

불연속 변화단면을 갖는 포물선 아치의 자유진동 해석

Free Vibrations of Parabolic Arches with Thickness varying in a Discontinuous Fashion

이 병구*, 오 상진**, 모 정만**, 김 현상**
Byoung-Koo Lee, Sang-Jin Oh, Jeong-Man Mo, Hon-Sang Kim

1. 서론

아치는 구조적으로 매우 이상적이어서 많은 구조물에 기본 단위구조로 이용되기 때문에 아치의 동적거동 특히 자유진동에 관한 연구가 폭넓게 이루어져 왔다. (1-8) 문헌 [1-4]에서는 여러가지 선형을 갖는 등단면 아치에 대한 연구가 이루어졌으며, 문헌 [5-8]에서는 1차원 혹은 2차원식 동과 같이 단면이 연속적으로 변화하는 아치에 대한 연구가 이루어졌다.

아치부재를 다른 부재에 연결하거나 보강의 목적 때문에 아치단면이 불연속적으로 변화하는 경우가 있다. 본 연구에서는 이와 같이 단면이 불연속적으로 변화하는 아치에 대한 진동특성을 규명하는데 본 연구의 목적이 있다.

이를 위하여 본 연구에서는 진동시 아치미소요소에 발생하는 합응력과 관성력의 동적평형방정식을 이용하여 불연속 변화단면을 갖는 변화곡률 아치의 자유진동을 지배하는 미분방정식을 유도하고, 이를 해석하여 불연속 변화단면을 갖는 포물선 아치의 자유진동을 해석하였다.

2. 수학적 모델

2.1 지배미분방정식

그림 1은 불연속 변화단면을 갖는 임의선형 아치의 기하학적 형상을 나타내고 있다. 이 그림에서 l , h 는 각각 아치의 지간길이 및 높이를 나타내고, n 은 단면의 불연속 구간을 정의해 주는 변수이다. t_1, A_1, I_1 은 각각 아치의 양단으로부터 nl 구간내의 단면높이(혹은 폭), 단면적 및 단면 2차모멘트를 나타내며, t_2, A_2, I_2 는 아치중앙 부분에서의 단면높이(혹은 폭), 단면적 및 단면 2차모멘트를 나타낸다. 또한 임의좌표 (x, y) 에서 아치의 곡률반경은 a 로 표시되어 있으며, ϕ 는 곡률중심방향과 수평축이 이루는 각도, θ 는 아치축의 접선각을 의미한다.

그림 1과 같은 제원을 갖는 아치가 자유진동하게 되면 아치 곡률중심방향 변위 w 및 접선방향 변위 v 에 의해 아치미소요소에는 축방향력 N , 전단력 V 및 휨모멘트 M 의 합응력이 발생하며, 질량을 갖고 있는 아치미소요소에는 곡률중심방향의 관성력 P_r , 접선방향의 관성력 P_t 및 회전관

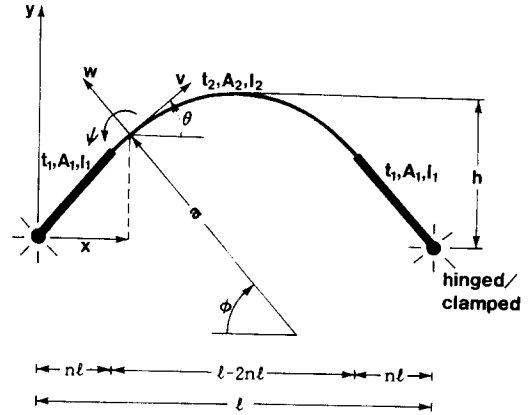


그림 1. 불연속 변화단면을 갖는 변화곡률 아치

성우력 T 가 발생한다. 아치미소요소에 작용하는 이들 합응력 및 관성력에 대한 동적평형방정식을 세우면 다음과 같다.

$$dN/d\phi + V + aP_t = 0 \quad (1)$$

$$dV/d\phi - N + aP_r = 0 \quad (2)$$

$$a^{-1}dM/d\phi - V - T = 0 \quad (3)$$

N, M 및 단면회전각 ψ 를 변위 w, v 의 함수로 표시하면 다음과 같다. (9)

$$N = E[FA_1a^{-1}(v' + w) + GI_1a^{-3}(w'' + w)] \quad (4)$$

$$M = -EGI_1a^{-2}(w'' + w) \quad (5)$$

$$\psi = a^{-1}(w' - v) \quad (6)$$

여기서 E 는 아치재료의 탄성계수이고, $(\prime) = d/d\phi$ 를 의미한다. 또한 F, G 는 (7), (8)식에 나타낸 바와 같이 아치의 변단면을 정의해 주는 ϕ 의 함수로서 각각 아치 임의점과 아치단부의 단면적 및 단면 2차모멘트비를 나타낸다.

$$F = F(\phi) = A/A_1 \quad (7)$$

$$G = G(\phi) = I/I_1 \quad (8)$$

* 원광대학교 토목공학과 교수 (정회원)

** 원광대학교 대학원 토목공학과

아치가 조화진동을 한다고 가정하면 관성력 및 회전관성우력은 다음 식들과 같이 표시된다. (10)

$$P_r = \gamma F A_1 \omega^2 w \quad (9)$$

$$P_t = \gamma F A_1 \omega^2 v \quad (10)$$

$$T = \gamma \omega^2 G I_1 a^{-1} (w' - v) \quad (11)$$

여기서 γ 는 아치재료의 단위체적당 질량, ω 는 고유각진동수(rad/sec)이다.

(4), (5)식에서 $dN/d\phi$, $dM/d\phi$ 를 각각 구하면 다음과 같다. 이 때 본 연구대상인 불연속 변화단면을 갖는 아치는 일정구간내에서 등단면이므로 F , G 는 각 구간내에서 일정한 상수값을 가지며, $dF/d\phi = dG/d\phi = 0$ 이다.

$$dN/d\phi = E[FA_1 a^{-1}(v'' + w') - FA_1 a^{-2} a'(v' + w) + GI_1 a^{-3}(w'' + w') - 3GI_1 a^{-4} a'(w'' + w)] \quad (12)$$

$$dM/d\phi = -E[GI_1 a^{-2}(w'' + w') - 2GI_1 a^{-3} a'(w'' + w)] \quad (13)$$

(3)식과 (11)식 및 (13)식으로 부터 전단력 V 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$V = a^{-1} dM/d\phi - R \cdot T \\ = -E[GI_1 a^{-3}(w'' + w') - 2GI_1 a^{-4} a'(w'' + w) - R \cdot \gamma \omega^2 GI_1 a^{-1}(w' - v)] \quad (14)$$

여기서 R 은 회전관성의 고려여부를 나타내는 지표로서 그 내용은 다음과 같다.

$$R=0 : \text{회전관성을 무시하는 경우} \quad (15)$$

$$R=1 : \text{회전관성을 고려하는 경우} \quad (16)$$

(14)식으로 부터 $dV/d\phi$ 를 구하면 다음과 같다.

$$dV/d\phi = -E[GI_1 a^{-3}(w'' + w') - 3GI_1 a^{-4} a'(w'' + w') - 2GI_1 a^{-4} a'(w'' + w') + 8GI_1 a^{-5} a'^2(w'' + w) - 2GI_1 a^{-4} a''(w'' + w) - R \cdot \gamma \omega^2 [GI_1 a^{-1}(w' - v) - GI_1 a^{-2} a'(w' - v)]] \quad (17)$$

지배미분방정식을 무차원으로 유도하기 위하여 다음의 무차원 변수들을 이용한다.

$$\xi = x/l, \quad \eta = y/l, \quad \delta = w/l, \quad \lambda = v/l \quad (18)$$

$$f = h/l, \quad s = l/r, \quad \rho = a/l \quad (19)$$

여기서 r 은 (20)식으로 정의되는 단면회전반경이다.

$$r = (I_1/A_1)^{0.5} \quad (20)$$

평형방정식 (2)식에 (17), (4), (9)식을 대입하고

(18)-(19)식의 무차원변수를 이용하여 정리하면 (21)식을 얻을 수 있고, 평형방정식 (1)식에 (12), (14), (10)식을 대입하고 무차원변수를 이용하여 정리하면 (22)식을 얻을 수 있다.

$$\delta'''' = 5\rho^{-1}\rho'\delta'' - (2 + 8\rho^{-2}\rho'^2 - 2\rho^{-1}\rho'' + RC_i^2 s^{-2}\rho^2)\delta'' + (5\rho^{-1}\rho' + RC_i^2 s^{-2}\rho\rho')\delta' - (1 + 8\rho^{-2}\rho'^2 - 2\rho^{-1}\rho'' + s^2FG^{-1}\rho^2 - C_i^2FG^{-1}\rho^4)\delta - (s^2FG^{-1}\rho^2 - RC_i^2 s^{-2}\rho^2)\lambda' - RC_i^2 s^{-2}\rho\rho'\lambda \quad (21)$$

$$\lambda'' = s^{-2}GF^{-1}\rho^{-3}\rho'\delta'' + (RC_i^2 s^{-4}GF^{-1} - 1)\delta' + (\rho^{-1}\rho' + s^{-2}GF^{-1}\rho^{-3}\rho')\delta + \rho^{-1}\rho'\lambda' - (RC_i^2 s^{-4}GF^{-1} + C_i^2 s^{-2}\rho^2)\lambda \quad (22)$$

(21), (22)식의 지배미분방정식에서 C_i 는 다음 식과 같이 표시되는 무차원 고유진동수이고, i 는 모드수이다.

$$C_i = \omega_i s l (\gamma/E)^{0.5}, \quad i=1, 2, 3, 4 \quad (23)$$

이상에서 (21), (22)식은 불연속 변화단면을 갖는 변화곡률아치의 자유진동을 지배하는 미분방정식이다. (21), (22)식의 해석시 아치의 전구간에 걸쳐 $F=G=1$ 을 적용하는 경우 즉, 변화곡률 등단면 아치인 경우에 (21), (22)식의 미분방정식은 문헌 [5]의 미분방정식으로 환원됨을 알 수 있다. 또한 ρ 를 일정하게 하고 $\rho'=\rho''=0$ 를 적용하면 (21), (22)식을 이용하여 불연속 변화단면을 갖는 원호아치를 해석할 수 있다.

본 연구에서 아치의 기하학적 형상은 아치정점을 기준으로 대칭이므로 진동형은 대칭진동과 역대칭진동형으로 구분된다. 아치정점에서 이들 진동형에 대한 경계조건은 다음과 같다.

$$\text{대칭진동형} : \delta' = \delta'' = \lambda = 0, \quad \xi = 0.5 \text{에서} \quad (24)$$

$$\text{역대칭진동형} : \delta = \delta' = \lambda' = 0, \quad \xi = 0.5 \text{에서} \quad (25)$$

2.2 변화곡률계수 ρ , ρ' , ρ'' 의 결정

그림 1과 같은 좌표계 위에 놓인 지간길이 l , 높이 h 를 갖는 포물선 아치의 선형식을 무차원변수를 이용하여 나타내면 다음과 같다.

$$\eta = -4f\xi(\xi-1) \quad (26)$$

(26)식의 무차원 선형식으로 표현되는 포물선 아치의 임의점(ξ, η)에서의 ρ 와 ϕ 는 다음과 같이 ξ 의 함수로 표시할 수 있다.

$$\rho = \frac{[1 + (d\eta/d\xi)^2]^{3/2}}{d^2\eta/d\xi^2} \\ = 0.125f^{-1}[1 + 16f^2(2\xi-1)^2]^{1.5} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \phi &= \pi/2 - \tan^{-1}(d\eta/d\xi) \\ &= \pi/2 - \tan^{-1}[-4f(2\xi-1)] \end{aligned} \quad (28)$$

(28)식으로 부터 다음의 관계식을 얻을 수 있다.

$$\frac{d\xi}{d\phi} = \frac{1+16f^2(2\xi-1)^2}{8f} \quad (29)$$

$$\frac{d^2\xi}{d\phi^2} = (2\xi-1)[1+16f^2(2\xi-1)^2] \quad (30)$$

(27), (29), (30)식을 이용하여 ρ' , ρ'' 을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \rho' &= \frac{d\rho}{d\xi} \frac{d\xi}{d\phi} \\ &= 1.5(2\xi-1)[1+16f^2(2\xi-1)^2]^{1.5} \end{aligned} \quad (31)$$

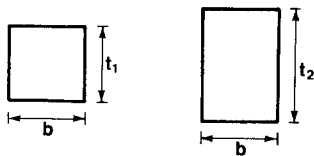
$$\begin{aligned} \rho'' &= \frac{d\rho'}{d\xi} \frac{d\xi}{d\phi} \\ &= 0.375f^{-1}[1+64f^2(2\xi-1)^2][1+16f^2(2\xi-1)^2]^{1.5} \end{aligned} \quad (32)$$

이상에서의 (27), (31), (32)식을 이용하면 포물선 아치의 변화곡률계수를 결정할 수 있으며, 다른 선형의 아치에 대해서도 이와 같은 방법으로 변화곡률계수를 구할 수 있다.

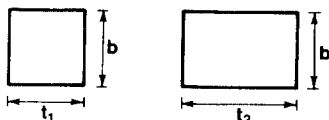
2.3 F, G의 결정

불연속구간내에서 단면적과 단면2차모멘트비 F, G는 상호존적으로 변화한다. 따라서 이 값들을 A_1 , I_1 단면에서의 단면높이(혹은 폭)와 A_2 , I_2 단면에서의 단면높이(혹은 폭)의 관계식으로 나타내면 다음과 같다. (그림 2참조)

먼저 폭이 일정하고 단면높이가 변화하는 경우 $A_1=bt_1$,



(1) 높이가 불연속인 경우



(2) 폭이 불연속인 경우

그림 2. 아치의 단면형상

$A_2=bt_2$, $I_1=bt_1^3/12$, $I_2=bt_2^3/12$ 이므로 다음의 관계식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} F &= A_2/A_1 \\ &= t_2/t_1 \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} G &= I_2/I_1 \\ &= (t_2/t_1)^3 \end{aligned} \quad (34)$$

폭이 변화하고 단면높이가 일정한 경우 $A_1=bt_1$, $A_2=bt_2$, $I_1=t_1b^3/12$, $I_2=t_2b^3/12$ 이므로 다음의 관계식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} F &= A_2/A_1 \\ &= t_2/t_1 \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} G &= I_2/I_1 \\ &= t_2/t_1 \end{aligned} \quad (36)$$

이상에서 (33)-(34)식, (35)-(36)식은 각각 단면높이가 변화하는 경우와 단면폭이 변화하는 경우 F, G를 단면제원 비로 나타낸 것이며, 다른 단면에 대해서도 같은 방법으로 표현될 수 있다.

3. 수치해석방법 및 검증

미분방정식 (21), (22)식의 엄밀해는 존재하지 않으므로 수치해석법에 의하여 수치해를 구하여야 한다. (21), (22)식의 미분방정식에는 미지의 고유치 C_i 항이 포함되어 있으므로 먼저 C_i 값을 가정하여 미분방정식에 대입한 후에 좌단($\xi=0$)의 경계조건을 이용하여 수치적분을 시행한다. 가정한 C_i 값이 자유진동의 고유치인지는 아치정점($\xi=0.5$)에서 경계조건의 만족여부로 판단하며 이 과정에서 행렬값 탐사법을 이용한다. (11)

표 1은 본 연구결과를 검증하기 위해 구조해석용 범용 프로그램인 SAP90의 결과와 비교한 것이다. 표에서 알 수 있듯이 두 결과는 아주 우수하게 접근하고 있어 본 연구결과 타당성을 입증할 수 있다.

4. 수치해석 에 및 고찰

회전관성이 고유진동수에 미치는 영향을 분석하기 위해 회전관성을 고려한 경우와 고려하지 않은 경우의 결과를 표 2에 나타내었다. 이 표로부터 회전관성은 고유진동수를 감소시키는 요인이지만 그 영향은 1%미만으로 비교적 작은 것을 알 수 있다.

표 3은 단면형상이 고유진동수에 미치는 영향을 분석하기 위해 일정제원의 아치에 대하여 각 단면형상별로 비교한 표이다. 이 표에서 양단이 고정인 경우에는 변화폭 구

표 1. 수치해의 검증

계 원	i	무차원 고유진동수, C_i		차이* (%)
		SAP90	본 연구	
고정 - 고정 높이 불연속단면 $f=0.1, s=100$ $t_2/t_1=0.75, n=0.2$	1	45.743	44.252	3.26
	2	62.689	61.193	2.39
	3	98.860	97.667	1.21
	4	158.28	157.36	0.58
고정 - 고정 폭 불연속단면 $f=0.2, s=120$ $t_2/t_1=0.6, n=0.25$	1	47.110	46.268	1.79
	2	92.203	90.519	1.83
	3	149.69	147.76	1.29
	4	161.66	160.67	0.61
회전 - 회전 높이 불연속단면 $f=0.3, s=100$ $t_2/t_1=1.2, n=0.2$	1	25.302	25.944	2.54
	2	62.501	63.534	1.65
	3	115.51	116.29	0.68
	4	152.00	150.81	0.78
회전 - 회전 폭 불연속단면 $f=0.25, s=120$ $t_2/t_1=1.5, n=0.25$	1	25.949	26.675	2.80
	2	63.863	64.583	1.13
	3	116.71	117.35	0.55
	4	165.32	164.27	0.64

* 차이(%) = |SAP90-본 연구|/SAP90*100

표 2. 회전관성이 무차원 고유진동수에 미치는 영향

계 원	i	R=0(A)	R=1(B)	영향(%)*
고정 - 고정 높이 불연속단면 $f=0.1, s=75$ $h_2/h_1=0.5, n=0.2$	1	30.397	30.364	- 0.11
	2	45.004	44.976	- 0.06
	3	69.698	69.530	- 0.24
	4	117.05	116.42	- 0.54
고정 - 고정 폭 불연속단면 $f=0.2, s=100$ $h_2/h_1=0.75, n=0.3$	1	46.299	46.228	- 0.15
	2	88.723	88.455	- 0.30
	3	126.84	126.67	- 0.13
	4	161.25	160.18	- 0.67
회전 - 회전 높이 불연속단면 $f=0.3, s=100$ $h_2/h_1=1.2, n=0.3$	1	24.348	24.326	- 0.09
	2	62.832	62.646	- 0.30
	3	114.76	114.10	- 0.58
	4	147.92	147.76	- 0.11
회전 - 회전 폭 불연속단면 $f=0.3, s=120$ $h_2/h_1=1.5, n=0.4$	1	23.510	23.496	- 0.06
	2	58.721	58.615	- 0.18
	3	106.71	106.34	- 0.35
	4	164.18	163.44	- 0.45

* 영향(%) = (B-A)/B*100

형단면을 갖는 아치가, 양단이 회전인 경우 변화율이 구형 단면을 갖는 아치가 더 큰 고유진동수를 갖음을 알 수 있다.

그림 3은 무차원 고유진동수 C_i 와 아치높이 지간길이비 f 의 관계를 나타낸 것이다. 이 그림에서 일반적으로 높은 아치는 낮은 아치에 비해 고유진동수가 작은 경향을 나타내고 있음을 알 수 있다. 그러나 일정구간에서는 아치높이

표 3. 단면형상이 무차원 고유진동수에 미치는 영향

계 원	i	무차원 고유진동수, C_i	
		높이 불연속단면	폭 불연속단면
고정 - 고정 $f=0.2, s=100$ $t_2/t_1=0.75$ $n=0.2$	1	36.448	46.228
	2	74.421	88.455
	3	121.35	126.67
	4	137.03	160.18
회전 - 회전 $f=0.3, s=120$ $t_2/t_1=1.2$ $n=0.3$	1	24.339	23.496
	2	62.672	58.615
	3	114.30	106.34
	4	166.97	163.44

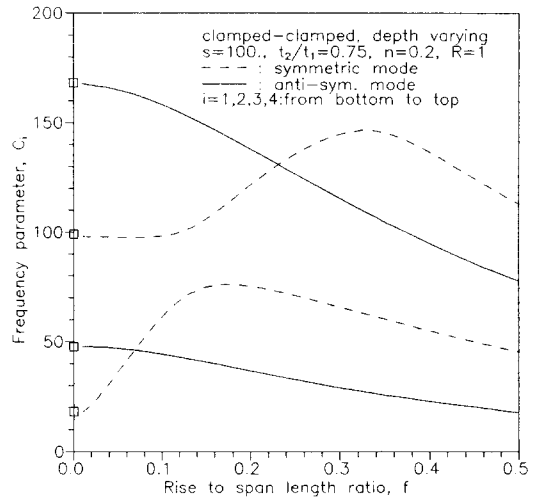


그림 3. $C_i - f$ 의 관계

가 증가하면 고유진동수가 증가하는 경우가 있는데, 이는 아치높이가 어느 정도 증가할 때 까지는 진동에 대한 강성이 커져서 고유진동수가 증가하는 것으로 사료된다. 또한 그림에서 대칭진동을 나타내는 점선과 역대칭진동을 나타내는 실선이 교차하는 지점을 발견할 수 있는데 이는 동일한 고유진동수에 대하여 대칭진동과 역대칭진동의 2개모드가 존재함을 의미한다.

아치높이 지간길이비 f 가 0으로 수렴하게 되면 직선보로 환원되므로 그림 3에서 f 가 0으로 수렴될 때 무차원 고유진동수는 동일 불연속 단면을 갖는 보의 무차원 고유진동수로 수렴되어야 한다. 그림 3에서 □ 표시된 값들은 동일 불연속면을 갖는 직선보를 SAP90으로 해석한 결과들로 본 연구에서 f 가 0으로 접근함에 이들 값으로 수렴해감을 확인할 수 있다.

그림 4는 무차원 고유진동수 C_i 와 세장비 s 의 관계를 나타낸 것으로 세장비가 증가할 수록 무차원 고유진동수는 증가하는 것을 알 수 있다. 그러나 세장비가 증가함에 따라 각 모드별 고유진동수는 일정한 값으로 수렴해 가며 폭

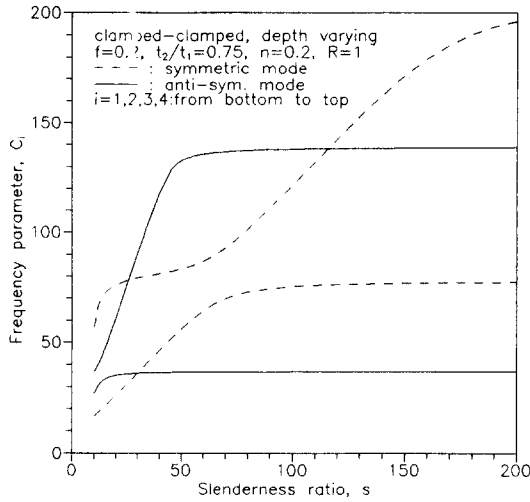


그림 4. $C_i - s$ 의 관계

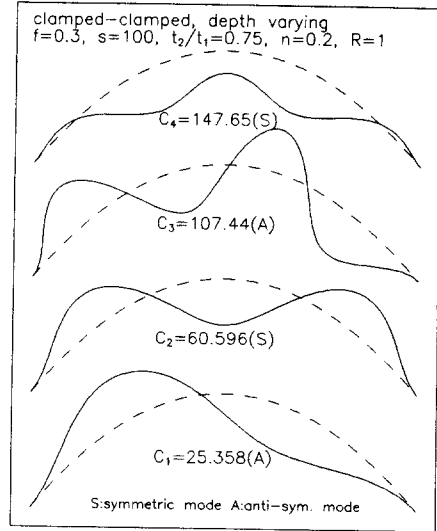


그림 6. 진동형의 예

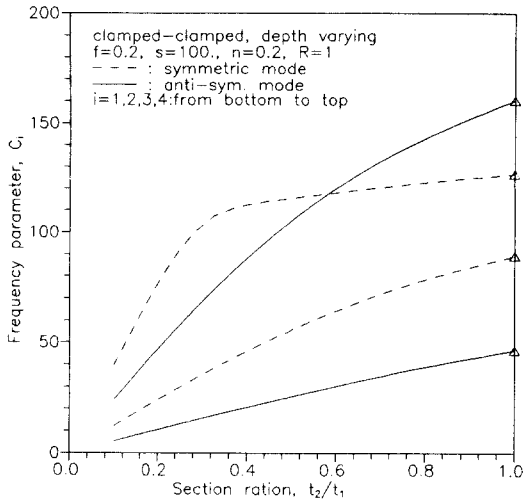


그림 5. $C_i - t_2/t_1$ 의 관계

히 제1고유진동수는 그 증가율이 매우 미소함을 알 수 있다.

그림 5는 모든 다른 계원이 동일한 경우 t_2/t_1 의 변화에 따른 무차원 고유진동수를 나타낸 것이다. 그림에서 t_2/t_1 가 증가함에 따라 무차원 고유진동수는 증가함을 알 수 있으며, 그 증가율이 상당히 크음을 알 수 있다. 또한 t_2/t_1 가 1인 경우 즉 등단면 포물선 아치인 경우의 해석결과(△표 값)는 문헌[5]의 결과와 동일함을 알 수 있다.

참고로 단부조건이 고정-고정이며 높이가 불연속이고, $f=0.3, s=100, t_2/t_1=0.75, n=0.2$ 인 아치의 진동형용 그림 6에 나타내었다.

5. 결론

본 연구에서는 불연속 변화단면을 갖는 변화곡률 아치의 자유진동을 지배하는 미분방정식을 유도하고, 아치의 선형으로 포물선 아치를 택하여 수치해석함으로써 불연속 변화단면을 갖는 아치의 자유진동 특성을 규명하기 위한 연구를 수행하였다.

수치해석 결과로 부터 회전관성 및 단면형상이 고유진동수에 미치는 영향을 검토하였으며, 고유진동수와 아치높이 지간길이비, 세장비, 단면비(t_2/t_1)의 관계를 고찰하였다.

참고문헌

1. E. Volterra and J. D. Morell, "Lowest Natural Frequencies of Elastic Hinged Arches," Journal of the Acoustical Society of America, Vol.33, No.12, 1961, pp.1787-1790.
2. Joseph A. Wolf Jr., "Natural Frequencies of Circular Arches," Journal of the Structural Division, ASCE, Vol.97, No.ST9, 1971, pp.2337-2350.
3. T. M. Wang and J. A. Moore, "Lowest Natural Extensional Frequency of Clamped Elliptic Arches," Journal of Sound and Vibration, Vol.30, No.1, 1973, pp.1-7.
4. B. K. Lee and James F. Wilson, "Free Vibrations of Arches with Variable Curvature, Journal of

- Sound and Vibration, Vol.136(1), 1990.1, pp.75-89.
5. Tung-Ming Wang, "Lowest Natural Frequency of Clamped Parabolic Arcs," Journal of the Structural Division, ASCE, Vol.98, No.ST1, 1975, pp.407-411.
 6. T. Sakiyama, "Free Vibrations of Arches with Variable Cross Section and Non-Symmetrical Axis," Journal of Sound and Vibration, Vol.102, 1985, pp.448-452.
 7. M. J. Maurizi, R. E. Rossi and P. M. Belles, "Lowest Natural Frequency of Clamped Circular Arcs of Linearly Tapered Width," Journal of Sound and Vibration, Vol.144, No.2, 1991, pp.357-361.
 8. 이병구, 오상진, 모정만, 김현상, "변화곡률 변화단면 아치의 자유진동 해석," 한국강구조학회 논문집, Vol.4, No.4, 1992.
 9. S. F. Borg and J. J. Gennaro, "Advanced Structural Analysis," D Van Nostrand Company, 1965, pp.21-33.
 10. J. M. Biggs, Introduction to Structural Dynamics, McGraw-Hill, 1982, pp.35-37.
 11. J. W. Leonard, Tension Structures, McGraw-Hill, 1988, pp.300-304.