

# 주파수영역에서 비선형 연결부 매개변수의 실험적 규명

°김원진° 박윤식°

(Experimental Identification of Nonlinear Parameters in Frequency Domain)

(Won-Jin Kim, Youn-sik Park)

## 1. 서론

비선형연결부 (nonlinear joint)가 연결된 구조물을 해석하기 위해서는 비선형연결부의 모델변수 규명 (model parameter identification)이 필요하고, 이러한 비선형연결부의 모델변수를 이론적으로 규명하는 것은 실제 많은 오차를 포함할 뿐만 아니라 상당히 어려운 일이다. Masri와 Caughey 등 [1, 2]은 시간영역에서 직교 다항식 (orthogonal polynomial)을 이용해서 비선형계의 모델을 비매개변수법 (nonparametric method)으로 수립하였으나, 비선형요소에 관련된 모든 좌표의 가속도, 속도, 변위에 대한 정보를 모두 알아야 하므로 실제 적용상에 큰 제한을 받는다. Crawley 등 [3, 4]는 같은 방법을 힘-상태 사상법 (Force-State Mapping Technique)이라 정의하고, 비선형연결부 양단 사이의 비선형연결력을 연결부 양단의 상태 (상대속도, 변위)의 함수로 표현하여 비선형 모델변수를 규명하였다.

본 연구목적은 선형부분구조물과 그 부분구조물들을 결합하는 비선형연결부로 이루어진 구조물을 해석하기 위해 비선형연결부의 모델변수를 효과적으로 규명하는데 있다. 제안된 방법은 시간영역에서만 계산이 가능하였던 힘-상태 사상법을 주파수영역으로 확장함으로써, 전체구조물에서 선형부분구조물들은 분리 해석이 가능하고, 시간영역의 많은 데이터를 줄일 수 있는 장점이 있다. 제안된 방법의 타당성 및 장점을 검증하기 위해서 쿨롱마찰 비선형 특성을 갖는 두 가지의 구조물에 대하여 각각 실험적으로 연결부의 매개변수를 규명하였다.

## 2. 방법의 이론적 수식화

비선형연결부들이 선형부분구조물에 미치는 영향을 가상외력 (virtual external force)으로 처리한다. 그러면 m 개의 연결부가 연결된 k 번째 부분구조물의 주파수 응답은 다음과 같이 간단한 형태로 표현된다.

$$\{X(\omega)\}_k = H_k(\omega) (\{F(\omega)\}_k + \{F_j(\omega)\}) \quad (1)$$

where  $\{F(\omega)\}_k$  : external force,  $\{F_j(\omega)\}$  : joint force

부분구조물의 주파수응답함수 행렬  $H_k(\omega)$ 를 비선형연결부와 직접 연결된 좌표와 그의 좌표로 분리하여 식 (1)를 다시 쓰면 아래식과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \{X(\omega)\} \\ \{X_j(\omega)\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [H_{11}]_k & [H_{12}]_k \\ [H_{21}]_k & [H_{22}]_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{F_1(\omega)\} \\ \{F_2(\omega)\} + \{F_j(\omega)\} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

where  $\{\{F_1(\omega)\}^T \{F_2(\omega)\}^T\}$  : external force vector

$$H_k(\omega) = \begin{bmatrix} [H_{11}]_k & [H_{12}]_k \\ [H_{21}]_k & [H_{22}]_k \end{bmatrix}$$

여기서는 연결부 양단의 응답측정만으로 변수규명이 가능한  $\{X_j(\omega)\}$  부분의 식을 이용한다. 즉,

$$\begin{aligned} [H_{22}]_k \{F_j(\omega)\} &= \{X_j(\omega)\} - [H_{21}]_k \{F_1(\omega)\} \\ &\quad - [H_{22}]_k \{F_2(\omega)\} \end{aligned} \quad (3)$$

먼저 모델집합을 가정하여 m 개의 연결부에 의한 비선형연결력을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\{f_j(t)\} = \begin{Bmatrix} f_{11}(t)\theta_{11} + \dots + f_{1n_1}(t)\theta_{1n_1} \\ f_{21}(t)\theta_{21} + \dots + f_{2n_2}(t)\theta_{2n_2} \\ \vdots \\ f_{m1}(t)\theta_{m1} + \dots + f_{mn_m}(t)\theta_{mn_m} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

실험적으로 측정된 m 개 연결부양단의 상태 (상대속도, 변위)들을 식 (5)에 대입하므로 식 (4)를 구성하고, 양변을 푸리에 변환하면, 주파수영역에서 비선형연결력은 다음식으로 표현된다.

$$\{F_j(\omega)\} = \begin{Bmatrix} F_{11}(\omega)\theta_{11} + \dots + F_{1n_1}(\omega)\theta_{1n_1} \\ F_{21}(\omega)\theta_{21} + \dots + F_{2n_2}(\omega)\theta_{2n_2} \\ \vdots \\ F_{m1}(\omega)\theta_{m1} + \dots + F_{mn_m}(\omega)\theta_{mn_m} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

식 (6)을 식 (3)에 대입하여 비선형모델변수  $\theta_j$ 에 대한 수식으로 정리하여 결과식을 유도한다. 표기의 편리를 위해, 식 (3)의 우변을 다음과 같이 둔다.

$$\{R\} = \{X_j(\omega)\} - [H_{21}]_k \{F_1(\omega)\} - [H_{22}]_k \{F_2(\omega)\} \quad (7)$$

윗식 (7)에서의  $[H_{22}(\omega)]_k$ 는 m 행, m 열로 이루어진 주파수응답함수이므로 다음과 같이 표현할 수 있다.

\* : 한국과학기술원 기계공학과 (정희원)

$$[H_{22}(\omega)]_k = \begin{bmatrix} \alpha_{11}(\omega) & \alpha_{12}(\omega) & \cdots & \alpha_{1m}(\omega) \\ \alpha_{21}(\omega) & \alpha_{22}(\omega) & \cdots & \alpha_{2m}(\omega) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1}(\omega) & \alpha_{m2}(\omega) & \cdots & \alpha_{mm}(\omega) \end{bmatrix} \quad (8)$$

여기서 식 (6), (7), (8)을 식 (3)에 대입하여 비선형 모델변수  $\theta_{ij}$ 에 대해 정리하면 다음과 같은 결과식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11}F_{11} & \cdots & \alpha_{11}F_{1n_1} & \cdots & \alpha_{1m}F_{m1} & \cdots & \alpha_{1m}F_{mn_m} \\ \alpha_{21}F_{11} & \cdots & \alpha_{21}F_{1n_1} & \cdots & \alpha_{2m}F_{m1} & \cdots & \alpha_{2m}F_{mn_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1}F_{11} & \cdots & \alpha_{m1}F_{1n_1} & \cdots & \alpha_{mm}F_{m1} & \cdots & \alpha_{mm}F_{mn_m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{11} \\ \vdots \\ \theta_{n1} \\ \vdots \\ \theta_{m1} \\ \vdots \\ \theta_{mn_m} \end{Bmatrix} = \{R\} \quad (9)$$

식 (9)를 다음과 같이 간단히 표현하면,

$$[HF(\omega)] \{\theta\} = \{R\} \quad (10)$$

여기서  $\{\theta\}$ 는 실수이므로 실수부 (real part)와 허수부 (imaginary part)로 방정식을 나누어 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \text{Re}(HF(\omega)) \\ \text{Im}(HF(\omega)) \end{bmatrix} \{\theta\} = \begin{Bmatrix} \text{Re}(R) \\ \text{Im}(R) \end{Bmatrix} \quad (11)$$

위 식(11)을 이용하면 비선형 모델변수  $\theta$ 를 규명할 수 있다.

### 3. 현가 시험기에의 적용

#### 3.1. 현가 시험기 및 신호측정

차량 현가장치(suspension system)의 성능을 시험하기 위한 현가 시험기의 계변수(system parameters)를 본 연구에서 제안된 주파수 영역에서의 힘-상태 사상법과 기존의 시간영역방법을 각각 적용하여 구한다. 본 현가장치는 Fig.1의 사진에서 보는 바와 같이 반능동 감쇠기(semi-active damper)의 점성감쇠계수(c)를 변화시켜 질량체의 진동을 반능동적으로 현가 제어하는 장치이다. 반능동감쇠기의 쿨롱마찰(Coulomb friction)이 질량체의 비선형 거동을 발생시키는 주된 원인이기 때문에 연결부의 모델은 선형강성계수(k), 점성감쇠계수(c), 쿨롱마찰계수( $F_d$ )로 모델링하였다. 현가시험기의 질량체는 병진과 회전운동이 동시에 가능하지만 실험을 간편하게 하기 위해서 질량체의 한쪽 부분은 회전만 가능하도록 고정하였다. 가진 입력은 현가시험기 하부의 유압가진기를 통하여 입력된다. 모델변수 규명 및 규명된 모델변수의 검증을 위해서 다음과 같은 스텝사인(step sine)과 밴드랜덤(banded random) 함수를 각각 이용하였다.

#### i) 스텝사인 가진(step sine excitation)

주파수 : 1.6, 1.8, 2.0, ... , 3.4 [Hz] (10개)

이용 : 모델변수 규명

#### ii) 밴드랜덤가진(banded random excitation)

주파수 : 1.5 - 2.5, 2.5 - 3.5 [Hz]

이용 : 규명된 모델 검증

응답측정에 있어서 질량체의 변위( $x_r$ ), 연결부의 상대변위( $x_r - x_i$ )는 포텐시오 미터(potentiometer)의 신호를 저주파 필터링(low pass filter : Wavetek Model 852,  $f_c = 10$  [Hz])하여 측정하였다. 그리고 질량체의 가속도는 저주파용 가속도계(straingage type accelerometer : Kyowa YN-2490)를 이용하여 직접 측정하였다. 측정 신호의 샘플링 주파수(sampling frequency)는 100 [Hz], 데이터수는 1300 개로 하였다.

#### 3.2. 주파수영역 방법 적용

주파수영역 방법은 질량체의 변위와 연결부의 상대변위 측정만으로 연결부 변수 규명이 가능하다.

연결부 변수 규명에 있어서는 다음과 같은 선형 및 비선형 두 가지의 연결부 모델을 이용하였다.

$$f_j(t) = k(x_r - x_i) + c(\dot{x}_r - \dot{x}_i) \quad (12)$$

$$f_j(t) = k(x_r - x_i) + c(\dot{x}_r - \dot{x}_i) + F_d \frac{\dot{x}_r - \dot{x}_i}{|\dot{x}_r - \dot{x}_i|} \quad (13)$$

식(12), (13)의 모델을 제안한 주파수 영역에서의 힘-상태 사상법을 이용하여 모델변수를 각각 규명한다.

하나의 가진주파수에 대해서 실수부와 허수부로 두 개의 독립된 식을 얻을 수 있으므로 여기서는 10개의 가진주파수에 따른 응답( $x_r, x_i$ )을 이용해서 총 20개의 식을 구성할 수 있다. 여기서 구성된 식에 최소자승법을 적용하여 구한 최적변수는 Table 1에서 나타낸 바와 같다. 선형과 비선형 모델에서 각각 규명된 선형강성계수의 값은 큰 차이가 없으나 점성감쇠계수의 값은 큰 차이를 보이는데, 이것은 선형모델을 이용하여 모델변수를 구하는 경우에 쿨롱마찰이 점성감쇠에 포함되어 피팅되기 때문이다.

규명된 모델 변수를 검증하기 위해서 두 가지의 주파수 대역에서 랜덤가진을 하여 직접 질량체에서 측정된 가속도 신호와 규명된 모델변수로부터 계산된 가속도를 비교한 결과를 Fig.2, 3에 나타내었다.

#### 3.3. 시간영역 방법 적용

기존에 제안된 시간영역에서의 힘-상태 사상법을 적용하기 위해서는 주파수영역에서의 변수규명에서 사용된 질량체의 변위와 연결부의 상대변위 외에 상대속도 및 질량체의 가속도가 더 필요하게 된다. 이 방법을 적용할 경우에는 시간축의 임의의 한 상태에서 변수규명을 위한 식이 하나씩 존재하기 때문에 하나의 가진 주파수에 대하여 1300 개의 응답 데이터를

측정할 경우에 1300 개의 식이 얻어진다. 따라서 가진주파수를 10 개로 하면 총 13000 개의 식을 이루게 되므로 변수규명 시에 행렬크기(matrix size)가 매우 커서 계산에 어려운 점이 많다.

따라서 각 가진주파수에 대해서 시간축에서 20개의 점만 선택하여 총 200 개의 식에서 최적변수를 구하였다. 규명된 변수의 결과는 Table 2 에 나타내었다. 주파수영역에서 규명된 결과와 비교하여 보면 선형강성계수와 점성감쇠계수는 각각 6.5 %, 2.0 % 로 큰 차이가 없으나 쿨롱마찰계수는 67.0 % 로 큰 차이를 보이고 있다.

#### 4. 보 구조물의 쿨롱마찰계수 규명

##### 4.1. 실험장치

고정자유단(clamped & free ends)을 갖는 보구조물의 자유단에 박판 스프링(thin plate spring)을 장착하여 보가 진동할 때 박판 스프링과 고정된 알루미늄 면 사이에 마찰이 발생하도록 Fig.4 에서와 같이 구성하였다. 이 때 중요한 것은 마찰을 연속적으로 일어나게 하고, 거시적으로 주어진 가진조건에서 마찰현상의 재현성이 보장되어야 한다.

제한된 주파수 영역 힘-상태 사상법의 검증 측면에서 실험을 수행하였으므로 가진기를 이용하여 주파수응답함수를 측정하기 쉬운 감쇠값이 큰 폴리에틸렌 재질을 갖는 보를 사용하였다.

##### 4.2. 쿨롱마찰계수 규명

보의 진동을 감쇠시키는 마찰력을 규명하기 위해서는 우선 마찰이 없는 상태에서 보의 선형 주파수응답함수가 필요하다.

Fig.5는 보에 마찰이 없는 상태에서 자유단을 랜덤가진하여 구한 자유단의 주파수응답함수(point mobility)를 나타낸 것이다. 변수규명에 필요한 주파수응답함수가 구해지면 변수규명에 이용할 주파수 선정이 필요하게 된다. 여기서는 보의 2 번째와 4 번째 모드에 해당되는 주파수 28~32 Hz와 82~86 Hz를 1 Hz 간격으로 각각 5 개씩 선정하였다. 쿨롱마찰력(Coulomb friction force)에 대한 모델은 다음과 같은 부호함수가 이용되었다.

$$f_c(t) = F_d \operatorname{sig}(\dot{x}) \quad (14)$$

선형 주파수응답함수와 정현파 가진으로 얻어진 비선형응답을 이용하면 식(5-1)의 비선형변수  $F_d$ 를 규명할 수 있다. 즉 쿨롱마찰계수  $F_d$ 를 규명하기 위한 주파수영역의 식은 다음과 같다.

$$X(\omega) = H(\omega) \{F_c(\omega) + F_j(\omega)\} \quad (15)$$

$$\text{where } F_j(\omega) = F_d F \{\operatorname{sig}(\dot{x})\}$$

$$F_c(\omega) : \text{input force}$$

Table 3 은 가진주파수에 따른 쿨롱마찰계수 및 10 개의 방정식에서 최소자승법으로 구한 최적계수값

(optimum)을 나타낸 것이다. 결과에서 보면 2 번째 모우드의 경우에 있어서는 쿨롱마찰계수가 0.359 N을 가지고 4 번째 모우드에서는 0.602 N을 가진다. 이 두 값이 차이가 나는 이유는 쿨롱마찰계수 규명시에 이용된 응답변위의 최대치( $x_{\max}$ )가 다르고, 보 자유단의 변위가 큰 경우에는 박판 스프링의 수직력이 평균적으로 적어지기 때문이다. 규명된 쿨롱마찰계수의 타당성을 검증하기 위해서 두 모우드를 기준으로 각각 36 Hz 주파수대역을 갖는 랜덤입력을 이용하여 측정된 자유단의 응답과 규명된 마찰계수로부터 계산된 응답을 비교하였다. Fig.6-(a)와 (b)는 각각 12~44 Hz, 66~98 Hz의 주파수대역을 갖는 랜덤입력을 주었을 경우에 측정된 응답과 계산된 응답을 비교한 것이다.

#### 5. 결론

주파수영역에서의 힘-상태 사상법은 시간영역 방법에 비하여 아주 적은 수의 방정식으로 구성되기 때문에 데이터 감소효과(data reduction effect)가 크고 응답의 속도 및 가속도 측정없이 변위측정만으로 가능하다. 또한 잡음에 민감한 시간영역방법과는 달리 가진주파수 성분만 분리하여 결과식을 구성하므로써 잡음에 덜 민감한 결과를 얻을 수 있는 장점이 있다.

실험에 적용된 현가시험기의 모델은 반능동감쇠기의 쿨롱마찰이 무시할 수 없을 정도로 커서 선형모델만으로는 불충분하다. 쿨롱마찰모델을 포함시킨 비선형 모델을 이용하여 주파수 영역에서 모델변수를 규명한 결과 어느 정도 정확한 시험기 질량체의 응답을 예측할 수 있었다.

보의 쿨롱마찰계수 규명 실험 결과에서 알 수 있듯이 제안된 방법은 임의의 경계조건을 갖는 비선형 구조물에 적용하여 비선형연결부의 변수를 규명하는데 효과적인 방법이다.

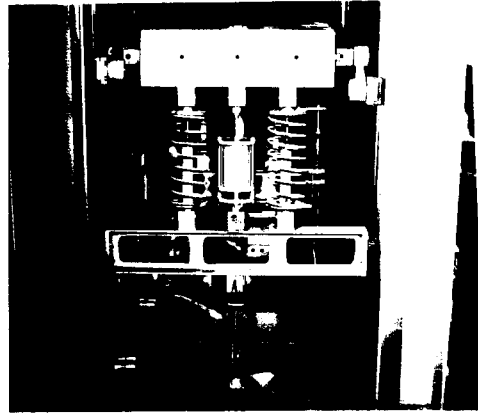
#### 참고문헌

- (1) S. F. Masri, R. K. Miller, A. F. Saud, and T. K. Caughey, "Identification of Nonlinear Vibrating Structures : Part I - Formulation, " Trans. of ASME, J. of Applied Mechanics, Vol.54, December 1987, pp 918-922.
- (2) S. F. Masri, R. K. Miller, A. F. Saud, and T. K. Caughey, "Identification of Nonlinear Vibrating Structures : Part II - Application, " Trans. of ASME, J. of Applied Mechanics, Vol.54, December 1987, pp 923-929.
- (3) E. F. Crawley and A. C. Aubert, "Identification of Nonlinear Structural Element by Force-State Mapping, " AIAA Journal, Vol.24(1), January 1986, pp 155-162.
- (4) E. F. Crawley and K. J. O'Donnell, " Force-State Mapping Identification of Nonlinear Joints, " AIAA Journal, Vol.25(7), July 1987, pp 1003-1010.
- (5) Sang-Seol Lee and Youn-sik Park, "Position of Nonlinear element and Identification of their Type by a Local Non-Parametric Method," Mechanical Systems and Signal Processing, Vol.5(5), 1991, pp 403-420.

**Table 1** The results of identified parameters using frequency domain method

model	K [N/m]	C [N-s/m]	$F_d$ [N]
linear	6259.1	392.0	.
	$c=68.5$	$c=70.1$	
nonlinear	6378.2	184.6	12.3
	$c=69.8$	$c=33.0$	$c=12.3$

$c$  : contribution rate to joint force  
 $(x_r - x_i)_{\max} = 0.0109$  [m]  
 $(\dot{x}_r - \dot{x}_i)_{\max} = 0.1787$  [m/s]



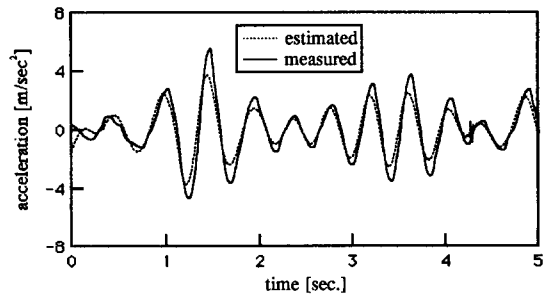
**Fig. 1** Photograph of suspension testing system

**Table 2** The results of identified parameters using time domain method

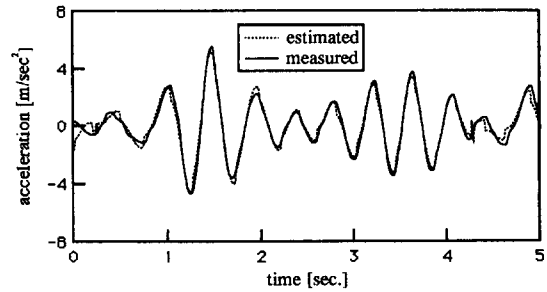
model	K [N/m]	C [N-s/m]	$F_d$ [N]
nonlinear	6790.6	188.5	4.1
	$c=74.0$	$c=33.7$	$c=4.1$
	$MSE_1 = 8.7$ [%]	$MSE_2 = 8.1$ [%]	

**Table 3** The results of identified Coulomb friction parameters

2-th mode		4-th mode	
Freq. [Hz]	$F_d$ [N]	Freq. [Hz]	$F_d$ [N]
28	0.358	82	0.563
29	0.349	83	0.616
30	0.341	84	0.631
31	0.336	85	0.598
32	0.333	86	0.576
optimum	0.359	optimum	0.602
$\dot{x}_{\max} = 0.749$ [m/sec.]		$\dot{x}_{\max} = 0.725$ [m/sec.]	
$x_{\max} = 3.898$ [mm]		$x_{\max} = 1.340$ [mm]	

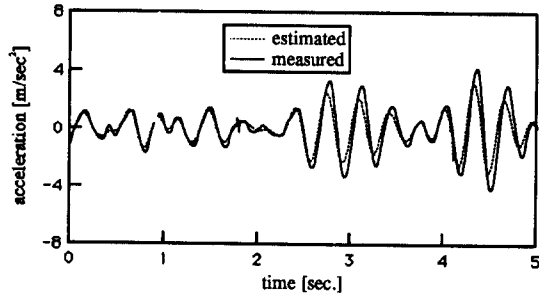


(a) the case using linear model (MSE = 11 %)

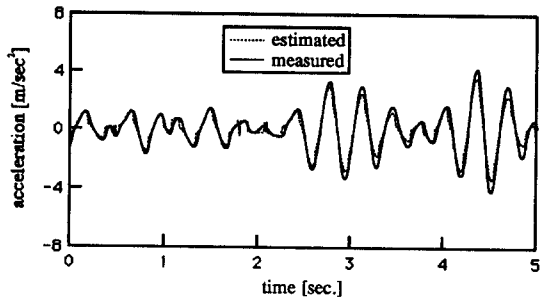


(b) the case using nonlinear model (MSE = 4.0 %)

**Fig. 2** Measured and estimated acceleration when the input has 1.5~2.5 Hz frequency band

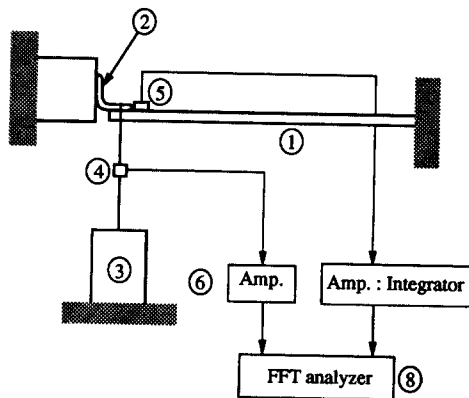


(a) the case using linear model (MSE = 17.2 %)



(b) the case using nonlinear model (MSE = 6.5 %)

Fig. 3 Measured and estimated acceleration when the input has 2.5~3.5 Hz frequency band



- ① polyethylene beam (30×8×590 mm)
- ② plate spring (Coulomb friction)
- ③ exciter (B&K # 4371)
- ④ force transducer (laboratory maded)

Fig. 4 Beam structure having Coulomb friction

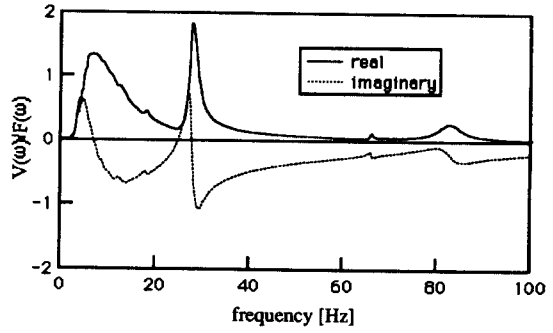
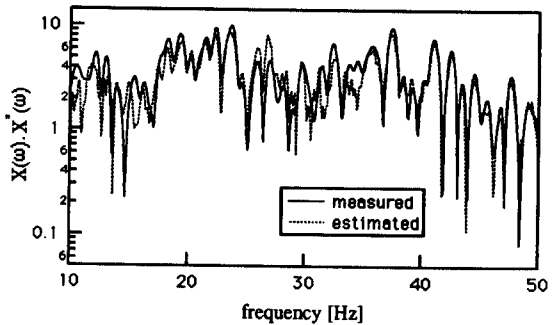
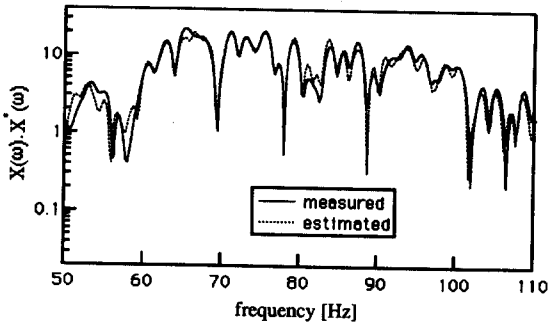


Fig. 5 Linear mobility at beam free end



(a) the input has 12~44 Hz frequency band



(b) the input has 66~98 Hz frequency band

Fig. 6 Measured and estimated response power spectrum