# 신뢰도분석을 위한 감마사전확률분포의 추정

전치혁, 박영신, 김지수

포항공과대학 산업공학과

요 약

어떤 무기체계의 임무신뢰도분석에 베이지안기법을 사용하는데 있어 고장율이 주어졌을 때 고장간 시간이 지수분포를 따른다는 가정하에 이의 Conjugate Prior 인 감마분포의 추정문제를 다룬다. 임무별 고장간시간에 대한 예측분포를 유도하였으며, 실제 측정된 기존의 임무별 고장간시간이 이 예측분포를 따른다는 전제하에 비선형 최소자승법을 이용하여 감마분포의 두 파라메터를 추정하는 방안을 제시하였다. 또한 대상 무기체계의 실제 고장자료를 이용하여 추정치를 구하였다.

## I. 서론

어떤 시스템의 신뢰도 분석을 하는데 있어 그 시스템의 수명분포를 지수분포로 가정하는 경우가 많으며 베이지안 기법을 사용할 때 지수분포의 파라메터, 즉 시스템의 고장율의 사전분포 (prior distribution) 를 지수분포에 대한 켤레사전분포 (conjugate prior) 인 감마분포를 주로 가정하고 있다. 감마분포는 두개의 파라메터를 갖음으로써 고장율에 대한 사전정보를 어느정도 잘 반영시킬 수 있기 때문이다.

본 연구에서는 시스템 고장에 대한 과거 자료를 입수할 수 있는 경우 이러한 고장자료를 바탕으로 지수분포의 고장율에 대한 사전분포로서 감마분포를 사용할 때 이 감마분포의 두 파라메터를 추정하는 새로운 방법론을 제시하고자 한다. 또한 이 방법론에 의하여 한국형 전차의 과거 고장자료를 사용하여 임무별 고장율의 사전분포를 추정한다.

## II. 수명에 대한 예측분포

시스템의 수명을 X 라 하고 X 의 분포는 고장율 $\lambda$ 가 주어졌을 때 지수분포를 따른다고 하면 고장률 $\lambda$ 의 켤레사전분포는 다음과 같은 감마분포를 따른다. (이를 Gamma($\alpha$, $\beta$) 로 나타내자):

$$p(\lambda) = \beta e^{-\beta\lambda} \frac{(\beta\lambda)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} \qquad \lambda > 0$$

본 논문에서는 편의상 확률밀도함수를 표기하는데 있어 확률변수와 이것이 취할 수 있는 값을 구분하지 않고 사용한다.

---

본 연구는 국방과학연구소의 장기기초과제에 의해 지원되었슴.

따라서 위의 사전분포에 바탕을 둔 X 의 예측분포 (predictive distribution) 은 다음과 같다.

$$p(x) = \int p(x|\lambda)\, p(\lambda)d\lambda$$

$$= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} \beta e^{-\beta\lambda} \frac{(\beta\lambda)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} d\lambda$$

$$= \frac{\alpha\beta^\alpha}{(\beta+x)^{\alpha+1}} \int (\beta+x)\, e^{-(\beta+x)\lambda} \frac{\{(\beta+x)\lambda\}^\alpha}{\alpha!} d\lambda$$

$$= \frac{\alpha\beta^\alpha}{(\beta+x)^{\alpha+1}} \qquad x > 0. \tag{1}$$

즉, X 는 Inverse-Beta 분포 또는 파레토분포 (Pareto distribution) 를 따르게 된다. [1, 2]

기존의 고장간 시간을 식 (1) 의 파레토분포에서 추출된 표본으로 간주할 수 있으며 이러한 경우 사전분포의 추정문제는 위의 파레토분포의 두 파라메터 $\alpha$ 및 $\beta$ 의 추정문제로 귀착된다.

일반적으로 가장 간단한 추정방법으로 표본평균을 모평균으로, 표본분산을 모분산으로 등식화하는 모멘트방식 (method of moments) 이 있으며, 보편적으로 최우추정방법 (maximum likelihood estimation) 등을 사용하는데 우리의 경우는 이 두 방법을 사용할 수 없음을 다음에서 기술하고자 한다.

1. 기대치및 분산

X 가 식 (1) 의 분포를 따를 때 X 의 기대치는 $\alpha > 1$ 에 대하여 다음과 같이 구해진다.

$$E[X] = \int_0^\infty x \frac{\alpha\beta^\alpha}{(\beta + x)^{\alpha+1}} dx$$

$$= \alpha\beta^\alpha \int_\beta^\infty \frac{x - \beta}{x^{\alpha+1}} dx$$

$$= \alpha\beta\left( \frac{1}{\alpha - 1} - \frac{1}{\alpha} \right)$$

또한 X 의 분산은 $\alpha > 2$ 에 대해 다음과 같이 유도된다.

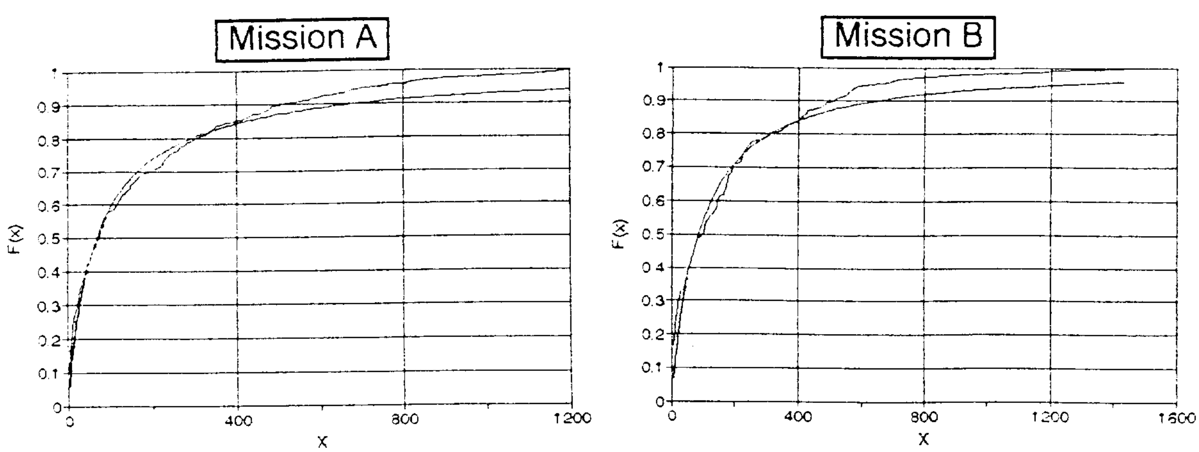
$$Var[X] = E[X^2] - \{E[X]\}^2$$

각 임무별로 식 (7) 을 최소로 하는 감마 파라메터 α, β 를 도출하여 <표 2> 에 나타내었다. 이를 위해 FORTRAN 언어를 이용한 프로그램이 작성되었으며 Levenberg-Marquardt 알고리듬에 바탕을 둔 IMSL subroutine 인 ZXSSQ 가 사용되었다. <표 2> 에서 MSE 는 평균자승오차합 (Mean Sum of Squared Error) 를 나타낸다.

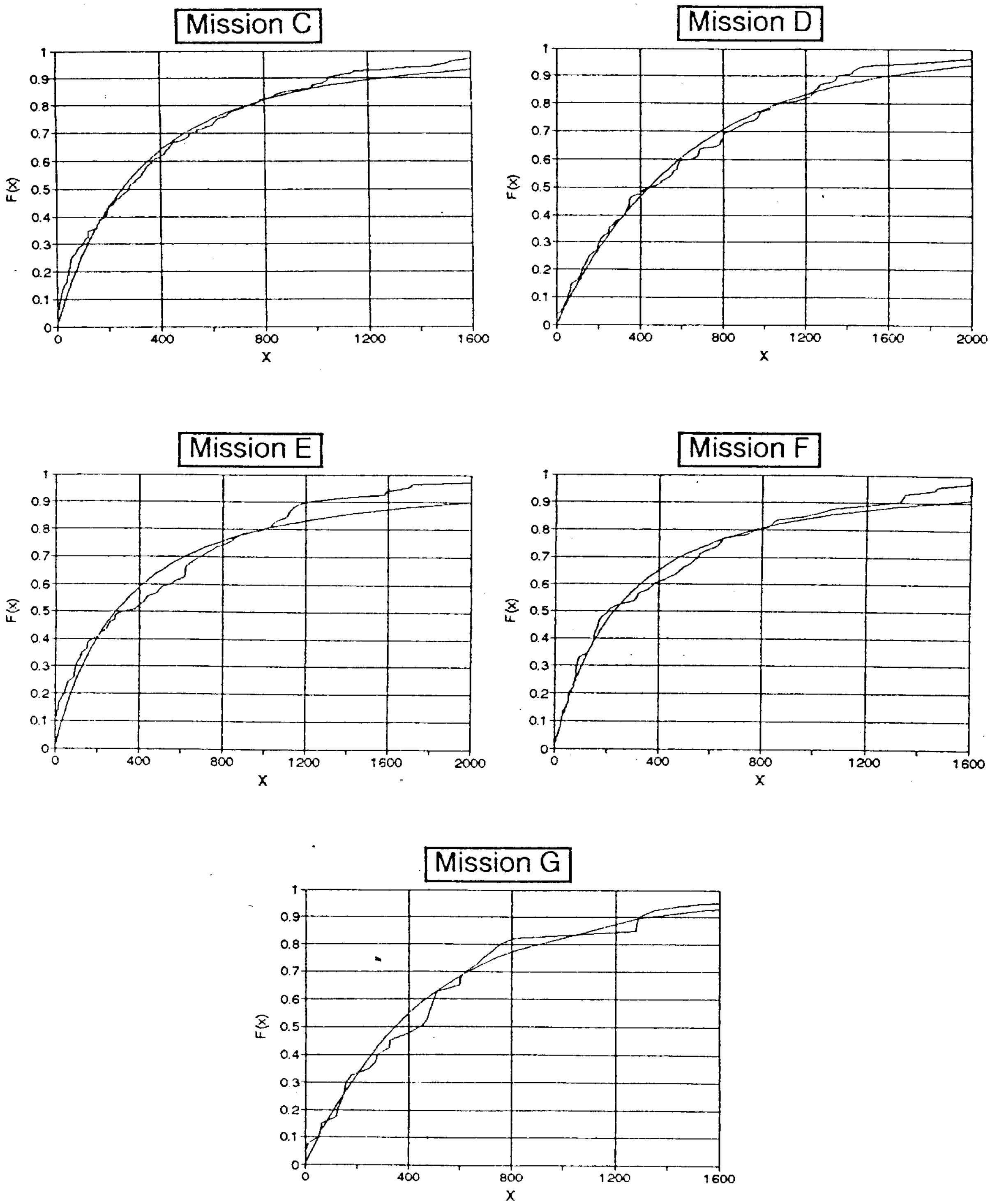
<표 2> 임무별 감마 파라메터 추정치

| 임 무 | α | β | MSE |
|---|---|---|---|
| A | 0.9294 | 62.52 | 0.00060 |
| B | 1.1674 | 105.25 | 0.00126 |
| C | 2.1595 | 662.38 | 0.00093 |
| D | 9.8189 | 6029.49 | 0.00050 |
| E | 1.3039 | 409.30 | 0.00267 |
| F | 1.3902 | 351.75 | 0.00081 |
| G | 5.9961 | 2846.31 | 0.00127 |

또한 <표 2> 의 추정치를 갖는 파레토분포함수, 즉 식 (6) 과 경험적분포를 각 임무별로 <그림 1> 에 도시하였다. <그림 1> 에서 보다 부드러운 곡선이 파레토분포함수를 나타낸다.




<그림 1> 임무별 경험적 분포와 추정분포




〈그림 1〉 임무별 경험적 분포와 추정분포 (계속)

V. 결론

본 논문에서 제시한 감마 사전확률분포의 추정방안을 실제 자료에 적용한 결과 대체적으로 적합한 것으로 나타나고 있다. 보다 엄밀한 적합성 여부를 위해서는 $\chi^2$ 검정 등이 필요할 것이다. 그리고 파레토분포함수의 변환형태에 따라 파라메터 추정치가 다를 수 있으므로 적절한 변환를 고려할 수도 있을 것이다.

감마 사전확률분포의 추정에 대한 과거 연구의 하나로 고장횟수를 바탕으로 하는 방안 [7]이 있으나 본 논문에서의 가정과 같이 고장간 시간의 자료가 입수가능할 때에는 본 논문의 방안이 보다 효율적일 것으로 판단된다.

## 참고문헌

[1] Aitchison, J. and I.R. Dunsmore, *Statistical Prediction Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, pp.24-28, 1975.

[2] Johnson, N.L. and S. Kotz, *Distributions in Statistics: Continuous Univariate Distributions - 1*, John Wiley & Sons, New York, pp.233-234, 1970.

[3] Luenberger, D.G., *Introduction to Linear and Nonlinear Programming*, Addison-Wesley, Reading, Chapters 7,8 and 9, 1973.

[4] Draper, N.R. and H. Smith, *Applied Regression Analysis*, 2nd ed. Wiley, New York, Chapter 10, 1981.

[5] Levenberg, K., "A Method for the Solution of Certain Non-linear Problems in Least Squares", *Quart. Appl. Math.*, vol.2, pp.164-168, 1944.

[6] Marquardt, D.W., "An Algorithm for Least-squares Estimation of Nonlinear Parameters", *J. SIAM*, vol.11, no.2, pp.431-441, 1963.

[7] Martz, H.F. and R.A. Waller, *Bayesian Reliability Analysis*, Wiley, New York, pp.318-327, 1982.