시설재배치를 고려하는 동적시설입지선정문제: 제모형들과 이들의 선형계획완화비교

盧亨鳳

홍익대학교 경영학과

〈요 약〉

본 연구에서는 보다 다양한 응용가능성이 있도록 시설재배치를 고려할 수 있는 동적 시설입지선정문제를 다루었다. 대부분의 기존연구에서는 의사결정대안으로 계획기간 동안 어느 지역에 새로이 시설을 설치하여 운영할 것이며, 이미 운영중인 시설은 이를 언제 폐쇄할 것인가만을 고려하였다. 본 연구문제에서는 이에 추가하여 새로이 설치된 시설도 계획기간중에 다시 폐쇄할 수 있고, 일단 폐쇄되었다 하더라도 새로이 설치할 수 있도록 문제를 정의하였다.

이와 같이 정의된 문제에 대해서 여러가지 가능한 수리모형들을 정립하여 이들을 상호 비교하여 보았다. 우선적으로 목적함수의 선형성, 제약식의 형태, 정수변수와 실수변수들의 수, 제약식의 수 등에 대해서 비교하여 보았다. 다음으로는 이들 모형들을 선형계획모형으로 완화시켰을 경우의 목적함수값 (원문제의 최적목적함수값의 하한)을 비교하여 보았는데, 모두 같다는 결과를 얻었다. 이는 본 연구문제에 대한 해법개발시 사용해법의 특성에 가장 적합한 모형을 선택하면 어떠한 모형을 사용하여도 무방하다는 것을 의미한다.

I. 서론

정적 (static) 시설입지 선정문제는 그 다양한 응용 가능성 때문에 매우 많은 연구의 대상이 되어 왔다 (이에 대한 연구들은 저자의 연구[8]에서 상세히 조사된 바 있다). 그런데 제품 수요가 시간이 경과함에 따라서 지역적으로 다른 변화를 보이는 경우에는 위에서 언급한 정적문제로서는 좋은 의사결정을 내릴 수가 없다. 예로써 제품의 수명주기 내에서 지역별로 수요 변화율이 상이한 경우, 또는 지역적으로 인식하는 기술 진부화 정도가 다른 경우 등을 들 수 있다. 따라서 이러한 경우에는 미래 수요 변화를 고려하기 위한 장기 계획이 필요한 데, 이를 위해서 동적 (dynamic) 시설입지 선정문제가 고려되어야 한다.

일반적으로 동적 시설입지 선정문제에서는, 주어진 계획기간 동안 고객의 수요를 최소의 비용으로 충족시키기 위하여, 운영시설의 수, 시설들의 위치, 각 시설의 설치 및 폐쇄 시기, 각 시설이 담당해야 하는 고객들의 집합 등을 결정하고자 한다. 고려되는 비용으로는 시설들의 설치, 운영, 폐쇄에 소요되는 비용과 넓은 지역에 분산되어 있는 고객들에 대한 제품공급비용 등을 들 수 있다.

본 연구에서 다루고자 하는 동적 시설입지 선정문제에서는 보다 현실적으로 응용가능성이 높도록 다음과 같은 면을 추가하여 고려하고자 한다.

(1) 계획기간 초기에 이미 가동중인 시설들을 인정하여 향후 의사결정에서 고려한다. 즉 새로운 시스템 설계시 뿐 만 아니라 기존 운영시스템의 재개편시에도 적용가능하도록 한다.

(2) 계획기간동안 고객들의 수요변화는 일정하지 않으며, 또한 어느 한 고객의 수요도 반드시 단조롭게 변한다고 가정하지 않는다. 즉 지역별 수요 변화의 다양성을 고려할 수 있고, 계획기간이 긴 경우 제품수명주기내 각 단계에서의 수요 변화에 적합한 시스템을 설계가능하도록 한다 - 이는 본 연구문제를 다제품의 생산분배시스템 설계문제로 확장하는 경우에 매우 유용하리라 본다.

(3) 고려하는 의사결정에서는 일단 설치(폐쇄)된 시설도 차후 폐쇄(재설치)될 수 있는 가능성을 배제하지 않는다. 또한 한 시설에 배정된 고객 집단도 시간의 경과와 수요 변화에 따라 변할 수 있도록 한다.

본 연구모형에서는 모든 시설들의 생산능력에 제한이 없다고 가정하였다. 즉 각 시점에서의 수요 변화에 따라서 시설능력조정이 용이하다고 가정한 것이다. 만일 이것이 용이하지 않은 경우에는 한 시설의 현재 생산능력은 증설이 되지않는 한 미래 생산능력의 상한을 의미한다. 즉 현재 수요에 맞추어 시설능력을 조정하였을 경우, 미래 수요의 감소는 시설가동율의 저하 (단위당 비용 상승), 미래 수요의 증가는 증설의 필요를 의미한다. 이러한 경우에 적합한 분석모형으로는 multilocation capacity planning models[6,7], dynamic capacitated facility location models[1,3] 등이 있으므로 이를 참조하기를 바란다. 그러나 이들 문제는 매우 복잡하기 때문에 그 해법에 있어서 시설능력 제약식을 완화한 본 연구문제가 한 요소로써 역할을 수행할 수 있어서 본 연구문제는 그 자체로써도 의의가 크다고 볼 수 있다.

본 연구에서는 우선 앞에서 설정한 본 연구문제에 대하여 정립가능한 여러가지 수리모형을 제시하고자 한다. 이 모형들은 기존의 연구에서 개발한 것 또는 이들을 본 연구문제에 부합되도록 변형시킨 것 뿐만 아니라, 본 연구에서 새로이 개발한 것을 포함하고 있다. 수리모형 제시와 더불어 이들의 선형계획완화시의 특성 및 이들의 상호관계를 비교하고자 한다. 이에 대한 분석은 각 모형에 대한 해법 개발시에 매우 유용하게 쓰일 수 있으리라 예상된다. 마지막으로 이 분석결과를 토대로 결론을 맺고자 한다.

II. Quadratic Model

본 연구문제에서는 우선 다음과 같은 가정을 한다. 즉 계획기간은 l 이고 (L = {t: t=1,2,...,l}), 고객은 n명이며 (J={j: j=1,2,...,n}), 이들의 수요는 시점별로 d_{jt}로써 주어져 있다. 전 계획기간 동안 시설이 설치가능한 지역은 m 지역으로 주어져 있다 (I={i: i=1,2,...,m}). 또한 수리모형을 정립하기 위하여 다음의 기호들을 정의한다.

c_{ijt} = 시점 t에서의 고객 j의 총수요를 시설 i가 생산,공급하는 데 소요되는 비용을 현재가격으로 할인한 비용,

a_{it} = 시점 t 초에 시설 i를 설치하는 데 소요되는 고정비를 현재가격으로 할인한 비용,

g_{it} = 시점 t에 시설 i를 운영하는 데 소요되는 고정비를 현재가격으로 할인한 비용,

b_{it} = 시점 t 초에 시설 i를 폐쇄하는 데 소요되는 고정비를 현재가격으로 할인한 비용,

x_{ijt}= 고객 j의 시점 t에서의 수요를 시설 i가 충족시키는 비율,

y_{it} = 만일 시설 i가 시점 t에서 운영되면 1, 아니면 0.

모형에서 계획기간 이전(시점 0)의 기존 시스템을 반영하기 위해서는 단순히 변수 y_{i0}, $i \in I$, 를 시설운영 여부에 따라 1 또는 0 으로 놓으면 된다. 그러나 본 연구에서는 모형을 단순화시키기 위하여 이 대신 y_{i0} = 1 이면 a_{i1} = 0, 그리고 y_{i0} = 0이면 b_{i1} = 0 으로 놓고, 기존시설의 존재여부에 관계없이 모든 y_{i0}를 0으로 놓기로 한다. 이는 이 모형에서 뿐만 아니라 앞으로 설명하는 모든 모형에서도 적용하기로 한다.

이러한 가정하에 모형을 정립하면 다음과 같은 mixed 0-1 quadratic programming model이 된다:

$$\text{(PQ) Min.} \quad \sum_t \sum_j \sum_i c_{ijt} x_{ijt} + \sum_t \sum_i g_{it} y_{it} + \sum_t \sum_i a_{it}(1-y_{i,t-1}) y_{it} + \sum_t \sum_i b_{it} y_{i,t-1}(1-y_{it}), \qquad (2.1)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_i x_{ijt} = 1, \qquad \forall\, j,t, \qquad (2.2)$$

$$x_{ijt} \le y_{it}, \qquad \forall\, i,j,t, \qquad (2.3)$$

$$x_{ijt} \ge 0, \qquad \forall\, i,j,t, \qquad (2.4)$$

$$y_{it} = 0 \text{ or } 1, \qquad \forall\, i,t. \qquad (2.5)$$

목적함수 (2.1)은 계획기간에 발생하는 총비용을 최소로 하고자 한다. 제약식 (2.2)는 모든 시점의 고객수요는 충족되어야 함을 의미한다. 제약식 (2.3)은 각 시점의 수요는 그 시점에서 운영되는 시설에 한하여 충족시킬 수 있음을 의미한다.

모형 (PQ)는 이 분야 연구의 효시인 Warszawski와 Peer[13,14,15]의 모형을 참조하여

작성한 것이다. 이들의 모형이 모형 (PQ)와 다른 점을 열거하면 다음과 같다.

(1) 목적함수에서 시설폐쇄비용, 즉 네번째 항을 고려하지 않았다.
(2) 제약식 (2-3)을 다음과 같이 j에 대하여 합한 형태로 표현하였다.

$$\Sigma_j x_{ijt} \le n\, y_{it}\,, \qquad \forall i, t. \qquad (2.3)'$$

(3) 계획기간 이전의 기존 시스템을 인정하지 않았다. 즉 y_{i0}를 고려하지 않았다.

따라서 모형 (PQ)는 이들의 모형과 비교할 때 보다 일반적이라고 볼 수 있다.

모형 (PQ)는 목적함수에 quadratic terms을 포함하기 때문에 이를 위한 효율적인 해법을 개발하기는 어렵다고 본다. 단지 Warszawski와 Peer[13,14]의 모형과는 달리 제약식 (2.3)'을 (2.3)과 같이 disaggregated form으로 만들었기 때문에 차후 해법개발시에 약간의 도움은 되리라 생각한다.

참고로 모형 (PQ)는 mnl 개의 실수변수, ml 개의 정수변수를 가지며, nl(m+1) 개의 제약식을 가진다.

III. 모형 (PQ)의 선형화 모형 (I)

모형 (PQ)는 quadratic model이기 때문에 효율적인 해법을 개발하기 어렵다. 따라서 제 3 장에서는 모형 (PQ)를 새로운 선형모형으로 변형해 보기로 한다. 이를 위해서 우선 목적함수 (2.1)에 있는 quadratic term $y_{i,t-1} \cdot y_{it}$를 새로운 0-1 정수변수 z_{it}로 대체하기로 한다[17]. 그러면 모형 (PQ)는 다음과 같은 mixed 0-1 linear programming model이 된다:

$$\text{(PA)}\quad \text{Min.}\quad \sum_t \sum_j \sum_i c_{ijt} x_{ijt} + \sum_t \sum_i f_{it} y_{it} - \sum_{t \in T_1} \sum_i d_{it} z_{it}, \qquad (3.1)$$

$$\text{s.t.}\quad \sum_i x_{ijt} = 1, \qquad \forall j, t, \qquad (3.2)$$

$$x_{ijt} \le y_{it}, \qquad \forall i, j, t, \qquad (3.3)$$

$$z_{it} \le y_{it}, \qquad \forall i, t \in T_1, \qquad (3.4)$$

$$z_{it} \le y_{i,t-1}, \qquad \forall i, t \in T_1. \qquad (3.5)$$

$$x_{ijt} \ge 0, \qquad \forall i, j, t, \qquad (3.6)$$

$$y_{it} = 0 \text{ or } 1, \qquad \forall i, t, \qquad (3.7)$$

$$z_{it} = 0 \text{ or } 1, \qquad \forall\ i, t \in T_1. \tag{3.8}$$

여기서 $f_{it} = g_{it} + a_{it} + b_{i,t+1}, \qquad \forall\ i, t, \qquad (3.9)$

$$d_{it} = a_{it} + b_{it}, \qquad \forall\ i, t, \tag{3.10}$$

$$b_{i,1+1} = 0, \qquad \forall\ i, \tag{3.11}$$

$$T_1 = \{t:\ t = 2, 3, \ldots, 1\}. \tag{3.12}$$

모형 (PA)가 (PQ)에 제약식 (3.4)와 (3.5)를 추가한 것은 다음의 관계를 나타내기 위함이다.

$$z_{it} = y_{it}\ y_{i,t-1}, \qquad i, t \in T_1. \tag{3.13}$$

즉 $z_{it} = 1$ 이기 위해서는 $y_{it} = y_{i,t-1} = 1$ 이어야 하고, 그 나머지 경우에는 모두 0 이어야 한다. 이는 제약식 (3.4)와 (3.5)와 z_{it}의 목적함수 계수가 음수라는 사실에 의해 보장된다. 따라서 모형 (PA)와 (PQ)는 동일하다는 것을 알 수 있다.

모형 (PA)가 추가로 내포하고 있는 제약식 (3.4)와 (3.5)는 전형적인 variable upper bound (VUB) constraints의 형태를 가지고 있어서 선형계획완화시 상대적으로 좋은 최적해의 하한을 구할 수 있으리라 예상된다. 또한 (PA)의 선형계획완화문제의 쌍대문제가 매우 간단한 형태를 가지고 있다. 저자는 이에 착안하여 최적해의 하한을 선형계획 완화문제의 쌍대문제를 휴리스틱기법으로 풀어서 얻는 연구를 현재 수행하고 있다.

참고로 모형 (PA)는 mnl 개의 실수변수, (2ml-m) 개의 정수변수를 가지며, [nl(m+1)+2m(l-1)] 개의 주제약식을 가진다. 따라서 모형 (PQ)에 비해서 대략 두배의 정수변수를 가지며, 2m(l-1) 개의 제약식을 추가로 내포하고 있다.

IV. 모형 (PQ)의 선형화 모형 (II)

본 장의 모형 또한 제 2 장의 모형 (PQ)을 선형모형으로 변환시킨 것인데, 제 3 장의 모형 (PA)와는 또 다른 형태를 가지고 있다. 우선 (PA)의 quadratic term을 대체하기 위하여 다음의 두 가지 새로운 0-1 정수변수를 정의하기로 한다.

$$y'_{it} = (1 - y_{i,t-1})y_{it}; \tag{4.1}$$

$$y''_{it} = y_{i,t-1}(1 - y_{it}). \tag{4.2}$$

새로이 정의한 정수변수를 모형 (PQ)의 목적함수내의 대응하는 부분에 대입하면 다음과 같은 모형 (PB)를 얻을 수 있다.

$$\text{(PB) Min. } \sum_t \sum_j \sum_i c_{ijt}x_{ijt} + \sum_t \sum_i g_{it}y_{it} + \sum_t \sum_i a_{it}y'_{it} + \sum_{t \in T_1} \sum_i b_{it}y''_{it} \tag{4.3}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_i x_{ijt} = 1, \qquad \forall\ j, t, \tag{4.4}$$

$$x_{ijt} \le y_{it}, \qquad \forall\ i, j, t, \tag{4.5}$$

$$y_{it} - y_{i,t-1} \le y'_{it}, \qquad \forall\ i, t, \tag{4.6}$$

$$y_{i,t-1} - y_{it} \le y''_{it}, \qquad \forall\ i, t \in T_1, \tag{4.7}$$

$$x_{ijt} \ge 0, \qquad \forall\ i, j, t, \tag{4.8}$$

$$y_{it},\ y'_{it},\ y''_{it} = 0 \text{ or } 1, \qquad \forall\ i, t. \tag{4.9}$$

새로이 정의한 두 가지 정수변수가 관계 (4.1)과 (4.2)를 유지하기 위해서는 모형 (PB)에 새로이 추가된 두 가지 제약식 (4.6)과 (4.7)을 충족시켜야 한다. 왜냐하면 $y_{it} = 1$ 이고 $y_{i,t-1} = 0$ 인 경우에만 $y'_{it} = 1$ 이어야 하고, $y_{i,t-1} = 1$ 이고 $y_{it} = 0$ 인 경우에만 $y''_{it} = 1$ 이 되어야 하기 때문이다. 따라서 모형 (PB)는 (PQ)와 동일한 문제임을 알 수 있다.

모형 (PB)는 mnl 개의 실수변수, (3ml-m)개의 정수변수를 가지고, [(mn+n+2m)l-m] 개의 제약식을 포함하고 있다. 참고로 모형 (PA)와 비교하면 대략 1.5배의 정수변수를 가지고 있으며, 제약식은 단지 m개만을 더 포함하고 있다. 모형 (PB)에서 모형 (PQ)에 비하여 추가된 제약식은 (4.6)과 (4.7)인데, 이 제약식의 형태는 generalized variable upper bound(GVUB) constraints의 형태를 갖고 있어서 모형 (PA)의 VUB와는 약간 다르다고 할 수 있다.

앞으로 모든 모형 (·)을 선형계획완화시킨 것을 (·L)로 표기하고, v(·)와 $\underline{v}$(·)는 각각 모형 (·)의 최적목적함수값과 이의 상한을 표시한다고 하자.

[정리 4.1] v(PAL) = v(PBL). (4.10)

<증명>

i) 우선 x, y, z 를 (PAL)의 최적해라고 하자. 그러면 z_{it}의 목적함수계수가 음수이므로

$$z_{it} = \min\{y_{it},\ y_{i,t-1}\}. \tag{4.11}$$

다음으로 $y'_{it} = \max\{y_{it} - z_{it},\ 0\}$, $y''_{it} = \max\{y_{i,t-1} - z_{it},\ 0\}$이라고 하자.

그러면 $y'_{it} = \max\{y_{it} - y_{i,t-1},\ 0\}$, $y''_{it} = \max\{y_{i,t-1} - y_{it},\ 0\}$이 된다.

따라서 y'_{it}, y''_{it}는 (4.6)과 (4.7)을 만족하므로 x, y, y', y"을 (PBL)의 목적함수에 대입하고 변형시키면

$$\underline{v}(PBL) = \sum_t \sum_j \sum_i c_{ijt}x_{ijt} + \sum_t \sum_i g_{it}y_{it} + \sum_t \sum_i a_{it} \max\{y_{it}-z_{it},\ 0\}$$

$$+ \sum_{t \in T_1} \sum_i b_{it}\max\{y_{i,t-1}-z_{it},\ 0\}$$

$$= \sum_t \sum_j \sum_i c_{ijt}x_{ijt} + \sum_t \sum_i g_{it}y_{it} + \sum_t \sum_i a_{it}(y_{it}-z_{it}) + \sum_{t \in T_1} \sum_i b_{it}(y_{i,t-1}-z_{it})$$

$$= v(PAL).$$

고로 $v(PBL) \leq v(PAL)$.

ii) 우선 x, y, y', y"을 (PBL)의 최적해라고 하자. 그러면

$y'_{it} = \max\{y_{it}-y_{i,t-1},\ 0\}$, $y''_{it} = \max\{y_{i,t-1}-y_{it},\ 0\}$이 된다.

다음으로 $z_{it} = \max\{\ y_{it},\ y_{i,t-1}\} - \max\{y'_{it},\ y''_{it}\}$ 이라고 하자. 그러면

$z_{it} = \min\{y_{it},\ y_{i,t-1}\}$.

따라서 z_{it}는 (3.4)과 (3.5)를 만족하므로 x, y, z를 (PAL)의 목적함수에 대입하고 변형시키면

$$\underline{v}(PAL) = \sum_t \sum_j \sum_i c_{ijt}x_{ijt} + \sum_t \sum_i (g_{it}+a_{it}+b_{i,t+1})y_{it} - \sum_t \sum_i (a_{it}+b_{it})z_{it}$$

(여기서 $z_{i1}=0$)

$$= \sum_t \sum_j \sum_i c_{ijt}x_{ijt} + \sum_t \sum_i g_{it}y_{it} + \sum_t \sum_i a_{it}(y_{it}-z_{it}) + \sum_t \sum_i b_{it}(y_{i,t-1}-z_{it})$$

(여기서 $y_{i0}=0$)

$$= \sum_t \sum_j \sum_i c_{ijt}x_{ijt} + \sum_t \sum_i g_{it}y_{it}$$

$$+ \sum_t \sum_i a_{it}\max\{y_{it}-y_{i,t-1},\ 0\} + \sum_t \sum_i b_{it}\max\{y_{i,t-1}-y_{it},\ 0\}$$

$$= v(PBL).$$

고로 $v(PAL) \leq v(PBL)$.

iii) i)과 ii)로 부터

$v(PAL) = v(PBL)$. □

V. 정적문제로 변환한 모형

우선 다음의 기호를 정의하기로 하자.

$$T_{it} = \{r: r=[t_1, t_2], 1 \le t_1 \le t \le t_2 \le l\}, \quad \forall i,t, \tag{5.1}$$

위에서 r은 계획기간 [1,l] 중에 포함되는 특정기간을 나타낸다. 따라서 T_{it}는 t를 포함하는 모든 특정기간들의 집합이며, 임의의 장소 i 에서 t 시점에 운영되는 시설의 실제 운영기간은 집합 T_{it}의 한 원소라고 볼 수 있다.

이러한 가정하에서 본 연구문제는 다음과 같이 혼합 0-1 정수계획모형으로 정립할 수 있다.

$$\text{(PG)} \quad \text{Min } \Sigma_r \Sigma_t \Sigma_j \Sigma_i c^{ir}_{jt} x^{ir}_{jt} + \Sigma_r \Sigma_i h_{ir} u_{ir}. \tag{5.2}$$

s.t.

$$\Sigma_r \Sigma_i x^{ir}_{jt} = 1, \quad \forall j,t, \tag{5.3}$$

$$x^{ir}_{jt} \le u_{ir}, \quad \forall i,j,t,r, \tag{5.4}$$

$$x^{ir}_{jt} \ge 0, \quad \forall i,j,t,r, \tag{5.5}$$

$$u_{ir} = 0 \text{ 또는 } 1, \quad \forall i,r. \tag{5.6}$$

여기에서

- c^{ir}_{jt} = 입지 i에서 기간 r 동안 운영되는 설비로부터 t시점의 고객 j의 총수요를 공급하는 데 소요되는 비용을 현재가격으로 할인한 비용.
- h_{ir} = 입지 i에 시설을 설치하여 기간 r동안 운영하는 데 소요되는 총 고정비용을 현재가격으로 할인한 비용, 즉 시설의 설치 및 폐쇄비용과 이 기간동안 운영에 소요되는 고정비의 합.
- x^{ir}_{jt} = 고객 j의 t시점에서의 수요중 입지 i에 기간 r동안 설치한 시설로 부터 공급받는 비율.
- u_{ir} = 만일 입지 i에 설치된 시설의 운영기간이 r이면 1이고 아니면 0.

목적함수 (5.2)는 총비용의 합을 최소로 함을 의미한다. 제약식 (5.3)은 모든 고객의 각 시점에서의 수요를 충족시켜야 함을 나타내고, (5.4)는 한 시점에서의 고객 수요는 그 때 운영중인 시설들만이 공급할 수 있음을 나타낸다. 계획기간 이전에 이미 기존시설이 설치되어 있는 경우는 단지 계수 h_{ir}을 조정함으로써 반영할 수 있다. 즉 입지 i에 기존시설이 배치되어 있고 r 기간동안 운영되는 경우, 즉 $r = [t_1, t_2]$에서 $t_1 = 1$ 이면 h_{ir}에 시설의 설치비용은 포함시키지 않으면 되며, 그 이외에는 별도의 수정이 불필요하다.

모형 (PG)에서 동적인 구조를 표현하기 위해서는

$$c^{ir}_{jt} = M, \quad \forall t \notin r,$$

이어야 하고, 여기서 M은 매우 큰 상수이다. 이는 시설이 운영기간동안에만 공급가능하다는 것을 표현하기 위함이다. 모형 (PG)는 $mnl^2(l-1)/2$ 개의 실수변수, $ml(l-1)/2$개의 정수변수와 $[nl+mnl^2(l-1)/2]$ 개의 제약식을 가진다.

모형 (PG)를 자세히 살펴보면 가상의 입지 (i,r)과 가상고객 (j,t)에 대한 (정적) 단순시설입지 선정문제 (static uncapacitated facility location problem: UFLP)임을 알 수 있다. 따라서 UFLP를 위한 모든 해법은 약간의 수정을 통해 사용가능하다고 볼 수 있다. 참고로 이 UFLP의 크기는 (가상입지의 수)x(가상고객의 수)로 정의되는데 이는 $[ml(l+1)/2]x[nl]$ 이며, 가상시설의 수가 계획기간 l의 제곱에 비례함을 알 수 있다.

일반적으로

$$c^{ir}_{jt} = c_{ijt}, \qquad \forall\ t\in r. \tag{5.7}$$

또한 다음과 같이 새 변수를 정의하고

$$x_{ijt} = \sum_{r\ni t} x^{ir}_{jt}, \tag{5.8}$$

t를 포함하는 모든 기간 r에 해당하는 제약식 (5.4)들을 합하면 다음과 같이 간단한 모형 (PS)를 얻을 수 있다.

$$\text{(PS)}\quad \text{Min}\quad \Sigma_t\ \Sigma_j\ \Sigma_i\ c_{ijt}\, x_{ijt} + \Sigma_r\ \Sigma_i\ h_{ir}\, u_{ir}, \tag{5.9}$$

$$\text{s.t.}\qquad \Sigma_i\ x_{ijt} = 1, \qquad \forall\ j,t, \tag{5.10}$$

$$x_{ijt} \le \sum_{r\ni t} u_{ir}, \qquad \forall\ i,j,t, \tag{5.11}$$

$$x_{ijt} \ge 0, \qquad \forall\ i,j,t, \tag{5.12}$$

$$u_{ir} = 0 \text{ 또는 } 1, \qquad \forall\ i,r. \tag{5.13}$$

일반적으로 h_{ir}은 비음이기 때문에 입지 i에 시설이 설치될 시, 그 운영기간 r이 겹치는 경우는 발생하지 않는다. 따라서 시설의 운영기간이 겹치는 경우를 방지하기 위한 제약식은 별도로 필요로 하지 않는다. 모형 (PG)와 비교해 보면 정수변수의 수는 같으나, 실수변수의 수 (= mnl) 와 제약식의 수 (= nl +mnl) 가 대폭 감소하였음을 알 수 있다.

[정리 5.1] v(PGL) = v(PSL).

<증명> 이의 증명은 단순화된 (PSL)의 최적해가 (PGL)의 최적해에 대응함을 보이면

된다. 우선 (PSL)의 최적해, $\{x_{ijt}\}$, u를 구하였다고 가정하자. 그러면 (PGL)의 최적해는 다음과 같이 반복적으로 구할 수 있다.

$$x^{ir}_{jt} = \min \{ u_{ir},\ x_{ijt} - \sum_{r'=[t_1, t_2],\, t_1<t} x^{ir'}_{jt} \}.$$

이와 같이 구한 해는 문제 (PGL)의 가능해이며, c^{ir}_{jt}가 r에 관계없이 같기 때문에 목적함수 값 또한 같다. □

정리 5.1은 원문제 (PG)대신 보다 간단한 형태의 문제 (PS)에 대해서 최적해의 하한을 구하여도 (PG)의 그것을 구할 수 있음을 나타낸다.

동적 시설입지 선정모형 (PG)는 Van Roy와 Erlenkotter[12] 의 것을 변형시킨 것이다. 원래 Van Roy와 Erlenkotter가 개발한 모형은 계획기간이 제품수명주기보다 상대적으로 짧다는 가정하에서 보다 제한된 경우만을 다룰 수 있는 모형이다. 즉 계획기간 중에 한 시설을 폐쇄하였을 경우 이후 같은 장소에 시설를 재설치하지 않거나 (phase-out), 한번 설치한 시설은 계획기간 중 계속 사용한다는 것이다 (phase-in). 이를 어느 한 장소의 입장에서 보면 계획초기의 상황에 따라 폐쇄 또는 설치의 의사결정만을 고려하고, 이에 따라 폐쇄비용만을, 또는 설치비용만을 고려한다는 것이다. 따라서 본 연구모형(PG)는 이들의 연구모형과 비교해 보면 매우 일반적이라고 할 수 있다.

이들의 연구는 원래 Roodman and Schwarz의 facility phase-out problem[9]과 joint phase-in /phase-out problem[10]에서 시작되었다. 그러나 Van Roy와 Erlenkotter는 그들이 새로이 정립한 모형이 Roodman과 Schwarz의 것보다 선형계획완화시 정수최적해에 더 가까운 하한을 제공할 수 있음을 증명하고, 이를 용이하게 구할 수 있는 해법을 개발하였다. 참고로 Gunawardane[5] 역시 Roodman and Schwarz 유형의 facility phase-in problem을 variable upper bound constraints를 포함하도록 변형시키고 이를 이용한 새로운 해법을 제시한 바 있다.

다음에는 모형 (PS)와 모형 (PB)의 관계에 대해서 알아보기로 한다.

[정리 5.2] v(PB) = v(PS).

<증명> x, y, y', y"이 (PB)의 최적해라고 하자. 그리고

$$h_{ir} = a_{is} + g_{is} + \cdots + g_{it'} + b_{i,t'+1},$$

$$u_{ir} = \begin{cases} 1, & \text{if } y_{is} = \cdots = y_{it'} = y'_{is} = y''_{i,t'+1} = 1 \ (y_{i,s-1} = y_{i,t'+1} = 0) \\ 0, & \text{아니면,} \end{cases}$$

$$r = [s,\ t']$$

라고 하자. 그러면

$$x_{ijt} \le y_{it} = u_{ir}, \quad \forall\ r \ni t.$$

즉 x, u는 (PS)의 가능해이다. 또한 v(PB) = v(PS). 왜냐하면 (PB)에서 목적함수의 계수가 모두 비음이고 최소화문제이기 때문에, 임의의 장소 i에 대해서 $u_{ir} = 1$ 이면서 r이 겹치는 경우가 발생하지 않기 때문이다. □

[정리 5.3] v(PBL) = v(PSL).

<증명> x, u가 (PSL)의 최적해라고 하자. 그리고

$$y_{it} = \begin{cases} u_{ir} > 0, & \forall\ t \in r=[s,t'] \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases}$$

$$y'_{it} = \max\{\ y_{it}-y_{i,t-1},\ 0\},$$
$$y''_{it} = \max\{\ y_{i,t-1}-y_{it},\ 0\}$$

라고 새로운 변수 y, y', y"을 정의하자. 또한 정의에 의해서

$$h_{ir} = a_{is} + g_{is} + \cdots + g_{it'} + b_{i,t'+1}.$$

그러면

$$x_{ijt} \le \sum_{r \ni t} u_{ir} = y_{it}.$$

왜냐하면 (PB)에서 목적함수의 계수 h_{ir}이 모두 비음이고 최소화문제이기 때문에, 임의의 장소 i에 대해서 $u_{ir} > 0$ 이면서 r이 겹치는 경우가 발생하지 않기 때문이다. 따라서 x, y, y', y"은 모형 (PB)의 가능해이고,

$$\Sigma_r\ \Sigma_i\ h_{ir}\ u_{ir} = \sum_t \sum_i g_{it} y_{it} + \sum_t \sum_i a_{it} y'_{it} + \sum_t \sum_i b_{it} y''_{it}.$$

그러므로 v(PSL) = v(PBL). □

정리 5.2와 5.3을 앞장의 정리들과 함께 살펴보면 다음의 정리가 성립함을 알 수 있다.

[정리 5.4] v(PQ) = v(PA) = v(PB) = v(PG) = v(PS).

[정리 5.5] v(PAL) = v(PBL) = v(PGL) = v(PSL).

VI. 결론

본 연구에서는 보다 폭넓은 응용성을 가지는 동적 시설입지선정을 위한 여러가지 모형을 정립하고 이들의 특성을 상호비교하여 보았다. 주로 비교한 특성은 모형의 크기 (변수의 수 및 제약식의 수)와 선형계획완화시의 최적해의 우열이다.

비교 결과 모형의 크기는 서로 상이하나, 선형계획완화시의 최적해는 모두 동일함을 알 수 있었다. 이는 각 모형정립시 가능하면 강력한 선형계획완화가 되도록, 즉 VUB 또는 GVUB Constraints가 되도록 정립하였기 때문이라고 생각한다. 따라서 동적 시설입지 선정문제의 해법을 개발하는 경우에는, 본 연구에서 제시한 여러가지 모형중 해법의 특성상 가장 적합한 모형을 선택하는 것이 매우 중요하다고 본다. 저자는 본 연구의 연장으로 모형 (PA)와 (PS)의 해법을 연구 개발하고 이를 상호비교하고자 한다.

〈참고문헌〉

1) Akinc, U. and G.M. Roodman, Distribution systems design with changing patterns of demand, Private communication (1984).

2) Erlenkotter, D., A dual-based procedure for uncapacitated facility location, Operations Research 26 (1978) 992-1009.

3) Eschenbach, T. and R.C. Carlson, The capacitated multiperiod location-allocation problem, Technical Report SOL-75-27, Systems Optimization Laboratory, Stanford University, CA (1985).

4) Geoffrion, A.M., A guide to computer-assisted methods for distribution systems planning, Sloan Management Review 16 (1975) 17-41.

5) Gunawardane, G., A note on the facilities phase-in problem, IIE Trans. 14 (1982) 137-138.

6) Fong, C.O. and V. Srinivasan, The multiregion dynamic capacity expansion problem: an improved heuristic, Management Science 32 (1986) 1140-1152.

7) Klincewicz, J.G., H. Luss and C.S. Yu, A large-scale multilocation capacity

planning model, European J. of Operational Research 34 (1988) 178-190.

8) Ro, H.B., On multidimensional facility location, Ph.D. Thesis, Korea Advanced Institute of Science and Technology (1985).

9) Roodman, G.M. and L.B. Schwarz, Optimal and heuristic facility phase-out strategies, AIIE Trans. 7 (1975) 177-184.

10) Roodman, G.M. and L.B. Schwarz, Extensions of the multiperiod facility phase-out model: new procedures and application to a phase-in/phase-out problem, AIIE Trans. 9 (1977) 103-107.

11) Sweeny, D.J. and R.L. Tatham, An improved long-run model for multiple warehouse location, Management Science 22 (1976) 748-758.

12) Van Roy, T.J. and D. Erlenkotter, A dual-based procedure for dynamic facility location, Management Science 28 (1982) 1091-1105.

13) Warszawski, A. and S. Peer, Optimizing the location of facilities on a building site, Opl Res. Quart. 24 (1973) 35-44.

14) Warszawski, A., Multidimensional location problems, Opl Res. Quart. 24 (1973) 165-179.

15) Warszawski, A., Psuedo-boolean solutions to multidimensional location problems, Operations research 22 (1974) 1081-1085.

16) Wesolowsky, G.O. and W.G. Truskott, The multiperiod location-allocation problem with relocation of facilities, Management Science 22 (1975) 57-65.

17) 이영덕, 시설재배치를 고려하는 동적설비입지선정문제에 대한 쌍대기반해법, Private communication (1992).

본 연구는 한원장학재단의 지원에 의한 연구임.