비용과 최소요구충족율을 고려한 수리가능제품의 최적여유부품수준의 결정기법

신규철, 김종수
한양대학교 산업공학과

요 지

본 논문에서는 高價의 수리가능제품의 최적여유재고 수준을 결정하는 효율적인 방법을 제안한다. 고려하는 시스템은 각 기지창과 중앙창에서 한정된 수리능력을 가지며 중앙창에서 수리가 끝난 후 수리된 제품은 원래의 기지창으로 되돌아가서 재고에 포함되는 형태이다.

제안한 방법은 최소비용의 재고수준을 결정하는 방법및 최소요구충족율을 가장 적은 비용으로 만족시키는 여유재고수준을 결정하는 최적해법이다. 제안한 방법을 실제시스템에 적용하면 최소의 비용으로 장비나 무기를 원하는 수준으로 가동시킬 수 있으므로 국방비의 효율적인 사용및 절감에 도움이 될 것이다.

I.서론

군 조직에서는 수리가능한 제품의 수리/공급 문제에 있어서 다단계 수리 체계에 의존하고 있다. 기지(Base)에서 작동중이던 제품에 고장이 발생하면 동일한 제품을 재고로 보유하고 있는 경우, 우선 재고로 대체하여 주고 고장난 제품은 그 고장이 경고장(Base Repairable)인지 중고장(Depot Repairable)인지 조사하고, 고장이 경고장인 경우에는 기지창(Base Repair Center)에서 수리하고 중고장인 경우에는 중앙창(Depot Repair Center)에서 수리를 한 후 기지로 반송하여 재고로 저장하게 된다. 본 논문에서 지칭하는 수리가능한 제품은 전투기의 엔진과 같이 가격이 비싸고 필수적이며 고장빈도가 낮은 제품으로 고장시는 수리하여 재사용하여야 하는 군수품을 말하며, 일단 고장나면 폐기처분하는 단순부품이나 소모품과는 구별되어진다. 수리가능한 제품의 특성상 제품 단가가 비싸므로 과도한 재고를 유지하기가 어려운 반면 재고가 부족할 경우는 군 운영상 큰 문제점이 발생하게된다. (예로써, 전투기나 전차가 수리가능제품의 고장으로 가동되지 못하는 경우를 들 수 있다.) 따라서, 이러한 수리가능한 군장비나 병기에 대한 재고수준을 효율적으로 결정할 수 있는 방법이 절실히 요구된다. 그러나 단순히 비용만을 고려한 여유부품수의 결정은 군 특성상 별의미가 없다. 따라서 군의 관리상 주어지는 최소요구충족율(Minimum Fillrate)을 만족하면서 비용을 최소로 하는 재고수준을 결정해야한다.

본 논문에서는 최소의 비용으로 장비나 무기를 원하는 수준으로 가동할 수 있는 최적여유재고 수준을 결정하는 최적화기법을 제시한다.

1. 기존 연구고찰

1968년 Sherbrooke [10]에 의해 METRIC모델이 발표된 이래 다단계 수리 가능한 제품의 재고체계에 대한 연구가 꾸준히 진행되어 왔다.

METRIC에서는 제품에 고장이 발생하였을 때 여유제품이 존재하면 즉시 교체하고, 여유제품이 존재하지 않으면 주문잔고(back order)에 의해 제품의 발주방식이 일대일 교체정책(S-1,S)에 의할때 기지창과 중앙창에서 보유하고 있어야 할 여유제품수를 결정한다. Muckstadt [9]는 METRIC모형을 계층적 구조를 갖는 제품에 일반화 하였고, 이 모형을 MOD-METRIC 이라 칭하였다. METRIC과 MOD-METRIC모형은 무한한 수리능력으로 대기행렬이 발생하지 않는 것으로 보았다. 그러나, 수리능력이 제한되어 있으면 수리하는데 소요되는 수리시간은 수리능력에 독립적일 수 없다.

Gross등 [4,5,6,7]은 각 수리창에 병렬로 존재하는 한정된 수리능력과 일정 시점에서 고장날 수 있는 on-line제품수가 한정되어 있을 때의 전통적 기계-수리 대기모형을 다단계 모형으로 일반화 시켰다. Albright [1,2,3]는 다수의 기지와 하나의 중앙창으로 구성된 단일제품의 기계-수리 대기모형에서 근사해를 구하는 알고리즘과 평형상태의 확률분포를 이용하여 시스템의 특성치(기대품절량, 주문잔고등)를 구하였다. Gross등과 Albright의 모형은 METRIC 과 MOD-METRIC 모형보다는 현실적이지만 관리의 목적상 결정변수인 여유제품수를 상수로 보고 여유제품수를 변경시켜서 모의실험을 수행하여 시스템 특성치를 도출해야 하므로 관리자의 목표와 일치하거나 근접하는 해를 찾기 위해서는 많은 실험 회수와 시간이 소요되는 단점이 있다.

Yu등 [11]은 각 수리창(중앙창 및 기지창)의 한정된 수리능력 때문에 발생하는 대기행렬을 고려하여 각 기지에서 만족 하여야 할 최소요구충족율의 제약하에 각 기지에서 보유하여야 할 최소여유부품수를 수리적인 방법으로 도출하였다. 그러나, Yu등 [11]에서는 비용이 고려 되지 않았다. 때문에 비용 제약하의 재고수준의 결정은 불가능하였다. 따라서 본 논문에서는 각 수리창(중앙창 및 기지창)의 한정된 수리능력 때문에 발생하는 대기행렬을 고려하여 비용을 최소화 하기위하여 각 기지에서 보유해야할 여유부품수를 결정하는 방법을 제시하고 이를 발전시켜서 최소비용조건과 최소요구충족율을 동시에 만족시키는 재고수준 결정방법을 제시한다. 제시된 방법은 모델의 현실성을 상당히 증가시켰으며 의사결정자가 비용과 최소요구충족율의 제약하에 여유제품수를 결정하게 하였다.

Ⅱ.모형설정

우선 본 논문에서 사용할 기호를 다음과 같이 정의한다.

i : 기지를 나타내는 첨자($i=1,2,\dots,I$)

j : 중앙창을 나타내는 첨자

λ_i : 기지 i 에서 단위시간당 발생하는 고장수의 기대값

μ_i : 기지창($i=1,2,\dots,I$)내의 각 수리 창구에서 단위시간당 수리받는 평균 제품수

μ_j : 중앙창내의 각 수리 창구에서 단위시간당 수리받는 평균 제품수

c_i : 수리창 i의 수리 창구수

c_j : 중앙창 j의 수리 창구수

α_i : 기지 i에서 작동중이던 제품이 고장났을때, 그 고장이 경고장일 확률

f_i : 기지 i의 최소요구충족률
F_i : 기지 i의 실제충족율
S_i : 기지 i에서 보유하여야 할 최소 여유제품수
n : 기지창에서 수리받고 있는 제품수
N : 임의의 시점에 중앙창에서 수리중인 총 제품수
k_i : 중앙창에서 수리받고 있는 제품중 기지 i로 부터 수송되어 온 제품수
κ_i : 임의의 시점 중앙창에서 수리를 마치고 기지 i로 반송중인 제품수
t_i : 중앙창에서 기지 i까지 반송시간
Z_i : 임의의 시점에 기지 i에서의 총 고장수
$P_i(n)$: 임의의 시점에 기지창 i에서 수리중인 제품수가 n인 확률
$P_j(N)$: 임의의 시점에 중앙창에서 수리중인 제품수가 N인 확률
$P_{ij}(k_i)$: 중앙창에서 수리중인 제품중 기지 i 에서 수송되어온 제품수가 k_i인 확률
$P_{ji}(\kappa_i)$: 중앙창에서 기지 i로 반송중인 제품수가 κ_i인 확률
$P(Z_i)$: Z_i의 확률분포
h : 단위 재고비용
b : 단위 품절비용
$TC(S_i)$: 여유부품 S_i일때의 단위시간당 총 기대비용

1. 모형전개

본 논문에서는 다수의 기지와 각 기지당 1개의 기지창, 하나의 중앙창으로 구성된 시스템을 대상으로 한다. 기지창에서는 그 기지에서 발생한 경고장만을 수리하고 중고장 제품은 중앙창으로 수송되어 수리된다. 여유제품은 기지창에서만 보유하는 것으로 가정하였고, 수송 시간(travel time)은 기지(base)에서 창(depot)으로의 시간은 0으로 간주하고, 창(depot)에서 기지(base)로의 수송시간만 양의 값(positive)을 갖는 것으로 하고 기지간 여유부품의 이동은 없다고 가정하였다. 각 기지의 수요를 발생시키는 고장의 시간간격은 기지 i에서 평균 $1/\lambda_i$를 갖는 지수분포에 따르며 고장중에서 경고장은 α_i의 비율로 중고장은$(1-\alpha_i)$의 비율로 발생한다고 가정한다. 이 경우 기지창 i에 도착하는 경고장 제품의 발생시간간격 분포는 평균$1/(\alpha_i \lambda_i)$ 를 갖는 지수분포에 따른다. 보관창고에 여유제품이 존재하면 시간의 지체없이 즉시 교체하고 여유제품이 없을 때에는 기지창이나 중앙창에서 수리를 마치고 기지에 입고될 때까지의 시간이 지연된다. 기지에서 작동하던 제품에 고장이 발생하여 기지창이나 중앙창에서 수리 중이거나 중앙창에서 수리를 마치고 반송중인 제품은 기지의 관점에서 그 제품은 가용하지 않으므로 고장난 제품으로 처리되어야 한다. 시스템이 안정상태에 도달한 후 임의의 시점에서 기지 i 에서 고장난 제품수의 분포는 기지창 i 에서 수리중인 제품수와 중앙창에서 수리중인 중고장 제품중 기지 i로 부터 수송되어온 제품수 및 중앙창에서 수리를 마치고 기지 i로 반송중인 제품수의 분포를 합성하여 구할 수 있다.

1.1. 수리중인 경고장 제품수의 분포

기지창 i에 c_i의 수리창구가 있을때, 경고장 발생의 시간간격 분포는 평균$(1/\alpha_i \lambda_i)$인 지수분포에 따르고 수리시간이 평균 $1/\mu_i$인 지수분포에 따른다고 하면, 기지창 i에서 수리를 받고있는 제품수가 n일 확률 $P_i(n)$는 $M/M/c_i$모형과 유사한 식(1),(2)및 식(3)이 유도된다.

$$P_i(n)=\begin{cases}\dfrac{(\alpha_i\lambda_i)^n}{n!\ (\mu_i)^n}P_i(0) & (1\le n\le c_i)\\[2ex] \dfrac{(\alpha_i\lambda_i)^n}{(c_i)^{(n-c_i)}\ c_i!\ (\mu_i)^n}P_i(0) & (n\ge c_i)\end{cases}\tag{1}$$

$$P_i(0)\left[\sum_{n=0}^{c_i-1}\frac{(\alpha_i\lambda_i)^n}{n!\ (\mu_i)^n}+\sum_{n=c_i}^{\infty}\frac{(\alpha_i\lambda_i)^n}{(c_i)^{(n-c_i)}\ c_i!(\mu_i)^n}\right]=1\tag{2}$$

$$P_i(0)=\left[\sum_{n=0}^{c_i-1}\frac{(\alpha_i\lambda_i)^n}{n!\ (\mu_i)^n}+\frac{1}{(c_i)!}\left(\frac{\alpha_i\lambda_i}{(\mu_i)}\right)^{c_i} * \frac{c_i\mu_i}{(c_i\mu_i-\alpha_i\lambda_i)}\right]^{-1}\tag{3}$$

1.2. 수리중인 중고장 제품수의 분포

기지 i에서 발생한 단위시간당 중고장 제품수의 분포는 모수 $(1-\alpha_i)\lambda_i$를 갖는 포아송분포에 따르고, 각 기지에서 발생한 중고장 제품수의 분포는 서로 독립적이며 동일한 포아송분포에 따르므로 단위시간당 중앙창으로 수송되어지는 중고장 제품수의 확률분포는 $\sum(1-\alpha_i)\lambda_i$를 갖는 포아송분포에 따른다. 중앙창에 c_0개의 수리창구가 있다고 하면, 중앙창은 $M/M/c_0$ 대기행렬모형으로 분석할 수 있다. 시스템이 안정상태에 도달한 후 임의의 시점에서 중앙창에 N개의 중고장 제품이 존재할 확률 $P_j(N)$ 은 식(4)와 (5)로 표현된다.

$$P_j(N)=\begin{cases}\dfrac{(\sum(1-\alpha_i)\lambda_i)^N}{N!(\mu_0)^n}P_j(0) & (N\le c_0)\\[2ex] \dfrac{(\sum(1-\alpha_i)\lambda_i)^N}{(c_0)^{(N-c_0)}\ c_0!\ (\mu_0)^N}P_j(0) & (N\ge c_0)\end{cases}\tag{4}$$

$$P_j(0)=\left[\sum_{N=0}^{c_i-1}\frac{(\sum(1-\alpha_i)\lambda_i)^N}{N!(\mu_0)^N}+\frac{1}{c_0}\left[\frac{\sum(1-\alpha_i)\lambda_i}{\mu_0}\right]^{c_0} * \frac{c_0\mu_0}{c_0\mu_0-\sum(1-\alpha_i)\lambda_i}\right]^{-1}\tag{5}$$

중앙창에서 수리된 중고장 제품중 기지 i로 부터 수송되어온 제품수의 분포를 찾기 위해 중앙창에 N개의 제품이 존재한다고할때, 기지 $i(i=1,2,\cdots,I)$로부터 수송되어온 제품수를 각각 k_i개라 하고, 각 기지로부터 수송되어온 총 고장수와 기지 i에서 수송되어온 중고장수의 비율인$(1-\alpha_i)\lambda_i/\sum(1-\alpha_i)\lambda_i$를 θ_i라 치환하고 수리중인 중고장 제품수가 총 N일때 기지 i에서 수송되어온 제품수가 각각 k_i인 조건부 확률 $P(k_1,\ldots,k_i,\ldots,k_I|N)$을 $P(K|N)$라 놓으면

$$P(K|N)=\binom{N}{k_1,\cdots,k_i\cdots,k_I}\theta_i^{k_1}\cdots\theta_i^{k_i}\cdots\theta_I^{k_I}\tag{6}$$

따라서, $P(k_i|N)=\ \ P_{ij}(k_i|N)=\binom{N}{k_i}\theta_i^{k_i}(1-\theta_i)^{N-k_i}$ 이다. (7)

이때 $P_{ij}(k_i)$를 구하기 위하여 중앙창에 존재하는 전체 item의 개수에 대하여 조건을 주고 조건부확률을 이용하면

$$P_{ij}(k_i) = \sum_N P_{ij}(k_i \mid \text{전체 item의 개수가 } N)\ P(\text{전체 item의 개수가 } N)$$

$$= \sum_N P_{ij}(k_i \mid N) * P_j(N)$$

$$= \sum_N \binom{N}{k_i} \theta_i^{k_i}(1-\theta_i)^{N-k_i} * P_j(N) \tag{8}$$

1.3. 중앙창에서 기지로 반송중인 제품수의 분포

중앙창에서 수리된 제품의 임의의 시점 t에서 기지로 반송중인 제품의 시간간격분포는 중고장 제품의 발생시간 간격 분포와 같다 [8]. 각 기지에서 발생한 중고장 제품이 중앙창에 도착하는 시간간격 분포는$1/\sum(1-\alpha_i)\lambda_i$를 평균으로 갖는 지수 분포를 갖는다. 모든 기지로부터 중앙창에 도착한 중고장 제품수의 비율은 $(1-\alpha_i)\lambda_i/\sum(1-\alpha_i)\lambda_i$ 이다. 중앙창에서 수리를 마치고 반송되는 시간간격은 평균 $1/(1-\alpha_i)\lambda_i$인 지수분포를 갖는다. 또한, 중앙창으로 부터 기지 i까지의 반송시간을 t_i라 하면, 시스템이 평형상태에 도달한 후 임의의 시점에 반송중인 수리된 제품수의 분포는 반송시간 동안에 기지에서 발생한 중고장 제품수와 같다. 그러므로, 반송중인 제품수 κ_i의 확률분포 $P_{ji}(\kappa_i)$는 (9)와 같이 구할 수 있다.

$$P_{ji}(\kappa_i) = \frac{((1-\alpha_i)\lambda_i t_i)^{\kappa_i} * \mathrm{EXP}(-(1-\alpha_i)\lambda_i t_i)}{(\kappa_i)!} \tag{9}$$

$$\kappa_i = 0, 1, 2, \cdots$$

1.4. 기지 전체의 고장난 제품수의 분포

시스템이 안정상태에 도달한 후 기지창이나 중앙창에서 수리중이거나, 수리후 기지로 반송중인 모든 제품들은 기지의 관점에서는 고장난 제품수에 포함되어야한다. 기지 i의 고장난 제품의 총 수(Z_i)의 분포 $P(Z_i)$는 기지창에서 수리중인 제품수와 중앙창에서 수리중인 제품수, 중앙창에서 수리후 기지로 반송중인 제품수의 결합분포이다. Z_i의 분포 $P(Z_i)$는 CONVOLUTION TECHNIQUE에 의하여 구할 수 있으며, 분포는 (10)과 같다.

$$P(Z_i) = \sum_{\kappa_i} \sum_{k_i} P_{ji}(\kappa_i) * P_{ij}(k_i) * P_i(Z_i - k_i - \kappa_i) \tag{10}$$

$$\kappa_i = 0, 1, 2, \ldots,\quad k_i = 0, 1, 2, \ldots$$

2. 총비용식과 최소요구충족율

임의의 시점에서 기지 i에서 고장난 제품의 총수(Z_i)가 기지 i의 여유제품수 S_i 보다 크면 기지 i 에는 품절이 발생하고, 작으면 재고가 발생한다. 이때, 기대 총비용은 재고 비용과 품절 비용의 합이므로 식 (11)과 같다.

$$TC(S_i) = h \sum_{Z_i=0}^{S_i} (S_i - Z_i) P(Z_i) + b \sum_{Z_i=S_i+1}^{\infty} (Z_i - S_i) P(Z_i) \tag{11}$$

정리 1. 기대 총비용함수 $TC(S_i)$는 $[0,\infty)$구간에서 Unimodal이다.
< 증명 > Appendix 참조

기지에서 장비나 무기에 고장이 났을 때 보유하고 있는 여유제품으로 시간지체 없이 장비나 무기를 교체할 수 있을 확률을 기지충족율이라 하고 충족시키고자 하는 최소한의 기지충족율을 최소요구충족율이라 정의한다. 각 기지의 주어진 최소요구충족율을 만족시킬 수 있는 여유제품수는 기지 i의 실제충족율(F_i)이 최소요구충족율 f_i보다 커야하므로 다음식(12)를 만족하여야 한다.

$$F_i = \Pr\{ Z_i \leq S_i \} = \sum_{Z_i=0}^{S_i} P(Z) \geq f_i \tag{12}$$

정리 2. 기지충족율을 만족하는 재고수준은 식(13.1),(13.2)를 만족하는 S_i이다.

$$S_i = S_i^* \quad \text{if } S_i^* \geq \bar{S}_i \tag{13.1}$$

$$S_i = \bar{S}_i \quad \text{if } S_i^* \leq \bar{S}_i \tag{13.2}$$

여기서 S_i^*는 (A1.1)과 (A1.2)를 만족하는 재고수준이며 $\bar{S}_i$는 식(12)를 만족하는 재고수준중 최소값을 나타낸다.

<증명>
정리 1과 최소요구충족율의 정의에서 정리 2를 유도할 수 있다.

Ⅲ. 비용과 최소요구충족율을 고려한 최적해법

본 논문에서 제시하는 Algorithm은 첫째, 비용을 최소로 하는 여유제품수를 구하고, 둘째 최소요구충족율을 만족하는 여유제품을 구한 후 정리 1과 2를 이용하여 최소의 비용으로 최소요구충족율을 만족시킬 수 있는 여유제품수를 구하게 된다.

단계0. 자료입력
주어진 자료가 다음의 트래픽 밀도 조건을 만족하는지를 검토한다.
트래픽밀도(traffic density) = $\sum (1-\alpha_i)\lambda_i \,/\, c_0\mu_0 < 1$, $\alpha_i \lambda_i \,/\, \mu_i < 1$.
조건을 만족하면 단계1로 가고 그렇지 않으면 끝낸다.
단계1. 중앙창에서 수리중인 제품수가 N개인 확률, $P_j(N)$을 계산한다.
단계2. 기지에서 수리중인 제품수 계산가 n개인 확률, $P_i(n)$ 을 계산한다.
단계3. 중앙창에서 수리중인 제품이 k_i인 확률, $P_{ij}(k_i)$를 계산한다.
단계4. 기지 i로 반송중인 제품수가 κ_i인 확률, $P_{ji}(\kappa_i)$를 계산한다.
단계5. 기지 총 고장수가 Z_i인 확률, $P(Z_i)$ 를 계산한다.
단계6. 비용이 최소인 S_i을 계산한다.
$TC(S_i)$는 S_i에대한 Unimodal함수이므로 이분법(binary search)를 이용하여 $TC(S_i)$의 최소값을 주는점, 즉 최소비용을 만족하는 재고수준 S_i^*를구한다.
단계7. 최소요구충족율을 만족하는 가장 작은 재고수준 $\bar{S}_i$를 구한다.
단계8. S^* 와 $\bar{S}_i$ 중 큰값이 문제의 해, 즉 최소요구충족율을 최소의 비용으로 만족하는 재고수준이다.

Ⅳ. 수치예제

본 절에서는 앞에서 소개한 Algorithm을 이용하여 최적재고수준을 구하는 방법을 예제를 이용하여 설명한다. 두개의 기지와 기지창, 한개의 중앙창으로 구성된 시스템을 고려하자. 각 기지의 수리창구수, 고장발생률, 경고장율, 서비스율, 반송시간등은 Table I 에 주어져 있다.

Table I. Input Data for Example

base/depot NO.	λ_i	α_i	t_i	c_i	μ_i
base 1	10	0.6	2	2	25
base 2	20	0.75	3	2	30
depot	-	-	-	4	3

주어진 시스템의 경우에 비용만을 고려한 최소비용의 재고수준(S_i^*)은 다음의 Table II와 같이 구할 수 있다.

Table II. Minimum Cost Inventory Level

기지	여유부품수	최소비용
base 1	11	38
base 2	20	50

Table II의 결과를 최소요구충족율을 만족하는 최적여유부품수로 확장하면 결과는 Table III과 같다. Table III의 결과에서 볼 수 있듯이 최소비용과 최소요구충족율을 동시에 만족하는 여유제품수는 최소요구충족율이 클 경우는 최소요구충족율에 의해 결정되고 그렇지 않은 경우는 비용이 최소인 점에서 결정된다.

Table III. Output of the Example
base 1(base 2)

F_i	f_i	S_i^*	$TC(S_i^*)$
0.99	0.994(0.992)	20(30)	97.85(120.14)
0.95	0.954(0.959)	16(26)	60.87(83.06)
0.90	0.927(0.916)	15(24)	53.03(67.32)
0.85	0.888(0.883)	14(23)	46.38(60.32)
0.80	0.833(0.840)	13(22)	41.39(55.62)
0.75	0.759(0.786)	12(21)	38.60(52.03)
0.70	0.759(0.721)	12(20)	39.60(50.38)
0.65	0.667(0.721)	11(20)	38.58(50.38)
0.60	0.667(0.721)	11(20)	38.58(50.38)

V.결론

기지에서 작동중이던 제품에 고장이 발생하여 기지창이나 중앙창에서 수리를 받는 중이거나 중앙창에서 수리를 마치고 기지로 반송중인 제품수의 각각의 확률분포를 대기행렬이론에 의하여 구하고 3개의 분포를 CONVOLUTION TECHNIQUE에 의해 합성한 후 총 비용을 구하여 최소요구충족율을 최소의 비용으로 만족시킬 수 있는 여유제품수를 결정하였다. 본 논문의 특징은 기존의 수리가능한 제품의 재고문제에서 재고수준이 주어진 상황에서 시스템의 특성치를 유도하는 것과는 반대로 최소비용과 최소요구충족율을 동시에 고려하는 여유제품수를 구하는 최적해법을 제시했다는 점이다. 제시된 방법은 기존의 방법들보다 현실적이며 재고와 품절 비용의 변화시에도 민감도 분석을 통해 여유부품수를 손쉽게 구할 수있어 의사결정에 많은 도움이 될 것이다.

참고문헌

[1] Albrihgt, S. C., "An Approximation to the Stationary Distribution of a Multi-Echelon Repairable Item System with Finite Sources and Channels," *Naval Research Logistics*, Vol.36, pp.179-195, 1989.

[2] Albrihgt, S. C. and A. Soni, "An Approximation to the Stationary Distribution of a Multidimensional Markov Process," *IIE Transactions*, Vol.20, pp.111-118, 1988.

[3] Albrihgt, S. C. and A. Soni, "Markov Multi-Echelon Repairable Inventory System," *Naval Research Logistics*, Vol.35, pp.49-61, 1988.

[4] Gross, D., "On the Ample Service Assumption of Palm's Theorem in Inventory Modelling," *Management Science*, Vol.28, pp.1065-1079, 1982.

[5] Gross, D. and J. F. Ince, "Spares Provisiong for Repairable Items : Cyclic Queues in Light Traffic," *AIIE Transactions*, Vol.10, pp.307-314, 1987.

[6] Gross, D., D. H. Kahn, and J. D. Marsh, "Queueing Models for Spares Provisiong," *Naval Research Logistics Quarterly*, Vol.24, pp.521-536, 1977.

[7] Gross, D., D. R. Miller, and R. M. Soland, "A Closed Queueing Network Model for Multi-Echelon Repairable Item Provisiong," *IIE Transactions*, Vol.15, pp.344-352, 1983.

[8] Hillier, F. S. and G. J. Lieberman, *Introduction to Operations Research*, 5th ed., McGraw-Hill, 1990.

[9] Muckstadt, J. A., "A Model for Multi-Echelon Multi-Indenture Inventory System," *Management Science*, Vol.20, pp.472-481, 1973.

[10] Sherbrooke, C. C., "METRIC : A Multi-Echelon Technique for Recoverable Item Control," *Operations Research*, Vol.16, pp.122-141, 1968.

[11] Yu, H. G., M. S. Kim, and J. S. Kim, "The Method of Determinating the Spare Inventory Level in the Repairable Munition System," *Journal of the Military Operations Research Society of Korea*, Vol.16, No.2, pp.96-104, 1990.

APPENDIX. 정리 1의 증명

Unimodal이 되기 위하여는 다음 식을 만족하는 점 S_i가 존재하여야 한다.

$$TC(S_i+k+1) \geq TC(S_i+k) \quad \text{for } k=0,1,2,\ldots,\infty \tag{A1.1}$$
$$TC(S_i-k-1) \geq TC(S_i-k) \quad \text{for } k=0,1,2,\ldots,S_i-1 \tag{A1.2}$$

1) k=0일 경우

k=0을 식(A1.1)과 (A1.2)에 대입하면

$$TC(S_i+1) \geq TC(S_i) \tag{A2.1}$$
$$TC(S_i-1) \geq TC(S_i) \tag{A2.2}$$

우선 (11)식은 아래식(A3),(A4),(A5)와 같이 쓸 수 있다.

$$TC(S_i) = h\sum_{Z_i=0}^{S_i-1}(S_i-Z_i)P(Z_i) + b\sum_{Z_i=S_i+1}^{\infty}(Z_i-S_i)P(Z_i) \tag{A3}$$

$$TC(S_i+1) = h\sum_{Z_i=0}^{S_i}(S_i+1-Z_i)P(Z_i) + b\sum_{Z_i=S_i+2}^{\infty}(Z_i-S_i-1)P(Z_i) \tag{A4}$$

$$TC(S_i-1) = h\sum_{Z_i=0}^{S_i-2}(S_i-1-Z_i)P(Z_i) + b\sum_{Z_i=S_i}^{\infty}(Z_i-S_i-1)P(Z_i) \tag{A5}$$

식(A3)와 (A4)를 식(A2.1)에 대입하면 식(A6)을 얻을 수 있다.

$$h\sum_{Z_i=0}^{S_i}P(Z_i) - b\sum_{Z_i=S_i+1}^{\infty}P(Z_i) > 0 \tag{A6}$$

식(A3)와 (A5)를 식(A2.2)에 대입하면 식(A7)을 얻을 수 있다.

$$-h\sum_{Z_i=0}^{S_i-1}P(Z_i) + b\sum_{Z_i=S_i}^{\infty}P(Z_i) > 0 \tag{A7}$$

식(A6)과 (A7)을 이용하면 Unimodal의 조건인 식(A2.1)과 (A2.2)는 식(A8)로 표시될 수 있다.

$$\sum_{Z_i=S_i+1}^{\infty}P(Z_i) \Big/ \sum_{Z_i=0}^{S_i}P(Z_i) < h/b < \sum_{Z_i=S_i}^{\infty}P(Z_i) \Big/ \sum_{Z_i=0}^{S_i-1}P(Z_i) \tag{A8}$$

$\sum_{Z_i=0}^{S_i}P(Z_i) > \sum_{Z_i=0}^{S_i-1}P(Z_i)$ 이고 $\sum_{Z_i=S_i}^{\infty}P(Z_i) > \sum_{Z_i=S_i+1}^{\infty}P(Z_i)$ 이므로

$\sum_{Z_i=S_i+1}^{\infty}P(Z_i) \Big/ \sum_{Z_i=0}^{S_i}P(Z_i) < \sum_{Z_i=S_i}^{\infty}P(Z_i) \Big/ \sum_{Z_i=0}^{S_i-1}P(Z_i)$ 이고, 따라서

(A8)식을 만족하는 실수 S_i를 찾을 수 있다.

2) k≠0일 경우

$$TC(S_i+k) = h\sum_{Z_i=0}^{S_i+k-1}(S_i+k-Z_i)P(Z_i) + b\sum_{Z_i=S_i+k+1}^{\infty}(Z_i-S_i-k)P(Z_i) \tag{A9}$$

$$TC(S_i+k+1) = h\sum_{Z_i=0}^{S_i+k}(S_i-Z_i+k+1)P(Z_i) + b\sum_{Z_i=S_i+k+2}^{\infty}(Z_i-S-k-1)P(Z_i) \quad (A10)$$

(A1.1)의 조건은 (A11)로 고쳐 쓸 수 있다.

$$h\sum_{Z_i=0}^{S_i+k}(S_i-Z_i+k+1)P(Z_i) - h\sum_{Z_i=0}^{S_i+k-1}(S_i-Z_i+k)P(Z_i)$$

$$+ b\sum_{Z_i=S_i+k+2}^{\infty}(Z_i-S-k-1)P(Z_i) - b\sum_{Z_i=S_i+k+1}^{\infty}(Z_i-S-k)P(Z_i)$$

$$= h\sum_{Z_i=0}^{S_i+k}P(Z_i) + b\left(-\sum_{Z_i=S_i+k+2}^{\infty}P(Z_i) - P(S_i+k+1)\right)$$

$$= h\sum_{Z_i=0}^{S_i+k}P(Z_i) - b\sum_{Z_i=S_i+k+1}^{\infty}P(Z_i) > 0 \quad (A11)$$

(A11)식은 다시 쓰면 (A12)식이 된다.

$$h/b > \sum_{Z_i=S_i+k+1}^{\infty}P(Z_i) \Big/ \sum_{Z_i=0}^{S_i+k}P(Z_i) \quad (A12)$$

다음으로 S_i-k 과 S_i-k-1에 적용하면 식 (A13),(A14)와 같다.

$$TC(S_i-k) = h\sum_{Z_i=0}^{S_i-k-1}(S_i-Z_i-k)P(Z_i) + b\sum_{Z_i=S_i-k+1}^{\infty}(Z_i-S_i+k)P(Z_i) \quad (A13)$$

$$TC(S_i-k-1) = h\sum_{Z_i=0}^{S_i-k-2}(S_i-k-1-Z_i)P(Z_i) + b\sum_{Z_i=S_i+k+1}^{\infty}(Z_i-S_i-k+1)P(Z_i) \quad (A14)$$

(A1.2)의 조건은 (A15)와 같이 쓸 수 있다.

$$h\sum_{Z_i=0}^{S_i-k-2}(S_i-Z_i-k-1)P(Z_i) - h\sum_{Z_i=0}^{S_i-k-1}(S_i-Z_i-k)P(Z_i)$$

$$+ b\sum_{Z_i=S_i-k}^{\infty}(Z_i-S+k+1)P(Z_i) - b\sum_{Z_i=S_i-k+1}^{\infty}(Z_i-S+k)P(Z_i)$$

$$= -h\sum_{Z_i=0}^{S_i}P(Z_i) + b\sum_{Z_i=S_i-k}^{\infty}P(Z_i) > 0 \quad (A15)$$

마찬가지로, (A15)식을 다시 쓰면 (A16)식이 된다.

$$h/b < \sum_{Z_i=S_i-k}^{\infty}P(Z_i) \Big/ \sum_{Z_i=0}^{S_i-k-1}P(Z_i) \quad (A16)$$

여기서 식(A8)를 만족하는 h/b와 S_i는 당연히 (A12),(A16)식을 만족하게 된다. 즉, 식 (A1.1)과 (A1.2)를 만족하는 점 S_i가 존재하게 되며 따라서, $TC(S_i)$는 구간$(0,\infty)$에 대하여 Unimodal이다.