 그 민감도가 매우 낮음을 알 수 있다. 실제로 주어진 비선형계를 정현파 가진할 때 식(4)의 각 항들의 상대적인 크기를 계산하여 Table2~4에 정리하였는데, 예를 들어 유체감쇠 계에 대한 Table3의 25N가진 결과를 볼 때, 비선형항이 차지하는 상대적인 크기가 전체의 16%에 이르고 있음에도 이에 대한 sig-function값은 0.04%밖에 되지 않아서 비선형으로 판단할 수 없음을 알 수 있다. 이에 반해 kurtosis값은 신뢰구간을 벗어나고 있어서 계가 비선형 거동을 하고 있음을 보여주고 있다. 그 외의 경우도 모두 비슷한 결과를 보이고 있음을 알 수 있다. 이들 결과로부터 kurtosis는 비선형에 의한 정현파의 왜곡에 매우 민감한 특성을 보임을 확인할 수 있었다.

주어진 계에 대한 kurtosis 계산 결과를 보면 어떤 주파수에서 비선형성이 가장 심하게 나타나는지를 알 수 있다. 본 시뮬레이션에서는 공통적으로 0.4Hz 부근에서 가장 뚜렷하게 나타나고 있는데, 이는 계의 거동이 원점에 대칭인 비선형함수 (odd type nonlinear function)의 경우에 고유진동수의 1/3의 주파수에서 비선형성이 강조된다는 사실을 보여주고 있다[7]. 즉, kurtosis를 이용하면 비선형 탐색뿐만 아니라 비선형 계의 규명에 앞서 유익한 사전정보까지 얻을 수 있게 된다.

#### 4. 결론

4차 모멘트가 정현파 신호에 대해 진폭에 관계없이 일정한 값을 갖는다는 사실을 이용하여 비선형계 거동에 있어서의 비선형 여부를 판단하는 방법을 제안하였다. 이 방법의 장점으로서는, i) 계산이 매우 간단하고 신뢰구간이 정의되어 있어서 적용이 편리하며, ii) 주파수에 따라 비선형성을 정량화하고 거동의 비선형 여부를 판단할 수 있는 장점이 있고, iii) 기존의 방법에 비해 신호의 왜곡에 대한 민감도가 높아서 비선형의 탐색에 매우 유리하다는 것이다.

그러나 이 방법의 문제점은 다른 여러 방법들과 마찬가지로 계의 비선형에 대한 필요 충분 조건을 제공하지 못한다는 점이다. 즉, 정현파가 아니더라도 kurtosis값이 1.5가 되는 신호가 존재할 수 있기 때문이다. 그러나 실제 동적인 계의 경우에는 입력 자체가 잘 정의된 정현파이기 때문에 출력은, 선형의 경우 1.5, 비선형의 경우 1.5에서 벗어난 값이 얻어진다. 즉, 전혀 다른 신호를 정현파 신호로 오판할 가능성은 거의 없다고 할 수 있다.

#### 5. 참고문헌

- [1] Simon, M. et al., "Use of the Hilbert Transform in Modal Analysis of Linear and Non-linear Structures," *J. Sound and Vibration*, **96**, 421-436, 1984.
- [2] Ewins, D. J., Modal Testing : Theory and Practice, Research Studies Press, 1984.
- [3] Kim, W.-J. et al, "Nonlinearity Identification and Quantification Using an Inverse Fourier Transform," *J. MSSP*, **7**, 1993.
- [4] Billings, S. A. et al., "Correlation Based Model Validity for Non-linear Models," *Int. J. Control*, **44**, 235-244, 1986.
- [5] Mertens, M. et al., "Basic Rules of a Reliable Detection Method for Nonlinear Dynamic Behavior," *Proc. 10th Int. Sem. on Modal Analysis*, K. U. Leuven, Pt IV, 1985.
- [6] Lai, H. Y. et al., "Identification and Quantification of System Non-linearity through Response Data," *5th IMAC*, 1452-1459, 1987.
- [7] Nayfeh, A. H. et al., Nonlinear Oscillations, John Wiley and Sons, 1979.
- [8] Braun, S. ed., Mechanical Signature Analysis-Theory and applications, Academic Press, 1986.
- [9] Bendat, J. S., Nonlinear System Analysis and Identification from Random Data, John Wiley and Sons, 1990.
- [10] Mood, A. M et al., Introduction to the Theory of Statistics, 3rd ed., McGraw Hill, 1974.
- [11] Fisher, R. A., "Moments and Product Moments of Sampling Distribution," *Proc. of London Math. Society*, Series 2, **30**, 199-239, 1929.
- [12] Pearson, E. S., "A Further Development of Tests for Normality," *Biometrika*, **22**, 239-249, 1930.

**Table 1** Dependence of the kurtosis for a sinusoidal wave on the external noise effect (confidence interval : 1.491-1.509)

NSR(%)	kurtosis
0	1.50018
1	1.49888
2	1.49983
3	1.50135
4	1.50343
5	1.50609
6	1.50929*
7	1.51306
8	1.51740
9	1.52220
10	1.52760

**Table 2** Relative magnitudes of linear terms and a cubic stiffness nonlinear term for sinusoidal inputs of frequency 1.2Hz at several amplitudes.

(%)

input amplitude	linear term			nonlinear term
	$m \ddot{y}$	$c \dot{y}$	$k y$	$k_N y^3$
1N	42.8	11.5	45.6	0.15
5N	41.6	11.1	44.2	3.14
25N	35.8	9.41	37.4	17.4

**Table 3** Relative magnitudes of linear terms and a quadratic damping nonlinear term for sinusoidal inputs of frequency 0.4Hz at several amplitudes.

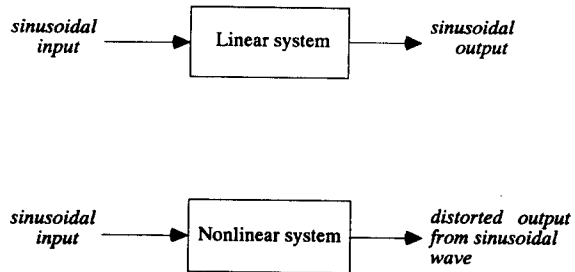
(%)

input amplitude	linear term			nonlinear term
	$m \ddot{y}$	$c \dot{y}$	$k y$	$c_N \dot{y}  \dot{y} $
1N	8.88	6.96	84	0.023
5N	8.64	6.75	80.7	3.91
25N	7.55	5.92	70.5	16.0

**Table 4** Relative magnitudes of linear terms and a Coulomb friction nonlinear term for sinusoidal inputs of frequency 0.4Hz at several amplitudes.

(%)

input amplitude	linear term			nonlinear term
	$m \ddot{y}$	$c \dot{y}$	$k y$	$F_d \text{sign} [\dot{y}]$
1N	13.2	5.85	63.9	17
5N	9.65	6.74	79.6	4.06
25N	8.90	6.96	83.3	0.85



**Fig.1** Input-output relation of a linear and nonlinear system in case of a sinusoidal input

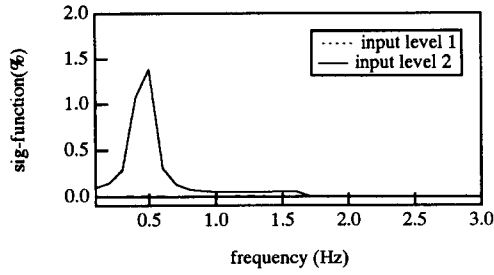
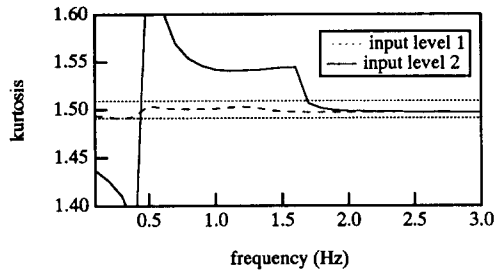


Fig.2 Comparison of capabilities of the kurtosis and the sig-function to detect a cubic stiffness nonlinearity. (input level1; 5N, input level 2; 25N)

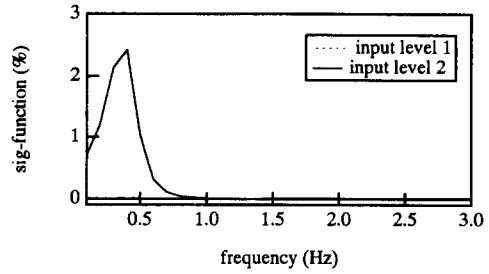
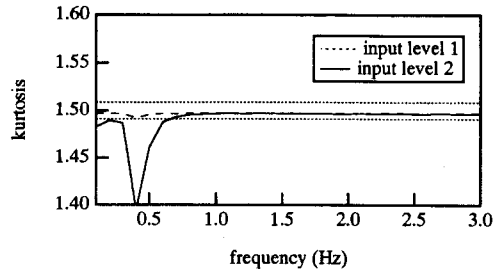


Fig.4 Comparison of the capabilities of the kurtosis and the sig-function to detect a Coulomb friction nonlinearity. (input level 1; 25N, input level 2; 1N)

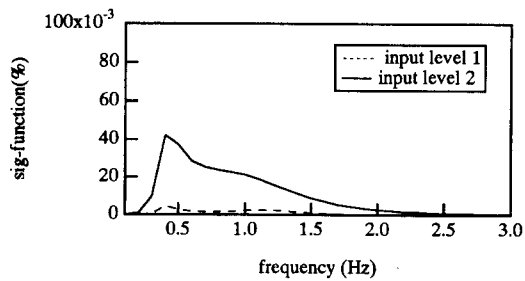
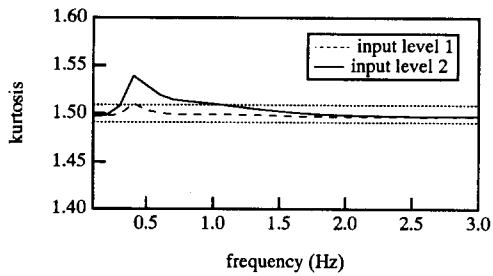


Fig.3 Comparisons of capabilities of the kurtosis and the sig-function to detect a quadratic damping nonlinearity. (input level 1; 5N, input level 2; 25N)