

음향 홀로그래피를 이용한 음장구성에 따른 앨리어싱 영향 (Aliasing Effect in Sound field Reconstruction using Acoustic Holography)

* 권 휴상*, 김 양한*

(Hyu-Sang Kwon, Yang-Hann Kim)

1. 서론

소음방사의 이해 및 효과적인 소음제어를 위해서는 소음원의 특성, 음장의 공간상 방사 특성 등을 아는 것이 중요하며, 이를 위해 많은 연구가 진행되어 왔다. 특히 다수의 마이크로폰 어레이를 이용한 음향 홀로그래피 방법에 의한 실험적 음장 예측 방법이 소개되었고 연구가 진행됨에 따라 많은 실용 가능성을 보여 주었다. [1-3]

음향 홀로그래피 방법에는 측정상 제한이 필연적으로 존재할 수 밖에 없는데, 이에 따른 오차가 존재하며 결국 예측음장의 신뢰도를 떨어뜨리는 요인이 된다. 본 연구의 목적은 측정조건에 따른 오차의 요인을 고찰하고 이를 정량적으로 표현함으로써 음향 홀로그래피 방법의 적용에 도움을 주고자 한다.

평면 음향 홀로그래피에 나타나는 오차는 둘러싸기 오차 (wraparound error), 앨리어싱 (aliasing), 창문영향 (window effect) 로 나눌 수 있는데, 오차는 측정구경의 크기와 마이크로폰 사이의 간격등의 측정조건 뿐만 아니라 음원의 특성, 홀로그램 평면의 위치 등에 직접적인 영향을 받게 된다. 본 연구에서는 오차해석을 위한 기본 연구로서 점음원 (monopole) 과 쌍극자 (dipole) 음장의 파수 스펙트럼을 해석적으로 구하고 이를 기본으로 평면 음향 홀로그래피 적용시 존재하는 앨리어싱에 대해 고찰하고 전산기 모의실험 (computer simulation) 을 통해 오차를 최소화하는 측정조건을 제시하고자 한다.

2. 평면 음향 홀로그래피 방법의 기본 이론

음원을 포함하지 않은 임의의 폐영역을 설정할 경우, 이 폐영역을 둘러싸는 경계면의 음압, 입자속도 분포와 Green 함수로써 폐영역 내의 음장은 다음과 같이 구해질 수 있음은 잘 알려져 있다.

즉

$$P(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_0} \left\{ P(\vec{r}_0) \frac{\partial G_r(\vec{r}|\vec{r}_0)}{\partial n_0} - G_r(\vec{r}|\vec{r}_0) \frac{\partial P(\vec{r}_0)}{\partial n_0} \right\} ds_0 \quad (1)$$

여기서 $P(\vec{r})$ 은 \vec{r} 위치에서의 음압의 크기와 위상을, $G_r(\vec{r}|\vec{r}_0)$ 는 선형 음파방정식을 만족하는 Green 함수를 의미한다.

경계면을 무한평면으로 설정하고 Dirichlet 경계조건을 만족하는 Green 함수를 선택함으로써 (1) 식을 간략하게 표현할 수 있다. 또한 공간상의 Fourier 변환을 이용함으로써 임의의 평면의 음압 분포는 홀로그램 평면, 즉 측정평면의 음압분포로써 표현할 수 있다. 즉

$$P(x, y, z) = F^{-1} [F [P(x, y, z_H)] e^{jk_z(z-z_H)}] \quad (2)$$

$$k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}$$

여기서 F 는 공간상의 Fourier 변환, F^{-1} 는 공간상의 역 Fourier 변환을 의미한다. (그림 1)

음향 홀로그래피 과정의 물리적인 의미를 살펴보면, 공간상의 음압분포를 각각의 파수성분의 평면파로 분리한 후 각 평면파의 공간상의 전파를 계산하여 이를 중첩하는 과정임을 알 수 있다. 이때 k_x, k_y 에 따라 진행파와 감쇠파가 존재하게 된다.

음향학적 특성중 음압이외에 중요한 인자로서는 입자속도를 생각할 수 없고 이는 선형적인 거동을 하는 음파에서 다음과 같이 표현되는 Euler 식으로부터 구할 수 있다. 즉

$$\vec{V}(\vec{r}) = \nabla P(\vec{r}) / j\rho c k \quad (3)$$

$\vec{V}(\vec{r})$ 은 \vec{r} 위치에서 주어진 주파수의 입자속도의 크기와 위상을 나타낸 벡터이며, $P(\vec{r})$ 은 \vec{r} 위치에서의 음압을 나타낸다. 입자속도는 방향을 가지는 벡터이므로 각각의 좌표성분으로 나누어 계산할 수 있고, 따라서

* 한국과학기술원 기계공학과 (정회원)

$$V_{\eta}(\vec{r}) = V_{\eta}(x, y, z) \quad (4)$$

$$= \frac{1}{4\pi^2 \rho c} \iint \tilde{P}(k_x, k_y, z_H) \left(\frac{k_{\eta}}{k}\right) e^{jk_z(z-z_H)} e^{j(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y$$

와 같이 쓸 수 있다. 이때 η 는 x, y, z 와 같은 임의의 직교좌표 성분을 나타낸다. 그러므로 홀로그래프 평면상에서 음압분포를 측정 한 후 Fourier 변환하여 파수영역에서 공간상의 주파수 성분들을 구하면, 임의의 위치에서의 입자속도를 계산할 수 있다. 또한 음압과 입자속도를 곱함으로써 음향 인텐시티 벡터도 예측할 수 있다.

3. 기본 음원의 파수 스펙트럼 계산

3.1 점음원 (monopole)

원점에 복소크기 A 를 가진 점음원이 있을 때, 임의의 위치 (x, y, z) 에서의 음압은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$P_0(x, y, z) = A \frac{e^{jkR_0}}{R_0} \quad (5)$$

여기서 $R_0 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

홀로그래프 평면 $z = z_H$ 에서 공간상의 Fourier 변환을 할 때, 음압분포가 축대칭이므로 원통 좌표계로 좌표변환을 하면 적분을 간략화 시킬 수 있다.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad k_r = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right), \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{k_y}{k_x}\right) \quad (6a)$$

그리고

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

$$k_x = k_r \cos \phi, \quad k_y = k_r \sin \phi \quad (6b)$$

$$\tilde{P}_0(k_r) = \int_0^{\infty} r P_0(r) \int_0^{2\pi} \exp[-jk_r r \cos(\theta - \phi)] d\theta dr$$

$$= 2\pi \int_0^{\infty} r P_0(r) J_0(k_r r) dr \quad (7)$$

로 표현할 수 있다. 따라서 점음원의 홀로그래프 평면에서의 파수 스펙트럼은 다음과 같은 Fourier-Bessel 변환을 계산하여 구할 수 있다.

$$\tilde{P}_0(k_r) = F\{P_0(x, y)\}$$

$$= 2\pi A \int_0^{\infty} r \frac{e^{jkR}}{R} J_0(k_r r) dr$$

$$= 2\pi A \int_{z_H}^{\infty} \frac{e^{jkR}}{R} J_0(k_r \sqrt{R^2 - z_H^2}) R dR$$

$$= \frac{j 2\pi A}{\sqrt{k^2 - k_z^2}} \exp[jz_H \sqrt{k^2 - k_z^2}] \quad (8a)$$

$$\tilde{P}_0(k_x, k_y, z_H) = \frac{j 2\pi A}{\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}} \exp[jz_H \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}]$$

$$k > \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$$

$$= \frac{2\pi A}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2 - k^2}} \exp[-z_H \sqrt{k_x^2 + k_y^2 - k^2}]$$

$$k < \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \quad (8b)$$

점음원이 $z=0$ 평면의 임의의 위치 (x_0, y_0) 에 놓여 있을 경우의 파수 스펙트럼은 앞에서 계산한 방법을 이용하여 구할 수 있다.

$$P(x, y, z_H) = A \frac{e^{jkR}}{R} \quad (9a)$$

$$R = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z_H^2}$$

$$\tilde{P}(k_x, k_y, z_H) = A \iint \frac{e^{jkR}}{R} e^{-jk_x x} e^{-jk_y y} dx dy \quad (9b)$$

변수치환을 하여 적분을 행하면 파수 스펙트럼은 다음과 같이 표현되어 진다.

$$\tilde{P}(k_x, k_y, z_H) = e^{jk_x x_0} e^{-jk_y y_0} \tilde{P}_0(k_x, k_y, z_H) \quad (10)$$

결국 점음원의 위치가 옮겨지면 각 파수 스펙트럼 성분의 위상이 변화함을 알 수 있다.

3.2 쌍극자 음원 (dipole)

쌍극자 음원의 파수 스펙트럼은 앞 절에서 구한 점음원의 파수 스펙트럼을 중첩함으로써 쉽게 구할 수 있다. Fourier 변환은 선형 변환이므로 중첩이 가능함을 알 수 있다. 원점에 놓인 쌍극자의 크기가 D , 극성의 방향은 \vec{n} 이라 하면, 방사음장을 각각 $(\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z)$ 과 $(-\epsilon_x, -\epsilon_y, -\epsilon_z)$ 에 놓인 두 점음원에서 방사되는 음장으로 생각할 수 있다.

$$P_d(x, y, z_H) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} A \left\{ \frac{e^{jkR_1}}{R_1} - \frac{e^{jkR_2}}{R_2} \right\} \quad (11)$$

여기서

$$R_1 = \sqrt{(x-\epsilon_x)^2 + (y-\epsilon_y)^2 + (z_H-\epsilon_z)^2} \quad (12a)$$

$$R_2 = \sqrt{(x+\epsilon_x)^2 + (y+\epsilon_y)^2 + (z_H+\epsilon_z)^2} \quad (12b)$$

$$\epsilon_x = \frac{n_x}{2} \epsilon, \quad \epsilon_y = \frac{n_y}{2} \epsilon, \quad \epsilon_z = \frac{n_z}{2} \epsilon \quad (12c)$$

$$D = A \epsilon \quad (12d)$$

쌍극자 음원에 의한 음장의 파수 스펙트럼은 다음과 같이 표현된다.

$$\tilde{P}_d(k_x, k_y, z_H) = \frac{2\pi D}{\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}} (n_x k_x + n_y k_y + n_z \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}) \quad (13)$$

여기서 n_x, n_y, n_z 는 쌍극자 음원의 극성 방향의 방향 코사인을 나타낸다.

4. 오차의 해석

일반적으로 홀로그래프 평면의 음압분포를 알기 위하여는 이산화된 한정된 개수의 측정점의 음압을 측정하게 된다. 이러한 측정상의 현실적인 제한조건에 의해서 앨리어싱과 창문영향이 발생하게 된다. 또한 예측평면의 위치에 따라 예측음압 분포에 둘러싸기 오차가 포함되어 진다. 이 둘러싸기 오차는 예측과정에서 측정구경 밖의 가상의 음원의 영향이 포함되어 나타나는 오차로써 이를 감소시키기 위해 Zero Padding 방법이 소개된 바 있다. [3] 이 방법은 측정구경 밖의 측정하지 못한 음압분포를 0으로 가정하여 가상으로 측정구경을 늘림으로써 가상의 음원의 영향을 감소시키는 방법이다.

앨리어싱과 창문영향은 측정조건에 따라 오차가 결정되고 전 음장에측 과정에서 영향을 받기 때문에 이에 대한 올바른 이해가 필요하다. 또한 앨리어싱은 측정점 사이의 간격, 창문영향은 측정구경의 크기와 직접적인 관계가 있지만 이와 더불어 음원의 특성과 홀로그래프 평면의 위치 등과 밀접한 관계를 가지고 있다.

일반적으로 측정점 사이의 간격과 측정구경의 크기가 정해져 있을 경우, 홀로그래프 평면의 위치가 음원에 가까울수록 앨리어싱 오차가 커지게 되며 음원에서 멀어질수록 창문영향이 증대됨을 알 수 있다. (그림 2)

4.1 앨리어싱 (aliasing) 오차의 해석

홀로그래프 평면의 측정점 사이의 간격에 의해 파수 스펙트럼에 최대파수 즉 Nyquist 파수가 존재하게 되며 이에 따라 앨리어싱 오차가 발생하게 된다. 또한 홀로그래프 평면의 위치나 음원의 특성도 앨리어싱에 직접적인 영향을 미치게 된다. 본 연구에서는 원점에 놓인 점음원의 파수 스펙트럼을 이용하여 오차를 계산하였다.

$$\hat{P}_0(k_x, k_y, z_H) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{P}_0(k_x - l\frac{2\pi}{a}, k_y - m\frac{2\pi}{a}, z_H) \quad (14)$$

여기서 'a'는 측정점 사이의 간격을 나타내고 Nyquist 파수 k_{max} 는 $\frac{\pi}{a}$ 로 계산되어 진다. 어느 파수성분의 Aliasing 오차를 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \tilde{E}(k_x, k_y, z_H) &= \hat{P}_0(k_x, k_y, z_H) - \tilde{P}_0(k_x, k_y, z_H) \\ &= \sum_{l, m \neq 0} \tilde{P}_0(k_x - l\frac{2\pi}{a}, k_y - m\frac{2\pi}{a}, z_H) \\ &= \sum_{l, m \neq 0} \sum \frac{2\pi j}{\sqrt{k^2 - (k_x - l\frac{2\pi}{a})^2 - (k_y - m\frac{2\pi}{a})^2}} \\ &\quad \exp[jz_H \sqrt{k^2 - (k_x - l\frac{2\pi}{a})^2 - (k_y - m\frac{2\pi}{a})^2}] \quad (15) \end{aligned}$$

일반적으로 음향 홀로그래피 구현시 측정점 사이의 간격을 반 파장보다 작게 하므로 앨리어싱 오차는 감쇠와 성분의 합이 되고 실수로 표현됨을 알 수 있다.

4.2 모의실험

앨리어싱 오차가 포함된 파수 스펙트럼과 참값을 비교하기 위하여 전산기 모의실험을 행하였다. 이때 파장 λ 는 1로 하여 각 측정조건에 따른 오차의 경향을 살펴보았다. 오차의 상대적인 비교를 위하여 다음과 같이 정규화된 크기 오차와 위상차를 정의하였다.

$$NE_m(k_x, k_y, z_H) = \frac{|\hat{P}_0(k_x, k_y, z_H) - l\tilde{P}_0(k_x, k_y, z_H)|}{|\tilde{P}_0(k_x, k_y, z_H)|} \quad (16a)$$

$$PD(k_x, k_y, z_H) = \angle \hat{P}_0(k_x, k_y, z_H) - \angle \tilde{P}_0(k_x, k_y, z_H) \quad (16b)$$

그리고 이를 임의의 파수에 대해 측정점 사이의 간격과 홀로그래프 평면의 위치를 변화시키며 계산하였다. 그림 (3)은 정규화된 크기 오차를 나타내며 그림 (4)는 위상차를 보여 준다. 여기서 $k_y=0$ 으로 하였고 k_x 는 각각 2, 4, 6인 경우이다. 그림에서 원의 크기는 값의 크기를 나타내며 빗금친 원은 음의 값을 나타낸다. 모의실험 결과에서 예측한 바와 같이 측정점 사이의 간격이 크고 홀로그래프 평면의 위치가 가까울수록 오차가 커짐을 알 수 있다. 하지만 각 측정조건과 오차와의 관계를 단적으로 설명하기는 어렵다. 그런데 오차의 값이 양에서 음으로, 음에서 양으로 변화함이 보여지고 이에 따라 오차값이 거의 0이 되는 부분이 존재함을 알 수 있었다. 이러한 모의실험 결과를 토대로 앨리어싱 오차가 최소화 되는 측정조건을 제시할 수 있다.

5. 결론

평면 음향 홀로그래피 방법의 실제 적용시, 예측결과의 신뢰성을 높이고 더 정확한 예측결과를 얻기 위하여 오차해석을 시도하였다. 이를 위하여 기본 음원인 점음원과 쌍극자 음원의 음장의 파수 스펙트럼을 계산하여 구했고, 이를 이용하여 앨리아싱 오차를 정량화하였다. 이러한 기본적인 이해를 바탕으로 정규화된 크기 오차와 위상차를 각각의 측정조건에 따라 구하였다. 이 모의실험 결과로써 앨리아싱 오차를 최소화 할 수 있는 측정조건을 제시하고자 하였고, 측정조건에 따른 대략적인 오차의 경향을 알 수 있었다.

참고문헌

- [1] J. D. Maynard, E. G. Williams and Y. Lee, "Nearfield Acoustic Holography; I. Theory of Generalized Holography and the Development of NAH", J. Acoust. Soc. Am., Vol. 78, No. 4, pp 1395-1412, October 1985.
- [2] W. A. Veronesi and J. D. Maynard, "Nearfield Acoustic Holography (NAH) II. Holographic Reconstruction Algorithms and Computer Implementation", J. Acoust. Soc. Am., Vol. 81, No. 5, pp 1307-1322, May 1987.
- [3] 김양한, 권휴상, "음향 홀로그래피를 이용한 방사 음장의 전방예측 방법에 관한 기본 이론 및 신호처리 방법", 대한기계학회논문집 제16권 제 9호, pp 1654-1668, 1992.

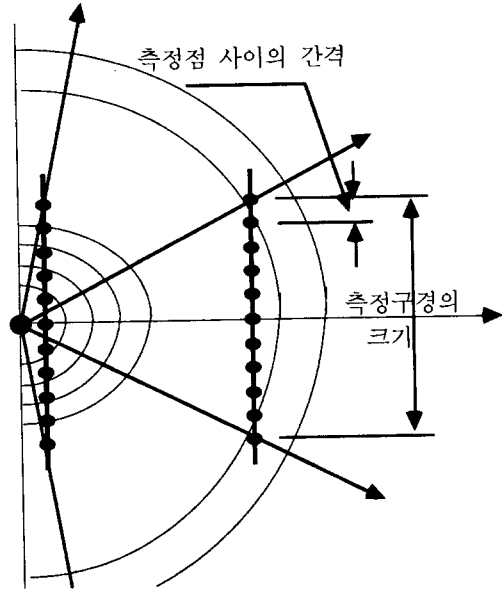


그림 2. 평면 음향 홀로그래피 적용시 홀로그램 평면 위치와 오차의 관계

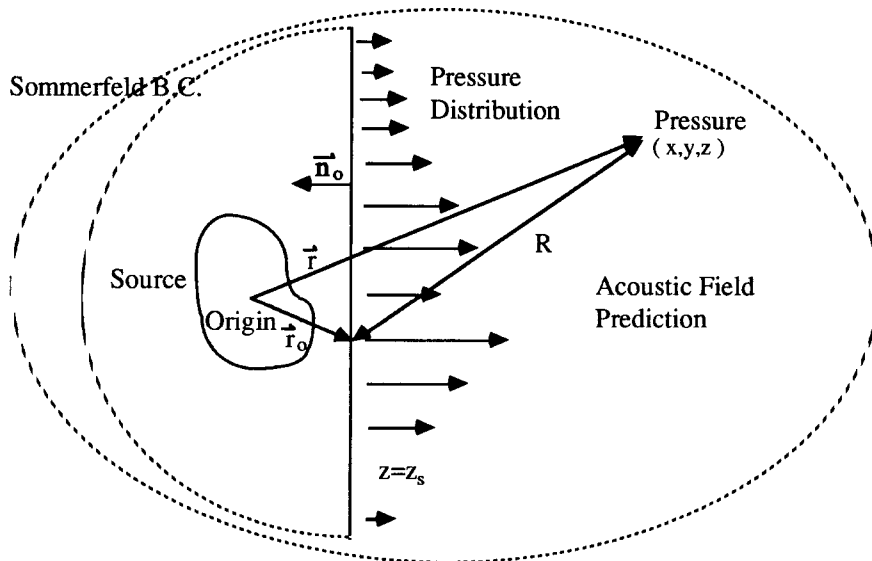


그림 1. 평면 음향 홀로그래피를 이용한 음장예측 방법

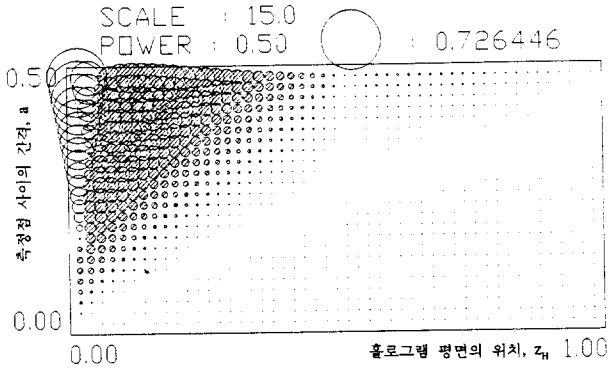


그림 3-a. 모의실험으로 구한 정규화된 크기 오차, $k_x=2$

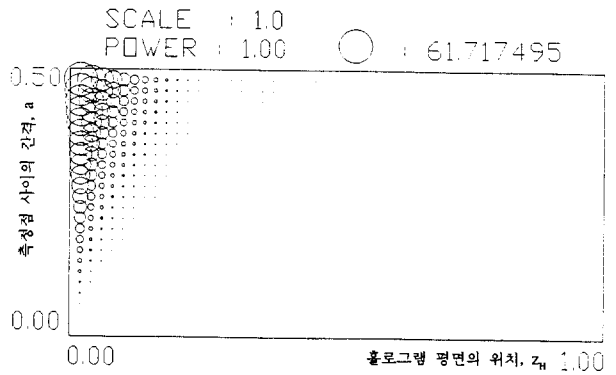


그림 4-a. 모의실험으로 구한 위상차, $k_x=2$

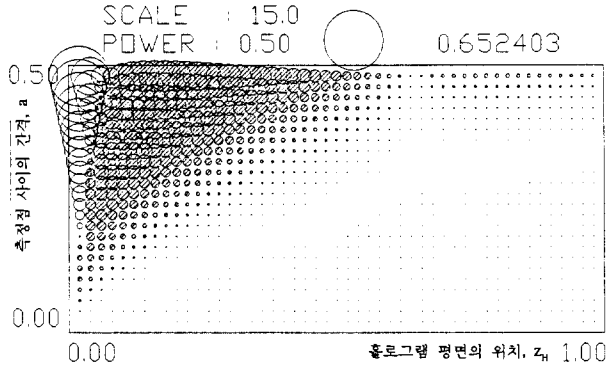


그림 3-b. 모의실험으로 구한 정규화된 크기 오차, $k_x=4$

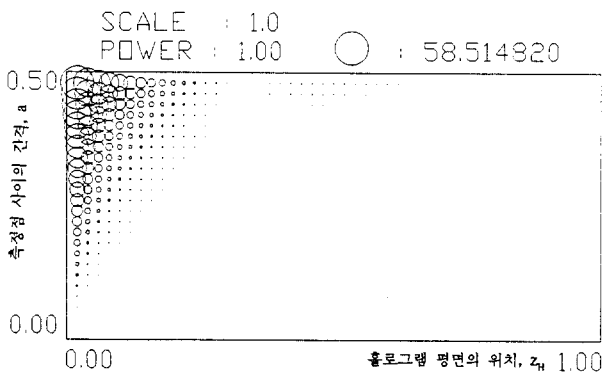


그림 4-b. 모의실험으로 구한 위상차, $k_x=4$

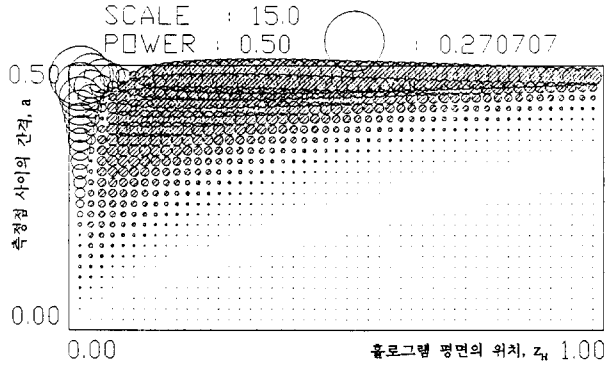


그림 3-c. 모의실험으로 구한 정규화된 크기 오차, $k_x=6$

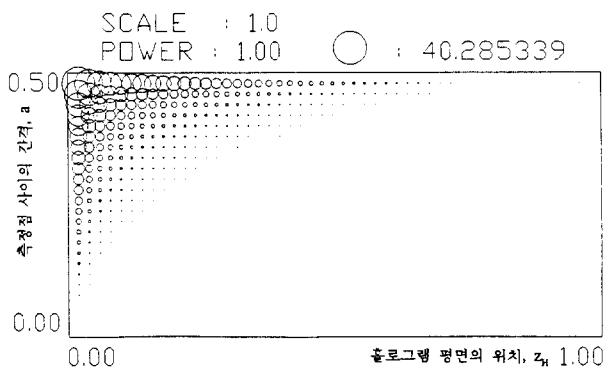


그림 4-c. 모의실험으로 구한 위상차, $k_x=6$