

# 보완된 수치해법을 이용한 나선형 스프링의 동해석

\*김성훈\* 박윤식\*

## (Dynamic Analysis of a Helical Spring Using an Extended Numerical Scheme)

(Sung-Hoon Kim, Youn-sik Park)

### 1. 서론

기계구조물이 고속화, 경량화됨에 따라 더 정밀한 구조물의 설계 및 해석이 요구되어지고 있고, 이에 따라 단속적모형 보다 한 단계 더 나아가 분포변수모형으로 구조물을 모형화하게 된다. 특히 나선형 스프링은 기계구조물에서 가장 널리 사용되는 일반적인 요소로서, 그 형상이 공간상의 굽은 봉 형상이므로 연성된 편미분방정식 형태로 지배방정식이 기술된다. 나선형 스프링 해석은 Michell(1890) 과 Love(1899)의 정적 해석을 시작으로 Phillips 와 Costello [1]의 'Simple Theory' 및 Wittrick [3]의 지배방정식등 매우 복잡한 연성된 편미분방정식 형태를 지니고 있다. 그러나 이와 같은 편미분방정식은 해석하기가 매우 어려워 수치해법으로도 간단한 경우에 한해서만 해석하여 왔다.

본 연구에서는 이와 같은 연성된 편미분방정식을 해석하기 위하여 보다 구조진동문제에 적합한 수치해법을 제안하고, 이를 이용하여 나선형 스프링의 강제과도진동 응답을 정확하고 효율적으로 구하였다.

### 2. 수치해법

#### 2.1 알고리즘

일반적으로 구조물의 동적거동을 묘사하는 초기 및 경계치 문제, 즉 아래와 같은 편미분방정식을 대상으로 보면,

$$\sum_{i=0}^p a_{p-i}(x,t) D_x^{(p-i)} u + \sum_{i=0}^q b_{q-i}(x,t) D_x^{(q-i)} v + \sum_{i=0}^2 d_{2-i}(x,t) D_t^{(2-i)} u = f_u(x,t)$$

$$\sum_{i=0}^k e_{k-i}(x,t) D_x^{(k-i)} v + \sum_{i=0}^m g_{m-i}(x,t) D_x^{(m-i)} u + \sum_{i=0}^2 h_{2-i}(x,t) D_t^{(2-i)} v = f_v(x,t) \quad (1)$$

where  $D_x^j = \frac{\partial^j}{\partial x^j}$ ,  $D_t^j = \frac{\partial^j}{\partial t^j}$  and  $p \geq m$ ,  $k \geq q$

이와같이 나타나고, 여기서  $x$  공간영역에서  $p, k$ 개의 경계조건들과  $t$  시간영역에서의 초기조건들이 존재하고,  $f_u$  와  $f_v$ 는 외부에서 계에 가해지는 항을 의미한다.

이러한 지배방정식의 해를 구하기 위해 구조진동 문제의 상미분방정식 해법으로 널리 사용되고 있는 Newmark [4] 개념을 공간영역에도 확장 적용하여 편미분방정식을 유한차분 원리로 직접 적분하여 해를 구하고자 한다. Fig. 1 과 같이 시간영역 뿐만아니라 공간영역도 미소구간으로 나눈 후, 각 구간에서 최고차 편미분항들을 선형 혹은 평균값으로 표현하고, 각 구간내에서 표현된  $u^m$ 을  $\tilde{x}$ 에 대해서  $n$ 번 적분한 후  $\tilde{x}$ 를  $\Delta x = x_{i+1} - x_i$ 로 치환하고 정리하면, 아래와 같이  $u_{i+1}^{(n)}, u_{i+1}^{(n-1)}, \dots, u_{i+1}^{(1)}$ 은  $u_i^{(n)}, u_i^{(n-1)}, \dots, u_i^{(1)}, u_i$  및  $u_{i+1}$ 로 나타낼 수 있다. 여기서 윗 첨자 ( $n$ )은  $x$ 에 대한  $n$ 번 편미분을 의미한다.

$$\begin{aligned} u_{i+1}^{(n)} &= X_{n,0}^n (u_{i+1} - u_i) - X_{n,1}^n u_i^{(1)} - \dots - X_{n,n}^n u_i^{(n)} \\ u_{i+1}^{(n-1)} &= X_{n-1,0}^{n-1} (u_{i+1} - u_i) - X_{n-1,1}^{n-1} u_i^{(1)} - \dots - X_{n-1,n}^{n-1} u_i^{(n)} \\ u_{i+1}^{(n-2)} &= X_{n-2,0}^{n-2} (u_{i+1} - u_i) - X_{n-2,1}^{n-2} u_i^{(1)} - \dots - X_{n-2,n}^{n-2} u_i^{(n)} \\ &\vdots \\ u_{i+1}^{(1)} &= X_{1,0}^1 (u_{i+1} - u_i) - X_{1,1}^1 u_i^{(1)} - \dots - X_{1,n}^1 u_i^{(n)} \end{aligned} \quad (2)$$

여기서  $X^n$ 은 편미분방정식에서의 편미분 최고차항 차수  $n$ , 미소값  $\Delta x = (x_{i+1} - x_i)$ 에 따라 결정되는 상수이다. 미참가지로 시간영역에서도 미소구간  $\Delta t = (t_{j+1} - t_j)$ 에 대해서 표현하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \ddot{u}_{j+1} &= W_{2,0}^2 (u_{j+1} - u_j) - W_{2,1}^2 \dot{u}_j - W_{2,2}^2 \ddot{u}_j \\ \dot{u}_{j+1} &= W_{1,0}^1 (u_{j+1} - u_j) - W_{1,1}^1 \dot{u}_j - W_{1,2}^1 \ddot{u}_j \end{aligned} \quad (3)$$

여기서  $\cdot$  (dot)는 시간에 대한 편미분을 의미한다. 식 (2), (3)을 식 (1)에 대입하고 정리하면 아래와 같은 변형된 대수식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} U_{i+1,j+1}^T &= \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}_{i+1,j+1} = \\ &= \begin{bmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & \dots & A_p & B_0 & B_1 & B_2 & \dots & B_k \\ G_0 & G_1 & G_2 & \dots & G_p & E_0 & E_1 & E_2 & \dots & E_k \end{bmatrix}_{i+1,j+1} U_{s,i,j+1}^T \\ &+ \begin{bmatrix} D_0 & D_1 & D_2 & C_0 & C_1 & C_2 \\ Q_0 & Q_1 & Q_2 & H_0 & H_1 & H_2 \end{bmatrix}_{i+1,j+1} U_{i,i,j}^T \\ &+ \Gamma_{i+1,j+1} \begin{Bmatrix} f_u \\ f_v \end{Bmatrix}_{i+1,j+1} \quad (4) \\ &= S_{i+1,j+1} U_{s,i,j+1}^T + T_{i+1,j+1} U_{i,i,j}^T + \Gamma_{i+1,j+1} f_{i+1,j+1} \quad (5) \end{aligned}$$

\* : 한국과학기술원 기계공학과 (정희원)

$$\text{where } U_{s, i, j+1} = \{u \ u^{(1)} \ u^{(2)} \ \dots \ u^{(p)} \ v \ v^{(1)} \ v^{(2)} \ \dots \ v^{(k)}\}_{i, j+1}$$

$$U_{i, j+1} = \{\ddot{u} \ \ddot{v}\}_{i, j+1}$$

여기서 첨자  $i$  는 공간영역을,  $j$  는 시간영역을 의미하며, 행렬내의 요소들은 부록 A 에 나타내었다.

$i = 0, j = 0$  즉 시작하는 단계에서는 양단의 경계조건, 운동방정식 그리고 초기조건등을 이용하여  $U_{s, 0, 1}$ ,  $U_{i, 1, 0}$  을 구하여  $U_{i, 1, 1}$  을 구하고, 계속하여 각 전 단계의  $U_{s, i, j+1}$ ,  $U_{i, i, j+1}$  을 이용하여  $U_{i, i, j+1}$  을 구한다. 그리고 각 편미분항들은 식 (2), (3) 을 이용하여 구한다.

## 2.2 초기조건 및 경계조건

제안된 알고리즘은 경계조건들을 주어진 양단 경계들만의 직접적인 대수관계식으로 나타내어, 간단하고 정확하게 경계조건들을 만족시키면서 공간영역을 적분하도록 한다.  $U_{s, end, j+1}$  을 직접적으로  $U_{s, 0, j+1}$  으로 나타내기 위해서 식 (5) 에  $i = end - 1$  을 대입하면 아래식으로 나타내어 진다.

$$U_{end, j+1}^T = S_{end, j+1} U_{s, end-1, j+1}^T + T_{end, j+1} U_{i, end, j}^T + \Gamma_{end, j+1} f_{end, j+1} \quad (6)$$

여기서 RHS 의 둘째항은 시간영역에서  $j$  번째 단계의 값이므로 알고 있는 항이고, 또한 세번째항도 외부에 의해 주어지는 항이므로 전 공간 및 시간영역에서 알고 있는 항이다. 그러므로 아래와 같이 간단히 나타내고 정리한다.

$$U_{end, j+1}^T = S_{end, j+1} U_{s, end-1, j+1}^T + IE_{end}^T \quad (7)$$

$$IE_{end}^T = \begin{cases} IE_u \\ IE_v \end{cases}_{end} = T_{end, j+1} U_{i, end, j}^T + \Gamma_{end, j+1} f_{end, j+1}$$

부록 B 의 행렬  $\Lambda$  와  $\Omega$  를 이용하면 아래와 같이  $U_{s, end-2, j+1}$  로 나타낼 수 있고, 그 형태는 식 (7) 과 동일하다.

$$U_{end, j+1}^T = S \Lambda \Omega U_{s, end-2, j+1}^T + (S \Lambda IE_{end-1}^T + IE_{end}^T) \quad (8)$$

Where  $IE_i^T = \{IE_u \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ IE_v \ 0 \ 0 \ \dots \ 0\}_i^T$   
p+1 개 k+1 개

그러므로 Fig. 3 의 흐름도와 같이  $\Lambda$  와  $\Omega$  를 계속 반복적으로 실행함으로써,  $U_{end, j+1}$  은  $U_{s, 0, j+1}$  과 시간영역에서 알고 있는 관성 및 외부에 의한 항들로 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$U_{end, j+1}^T = S_{end, j+1}^* U_{s, 0, j+1}^T + IE^{*T} \quad (9)$$

그리고 공간영역 편미분항들에 대한 경계조건이 있으므로  $(end, j+1)$  의  $x$  에 대한 편미분항들도  $U_{s, 0, j+1}$  로 나타내어야 한다. 부록 B 의 행렬  $\Phi$  를 이용하여 임의의 편미분 차수  $n1, n2$  에 대해서 정리하면 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} u^{(n1)} \\ v^{(n2)} \end{Bmatrix}_{end, j+1} = \Phi \Omega U_{s, end-1, j+1}^T + \Phi IE_{end}^T$$

$$= S_{(n1, n2)}^* U_{s, end-1, j+1}^T + IE_{(n1, n2)}^{*T} \quad (10)$$

윗 식의 형태도 식 (7) 과 같으므로 변위에 대한 경계조건 처리과정과 같은 방법을 이용하면 아래와 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} u^{(n1)} \\ v^{(n2)} \end{Bmatrix}_{end, i+1} = S_{(n1, n2)}^* U_{s, 0, j+1}^T + IE_{(n1, n2)}^{*T} \quad (11)$$

그러므로 식 (9), (11) 을 이용하여  $U_{s, 0, j+1}$  의 미지 편미분항을 주어진 경계조건들과 지배방정식들을 이용하여 구할 수 있다.

## 2.3 안정성, 일관성 그리고 수렴성

안정성해석을 하기 위해서 구조진동문제의 대표적인 형태인 2차 비감쇠 파동방정식에 대해서 생각해 보면,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (12)$$

식 (12) 의 방정식에서 각  $i-1, i, i+1$  과  $j-1, j, j+1$  의 편미분방정식과 제안된 알고리즘의 기본 개념인 식 (2), (3) 등을 이용하여 유한차분방정식 형태로 다시 정리하여 나타내면 아래와 같다.

$$\begin{aligned} & (v^2 \beta_t - \beta_x) (u_{i+1, j+1} - u_{i-1, j+1} + u_{i+1, j-1} - u_{i-1, j-1}) \\ & - \{2 (v^2 \beta_t - \beta_x) + 1\} (u_{i, j+1} + u_{i, j-1}) \\ & + \{v^2 - 2 (v^2 \beta_t - \beta_x)\} (u_{i+1, j} + u_{i-1, j}) \\ & - \{4 (v^2 \beta_t - \beta_x) - 2 (v^2 - 1)\} u_{i, j} = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

where  $v^2 = \frac{a^2 \Delta t^2}{\Delta x^2}$ ,  $\beta_t, \beta_x$ : 각 편미분 최고차항 표현 방법에 따른 상수

절단오차 (truncation error),  $\epsilon(x, t)$  가 식 (13) 을 만족하므로 한개의 해를 다음과 같이 가정하고

$$\epsilon_{ij} = e^{\alpha \Delta t j} e^{\sqrt{-1} \alpha \Delta x i} \quad (14)$$

식 (13)에 대입한 후 정리하면, 알고리즘이 안정하기 위한 조건  $|e^{\alpha \Delta t}| \leq 1$  이 되기 위한 아래의 조건식을 얻을 수 있다.

$$\left( 1 - \frac{2 v^2 \sin^2 \frac{\omega \Delta x}{2}}{1 + 4 (v^2 \beta_t - \beta_x) \sin^2 \frac{\omega \Delta x}{2}} \right)^2 - 1 \leq 0 \quad (15)$$

그러므로 Fourier Stability Method[5] 에 의해 시간영역에서 최고차 편미분항을 평균값으로 가정하면 항상 안정하고, 시간영역에서 최고차 편미분항을 선형으로 가정하면 공간영역을 선형으로 표현해야만 안정조건이  $v^2 \leq 1$  일때 안정하다.

또 식 (13)에 정해 (exact solution)을 대입하고 정리하면 아래와 같다.

$$\left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{i,j} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{i,j} \right] + \frac{1}{12} \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_{i,j} \Delta x^2 - \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} \Big|_{i,j} \Delta t^2 \right) + \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} \Big|_{i,j} \left( \Delta t^2 \beta_t - \frac{1}{a^2} \Delta x^2 \beta_x \right) + O(\Delta x^4, \Delta t^4) = 0 \quad (16)$$

식 (16)에서 보면 2차 파동방정식의 경우 절단오차의 오더가  $O[(\Delta x)^2, (\Delta t)^2]$  이고, 절단오차가 미소구간 세분화에 의해 영으로 가므로, 제안된 알고리즘은 일관성이 있다.

그러므로 제안된 알고리즘은 안정하고, 일관성이 있으므로 수렴성을 보장할 수 있다.

### 3. 나선형 스프링

Fig. 4와 같은 나선형 스프링의 지배방정식은 참고 문헌[1], [2], [3]에서와 같이 연성된 편미분방정식들로 나타난다. 참고문헌[1], [2]는  $u, \theta$ , 그리고  $\theta$ 를 무시하여 수직운동과 비틀림운동을 고려한 방정식들로 3차원 곡선 형상의 가늘고 긴 보인 나선형 스프링을 묘사하기에는 부적합하다. 그러므로 모든 3 방향의 변위 및 회전을 고려하여 곡선 보의 연성효과를 잘 묘사하고 전단 변형 (shear deformation) 및 회전 관성 (rotary inertia) 효과까지 고려한 편미분방정식은 아래와 같이 나타난다[3].

$$\rho A \ddot{u} - A G \gamma u' + (\kappa^2 A E + \tau^2 A G \gamma) u + 2 \tau A G \gamma v' - (\kappa A E + \kappa A G \gamma) w' + \tau A G \gamma \theta_u + A G \gamma \theta_v' = 0$$

$$\rho A \ddot{v} - A G \gamma v'' + \tau^2 A G \gamma v - 2 \tau A G \gamma u' - \kappa A G \gamma w + \tau A G \gamma \theta_v - A G \gamma \theta_u' = 0$$

$$\rho A \ddot{w} - A E w'' + \kappa A G \gamma w + (\kappa A E + \kappa A G \gamma) u' - \kappa A G \gamma v - \kappa A G \gamma \theta_v = 0$$

$$\rho A k_u^2 \ddot{\theta}_u - E I \theta_u'' + \tau A G \gamma u + A G \gamma v' + (A G \gamma + \kappa^2 G I + \tau^2 E I) \theta_u + 2 \tau E I \theta_v' - (\kappa G + \kappa E I) \theta_w' = 0$$

$$\rho A k_v^2 \ddot{\theta}_v - E I \theta_v'' + (A G \gamma + \tau^2 E I) \theta_v - A G \gamma u' + \tau A G \gamma v - \kappa A G \gamma w - 2 \tau E I \theta_u' - \kappa E I \theta_w = 0$$

$$\rho A k_w^2 \ddot{\theta}_w - G J \theta_w'' + \kappa^2 E I \theta_w + (\kappa E I + \kappa G I) \theta_u' - \kappa E I \theta_v = 0 \quad (17)$$

where  $A$  = cross-sectional area,  $E$  = Young's modulus

$\gamma$  = shear coefficient,  $G$  = shear modulus

$I$  = moment of area,  $J$  = polar moment of area

$\kappa = (1/R) \cos^2 \alpha$ ,  $\tau = \kappa \tan \alpha$ ,  $\alpha$  = pitch angle

$R$  = helix radius,  $\rho$  = density

$k_u, k_v, k_w$  = radii of gyration of the wire cross-section

실제의 기계 구조물에서 사용되는 경우와 같이 Fig. 4의 아크릴 판을 자유단에 붙이고  $F_s(L,t)$ 로 가진하는 경우에 아래와 같은 경계조건으로 표시할 수 있다.

B. C. : fixed end,  $s = 0, t > 0$

$$u = v = w = \theta_u = \theta_v = \theta_w = 0$$

free end,  $s = L, t > 0$

$$u' = \tau v - \kappa w + \theta_v + \frac{1}{A G \gamma} [M_{acryl} \ddot{u} - F_u(t)]$$

$$v' = -\tau u - \theta_u + \frac{1}{A G \gamma} [M_{acryl} \ddot{v} - F_v(t)]$$

$$w' = \kappa u + \frac{1}{A E} [M_{acryl} \ddot{w} - F_w(t)]$$

$$\theta_u' = \tau \theta_v - \kappa \theta_w + \frac{1}{E I} \left[ M_{acryl} \frac{a^2 + c^2}{12} \ddot{\theta}_u - M_u(t) \right]$$

$$\theta_v' = -\tau \theta_u + \frac{1}{E I} \left[ M_{acryl} \frac{a^2 + b^2}{12} \ddot{\theta}_v - M_v(t) \right]$$

$$\theta_w' = \kappa \theta_u + \frac{1}{G J} \left[ M_{acryl} \frac{b^2 + c^2}{12} \ddot{\theta}_w - M_w(t) \right] \quad (18)$$

그리고 초기조건은 모두 영으로 하였다.

Fig. 5는  $F_s(L,t) = \sin(2\pi 50t)$ 로 가진될 때의 결과이다.  $F_u(s,t), M_u(s,t)$  ( $0 \leq s \leq L$ )가 영인데도 결과를 보면 연성효과에 의해 모든 방향의 응답이 무시하지 못할 만큼 발생하는 것을 알 수 있다. 즉 스프링에 지지대가 있을 경우 마모, 피로파괴 등이 생길 우려가 있는 것이다.

### 4. 결론

본 연구에서는 나선형 스프링의 연성된 편미분방정식을 제안된 수치해법을 이용하여 해석하였다.

제안된 수치해법은 단-단계, 암시적 방법이고, 안정성, 일관성 및 수렴성을 수학적으로 증명하였다. 또한 차분형태가 각 단계에서의 편미분항으로 기술되어 지므로 물리적 의미가 있는 편미분항을 직접 구할 수 있고, 경계에서 편미분항들을 직접 처리할 수 있다.

그리고 복잡하게 연성된 나선형 스프링의 지배방정식을 제안된 수치해법을 이용하여 해석하였는데, 나선형 스프링은 모든 방향의 응답이 서로 연성되어 나타나는 것을 알 수 있었다.

### 5. 참고 문헌

1. J. W. Phillips and G. A. Costello, "Large deflection of impacted helical springs," The J. of the Acoustical Society of America, Vol. 51, No. 3, pp. 967-973, 1972
2. W. Jiang, T. L. Wang and W. K. Jones, "The Forced Vibration of Helical Springs," Int. J. Mech. Sci. Vol. 34, No. 7, pp. 549-562, 1992
3. W. H. Wittrick, "On Elastic Wave Propagation in Helical Spring," Int. J. Mech. Sci. Vol. 8, pp. 25-47, 1966
4. N. M. Newmark, "A Method of Computation for Structural Dynamics," J. of the Engineering Mechanics Division, ASCE, pp. 67-94, 1959
5. W. F. Ames, Numerical Methods for Partial Differential Equations, 2nd ed., Academic Press, Inc., 1977

### 부록 A

1. 식 (5) 행렬 내의 요소들에 대한 설명

$$\frac{1}{\Gamma} = \alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2$$

$$\alpha_1 = \bar{A}_0 + \bar{D}_0 + a_0 + d_0, \quad \alpha_2 = \bar{G}_0 + g_0$$

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \bar{B}_0 + b_0, \quad \beta_2 = \bar{E}_0 + \bar{H}_0 + e_0 + h_0 \\ A_r &= \Gamma(\beta_2 \bar{r}, -\beta_1 \bar{G}), \quad F_r = \Gamma(\alpha_1 \bar{G}_r - \alpha_2 \bar{A}) \quad (r=0, 1, \dots, p) \\ B_r &= \Gamma(\beta_2 \bar{b}_r - \beta_1 \bar{E}), \quad E_r = \Gamma(\alpha_1 \bar{E}_r - \alpha_2 \bar{B}) \quad (r=0, 1, \dots, k) \\ D_r &= \Gamma\beta_2 \bar{D}_r, \quad C_r = (-)\Gamma\beta_1 \bar{H}_r \\ \bar{Q}_r &= (-)\Gamma\alpha_2 \bar{D}_r, \quad H_r = \Gamma\alpha_1 \bar{H}_r \quad (r=0, 1, 2) \\ \bar{A}_s &= \sum_{r=1}^p a_r X_{r,s}^p, \quad \bar{G}_s = \sum_{r=1}^m g_r X_{r,s}^p \quad (s=0, 1, 2, \dots, p) \\ \bar{B}_s &= \sum_{r=1}^q b_r X_{r,s}^k, \quad \bar{E}_s = \sum_{r=1}^k e_r X_{r,s}^k \quad (s=0, 1, 2, \dots, k) \\ \bar{D}_s &= \sum_{r=1}^2 d_r W_{r,s}, \quad \bar{H}_s = \sum_{r=1}^2 h_r W_{r,s} \quad (s=0, 1, 2) \end{aligned}$$

2. 최고차 편미분항을 각 구간 내에서 선형으로 표현 하였을 때의 상수들 설명

$$X_{m,n}^4 = \frac{1}{\Delta^4} \begin{bmatrix} 5\Delta^3 & 4\Delta^4 & \frac{3}{2}\Delta^5 & \frac{1}{6}\Delta^6 & \frac{1}{24}\Delta^7 \\ 20\Delta^2 & 20\Delta^3 & 9\Delta^4 & \frac{2}{3}\Delta^5 & \frac{1}{3}\Delta^6 \\ 60\Delta & 60\Delta^2 & 30\Delta^3 & 9\Delta^4 & \frac{3}{2}\Delta^5 \\ 120 & 120\Delta & 60\Delta^2 & 20\Delta^3 & 4\Delta^4 \end{bmatrix}$$

( $\Delta = \Delta x$ ,  $m = 1, 2, 3, 4$  and  $n = 0, 1, 2, 3, 4$ )

$$X_{m,n}^2 \text{ or } W_{m,n}^2 = \frac{1}{\Delta^2} \begin{bmatrix} 3\Delta & 2\Delta^2 & \frac{1}{2}\Delta^3 \\ 6 & 6\Delta & 2\Delta^2 \end{bmatrix}$$

( $\Delta = \Delta x$  or  $\Delta = \Delta t$ ,  $m = 1, 2$  and  $n = 0, 1, 2$ )

3. 최고차 편미분항을 각 구간 내에서 평균값으로 표현하였을 때의 상수들 설명

$$X_{m,n}^4 = \frac{1}{\Delta^4} \begin{bmatrix} 4\Delta^3 & 3\Delta^4 & \Delta^5 & \frac{1}{6}\Delta^6 & 0 \\ 12\Delta^2 & 12\Delta^3 & 5\Delta^4 & 1\Delta^5 & 0 \\ 24\Delta & 24\Delta^2 & 12\Delta^3 & 3\Delta^4 & 0 \\ 48 & 48\Delta & 24\Delta^2 & 8\Delta^3 & \Delta^4 \end{bmatrix}$$

( $\Delta = \Delta x$ ,  $m = 1, 2, 3, 4$  and  $n = 0, 1, 2, 3, 4$ )

$$X_{m,n}^2 \text{ or } W_{m,n}^2 = \frac{1}{\Delta^2} \begin{bmatrix} 2\Delta & \Delta & 0 \\ 4 & 4\Delta & 1 \end{bmatrix}$$

( $\Delta = \Delta x$  or  $\Delta = \Delta t$ ,  $m = 1, 2$  and  $n = 0, 1, 2$ )

## 부록 B

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ X_{1,0}^p & X_{1,0}^p & X_{1,0}^p & X_{1,0}^p & \dots & X_{1,p}^p & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ X_{2,0}^p & X_{2,0}^p & X_{2,0}^p & X_{2,0}^p & \dots & X_{2,p}^p & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ X_{p,0}^p & X_{p,0}^p & X_{p,0}^p & X_{p,0}^p & \dots & X_{p,p}^p & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & X_{1,0}^k & X_{1,0}^k & X_{1,1}^k & X_{1,2}^k & \dots & X_{1,k}^k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & X_{2,0}^k & X_{2,0}^k & X_{2,1}^k & X_{2,2}^k & \dots & X_{2,k}^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & X_{k,0}^k & X_{k,0}^k & X_{k,1}^k & X_{k,2}^k & \dots & X_{k,k}^k \end{bmatrix}$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} X_{n1,0}^p & X_{n1,0}^p & X_{n1,0}^p & X_{n1,0}^p & \dots & X_{n1,p}^p & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & X_{n2,0}^k & X_{n2,0}^k & X_{n2,1}^k & X_{n2,1}^k & \dots & X_{n2,k}^k \end{bmatrix}$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & \dots & A_p & B_0 & B_1 & B_2 & \dots & B_k \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ G_0 & G_1 & G_2 & \dots & G_p & E_0 & E_1 & E_2 & \dots & E_k \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

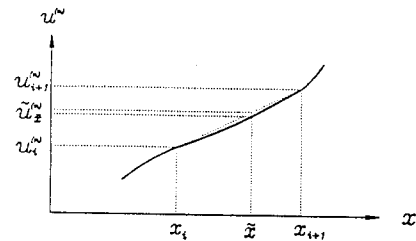


Fig. 1 Interpolation of the highest order partial differential term

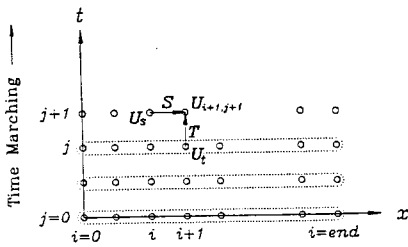


Fig. 2 Difference molecule

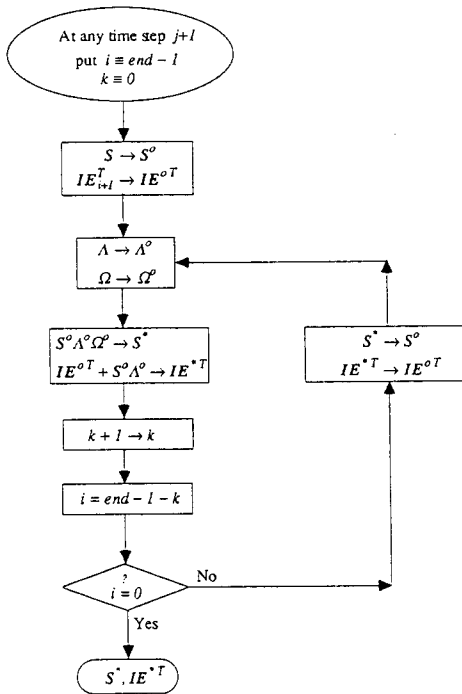


Fig. 3 Flow chart for treating of the boundary conditions

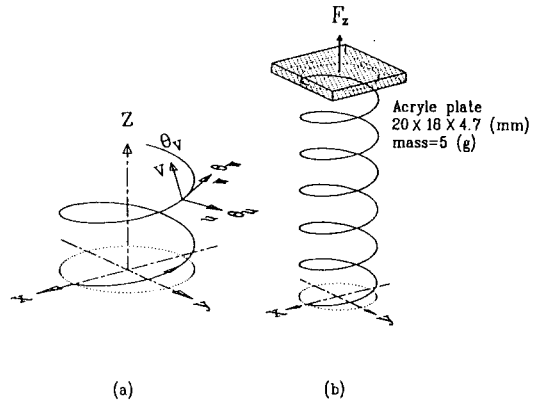


Fig. 4 Helical spring model

( $R = 8.3 \text{ mm}$ ,  $r = 1.06 \text{ mm}$ ,  $N_{\text{active}} = 7.8$ ,

$\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$ ,  $G = 7.9 \times 10^{10}$ ,  $\nu = 0.3$ )

(a) used coordinates

(b) helical spring with acrylic plate at the top

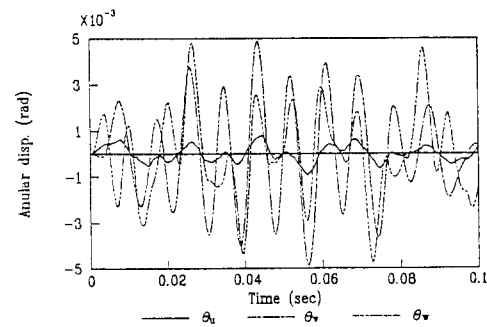
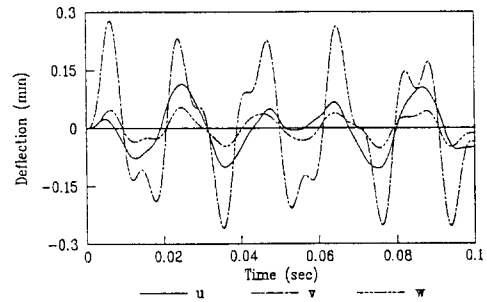


Fig. 5 Responses from the 6 d.o.f. helical spring model

$$F_z(L,t) = \sin(2\pi 50 t)$$