# 列 生成 技法에 의한 航空機 運航計劃 問題의 最適解法

An Optimal Algorithm for Aircraft Scheduling Problem by Column Generation

奇 在 錫, 姜 孟 圭
한양대학교 산업공학과

## 요 지

항공기 운항계획은 항공사의 계획업무 중 핵심적인 문제로 운항편수와 항공기 출발시간 그리고 운항할 항공기의 기종을 결정하는 문제이다. 본 연구에서는 이익을 최대로 하는 운항계획을 수립하기 위한 새로운 최적해법을 제안한다. 일반적으로 항공기 운항계획은 대규모의 정수 선형계획 문제이기 때문에 기존의 정수 최적해법으로 최적해를 계산하기가 쉽지 않다. 본 연구에서는 모든 결정변수를 사용하지 않고 필요에 따라 일부분의 결정변수만을 생성하여 선형 최적해를 계산하는 列 生成 최적해법을 제안한다. 이 해법을 이용하여 대규모 정수계획인 운항계획의 최적해를 매우 효율적으로 계산할 수 있는 해법을 제안한다. 실제 항공기 운항계획에 본 연구에서 제안하는 최적해법을 적용한 결과를 보여 그 효율성이 월등함을 보인다.

## I. 서 론

항공사에서 직면하는 주요문제 중의 하나는 제한된 수송능력으로 승객의 수요를 가능한 한 만족시켜 주면서 항공사의 이익을 최대화할 수 있도록 운항계획을 수립하는 것이다. 항공기 운항계획을 수립하는 것은 각 운항구간에서 운항횟수, 출발시간 그리고 운항할 항공기의 기종을 결정하는 것으로서 이 계획의 질적 수준이 고객에 대한 서비스의 충족도와 수입에 직결되므로 항공사들은 수준 높은 계획을 수립하기 위하여 많은 노력을 기울이고 있다.

일반적으로 항공기 운항계획은 구해야 하는 변수의 개수와 고려해야 하는 제약의 개수가 방대하여 대규모 정수계획 문제(large scale integer programming problem)가 되기 때문에 최적해를 구하기가 쉽지 않다. 이와 같은 이유로 항공사에서는 효과적으로 운항계획을 수립할 수 있는 최적해법을 필요로 하고 있다.

운항계획을 수립하는 방법은 크게 직접적 방법(direct method)과 단계적 방법(stepwise method)으로 구별할 수 있다[6,7]. 직접적 방법은 운항횟수, 출발시간 그리고 운항할 항공기의 기

종을 동시에 결정하는 방법이고[2,12,16], 단계적 방법은 이들을 여러 문제로 나누어 단계적으로 결정하여 나가는 방법이다[11,14,18]. 그러나 단계적 방법은 대규모 문제의 해를 구할 수 있으나 전체적인 최적해(global optimal)가 보장되지 않는다. 본 연구에서는 직접적 방법으로 운항이익을 최대화하는 항공기 운항계획을 수립할 수 있는 새로운 최적해법을 제안한다.

운항계획을 수립할 때에는 항공사별로 여러 가지 제약을 고려하여야 하는데 본 연구에서는 다음의 제약조건을 고려하여 운항계획의 수리 모형을 보인다. (1) 각 운항가능 운항편은 최대로 한 번 선택된다. (2) 운항가능 운항편 중 한 운항편이 선택되면 선택된 운항편과 연속 운항이 가능한 운항편 중 하나가 반드시 선택되어야 한다. (3) 운항경로는 항공사가 보유하고 있는 항공기 대수만큼 선택한다. (4) 특정 운항편은 반드시 운항하여야 한다. (5) 특정 운항구간에서 정해진 시간대에 한 편의 운항편만 운항하여야 한다. (6) 특정 운항구간의 운항편수는 정해진 편수 이내만 운항하여야 한다.

본 연구에서는 운항계획의 최적해를 구하기 위해 먼저, 운항할 수 있는 각 경로가 결정변수인 새로운 수리 모형을 수립한다. 이 모형은 변수의 개수가 방대하지만 운항할 수 있는 경로의 형성과정을 알 수 있으므로 필요에 따라 필요한 변수를 생성할 수 있는 모형이다. 다음, 분지한계기법(branch and bound method)을 이용한 최적해법을 개발하여 운항계획 문제의 정수 최적해를 구한다. 이 분지한계에 의한 최적해법에서 정수해를 완화한 대규모 선형계획 문제의 최적해를 계산하기 위해 본 연구에서는 列 生成 技法(column generation method)을 이용한 새로운 해법을 제안한다.

제안하는 정수 최적해법은 필요에 따라 변수를 생성하여 최적해를 계산하므로 일반적인 분지한계 기법으로는 풀기 어려운 대규모의 정수계획 문제를 매우 효율적으로 풀 수 있는 해법이다. 본 연구에서 제안하는 최적해법을 실제 항공기 운항계획에 적용한 결과를 보이고, 이 결과를 통해 본 연구에서 제안하는 운항계획의 정수 최적해법이 기존의 분지한계 기법보다 효율적임을 보인다.

# Ⅱ. 기존연구의 고찰

## 1. 운항계획 문제의 고찰

최근의 운항계획에서는 전체적인 최적해를 구하는 대신에 계산량을 줄이기 위하여 운항계획을 몇 개의 부분문제로 나누어 해를 구해 가는 단계적 방법을 사용하고 있다[6,11,14,18]. 그러나 운항계획이 항공사의 운항이익에 미치는 영향이 크기 때문에 많은 연구에서 직접적 방법에 대한 해법이 계속 연구되고 있다[2,12,17].

본 연구에서는 직접적 방법으로 운항계획의 전체적인 최적해를 계산할 수 있는 해법을 개발하는데, 이를 위하여 새로운 수리 모형을 제안한다. 이 모형을 제안하기 전에 먼저 기존의 직접적 방법에 의한 수리 모형으로 Abara[2]가 제시한 모형에 대해 살펴본다. 이 모형에서 사용한 기호는 다음과 같다.

N : 모든 運航區間(flight leg)의 운항가능한 運航便(flight segment)의 총 개수
T : 기종 수, S : 기종의 집합, $\{t|t=1, 2, ..., T\}$
A : $\{(i,j)|$ 선행 운항편 i의 도착지와 후행 운항편 j의 출발지가 일치하고, 운항편 i와 j간에 최소 지상 체류시간이 만족됨$\}$, $i,j=1, 2, ..., N$
$F_t$ : 기종 t의 항공기 대수, $t \in S$
$X_{ijt}$ : 기종 t로 운항편 i와 j가 연속 운항이면 1이고, 그렇지 않으면 0임. $(i,j) \in A$, $t \in S$
$X_{0jt}$ : 기종 t의 운항편 j가 첫 운항편이면 1이고, 그렇지 않으면 0 임. $j=1, 2, ..., N$, $t \in S$

$X_{i(N+1)t}$ : 기종 t의 운항편 i가 최종 운항편이면 1이고, 그렇지 않으면 0임. $i=1, 2, ..., N, \quad t \in S$
$P_{it}$ : 기종 t로 운항편 i를 운항할 때의 운항이익, $i=1, 2, ..., N, \quad t \in S$

여기에서 운항구간은 항공기가 운항하는 두 공항 즉, 출발공항과 도착공항으로 구성된 한 쌍을 의미하고, 운항편은 한 운항구간에서 출발시간이 각기 다른 각각의 운항을 의미한다. 이상의 기호를 사용하여 직접적 방법으로 최적의 운항계획을 수립하기 위한 기존 연구의 수리 모형 $IP_1$는 다음과 같다.

[모형 $IP_1$]

$$\text{Max} \quad \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=1}^{N+1} \sum_{t=1}^{T} P_{it} \cdot X_{ijt} \tag{2.1}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=0}^{N} \sum_{t=1}^{T} X_{ijt} \le 1, \quad j = 1, 2, ..., N+1 \tag{2.2}$$

$$\sum_{i=0}^{N} X_{iqt} = \sum_{j=1} X_{qjt}, \quad q= 1, 2, ..., N, \quad t \subset S \tag{2.3}$$

$$\sum_{j=1}^{N} X_{0jt} = F_t, \qquad t= 1, 2, ..., T \tag{2.4}$$

$$X_{ijt} = 0 \text{ 또는 } 1, \quad (i,j) \subset A, \quad t \subset S \tag{2.5}$$

모형 $IP_1$의 목적식 (2.1)은 이익을 최대로 하는 운항편을 결정하기 위한 것이다. 제약식(2.2)는 동일 운항편이 중복되어 선택되지 않도록 한다. 제약식 (2.3)은 흐름보존(flow conservation) 제약으로서 선행 운항편이 선택되면 후행 운항편 중의 하나는 반드시 선택되도록 한다. 제약식 (2.4)는 주어진 기종별 대수만큼 운항경로가 형성되도록 하고, 마지막 제약식 (2.5)는 정수계획 문제임을 나타낸다.

모형 $IP_1$의 결정변수 개수는 운항편수 N과 기종 수 T의 증가에 지수적으로 증가하므로 대부분의 운항계획 수립은 대규모 정수계획 문제가 된다. Abara[2]는 실험을 통하여 이 모형이 운항편수가 수 백편이고, 기종이 두 세 종류인 경우에는 최적해를 구할 수 있으나 그 이상 규모의 문제에는 부적합한 것으로 보고하였다.

## 2. 열 생성 기법에 대한 고찰

열 생성 기법은 선형계획 문제에서 필요에 따라 필요한 변수를 생성하여 최적해를 구하는 해법으로 변수의 생성과정을 알 수 있는 대규모 선형계획 문제의 최적해를 구할 때 이용한다. 이 해법은 결정변수의 개수가 방대하여 선형계획의 해법인 단체법(simplex method)으로 해를 구하기가 어려울 때 원 문제의 변수 중 일부의 변수로 구성된 모형(이후 제한된 모형(restricted model)이라 함)으로 대규모 선형계획의 최적해를 효율적으로 계산할 수 있다.

열 생성 기법을 응용한 기존의 연구는 다음과 같다. Gilmore 등[8]은 막대 자르기 문제에서 처음으로 열 생성 기법을 이용하여 대규모 선형계획의 최적해를 구했다. 막대 자르기 문제는 결정변수의 개수가 방대하여 정수해를 구하기가 어렵기 때문에 Gilmore 등[8]은 이 문제를 정수해 조건이 완화된 선형계획으로 모형화하여 열 생성 기법으로 이 완화된 모형의 최적해를 구하였다.

Desrosiers 등[5]과 Skitt 등[15]은 운송비용을 최소로 하는 차량경로 결정문제에서 열 생성 기법을 이용하여 최적해에 근사한 해를 구하였다. Baker[3], Minoux[10] 그리고 Lavoie 등[9]은 승무원 일정계획을 집합 피복 문제로 모형화한 후 열 생성 기법을 이용하여 정수 최적해에 근사한 해를 구하였다. 이들이 실험한 12개 문제 중에서 9개 문제는 선형계획의 최적해가 정수해이였다. Ribeiro 등[12]은 Gilmore 등[8]의 연구를 발전시켜 인공위성의 통신 시스템과 같은 대규모의 집합 분할문제를 열 생성 기법과 분지한계 기법을 이용하여 정수 최적해를 구했다.

지금까지 대부분의 기존 연구에서는 集合 分割問題(set partitioning problem) 또는 集合 披復問題(set covering problem) 등으로 모형화되는 특정한 형태의 대규모 정수계획 문제에 열 생성 기법을 응용하고 있다[15]. 본 연구에서는 기존의 연구를 더 확장하여 대규모의 운항계획 문제에 이 기법을 응용하여 정수 최적해를 계산하는 최적해법을 제안한다.

## Ⅲ. 열 생성 기법을 이용한 최적 운항계획 수립과정

### 1. 수리 모형

본 연구에서는 대규모 운항계획에서 최적의 일정계획을 수립할 수 있는 새로운 모형을 제안하는데, 이 모형에서는 운항경로가 결정변수이다. 이 모형에서 사용하는 기호는 다음과 같다. 여기에서 $F_t$와 S는 모형 $IP_1$에서와 동일한 기호이다.

N : 운항가능한 운항편의 총 개수, K : 생성 가능한 총 운항경로 수
T : 기종 수, S : 기종의 집합, $\{t|t=1, 2, ..., T\}$
D : 반드시 선택되어야 하는 운항편의 집합
$I_s$ : 반드시 1편이 선택되어야 하는 시간대 s에 포함된 운항편의 집합
$U_{Ci}$ : 운항할 수 있는 편수가 $C_i$ 이내로 제한된 운항구간 i의 운항편 집합
$F_t$ : 기종 t의 항공기 대수, $t \in S$
$X_k$ : 운항경로 k가 선택되면 1이고, 그렇지 않으면 0임. $k=1, 2, ..., K$
$P_k$ : 운항경로 k의 운항이익, $k=1, 2, ..., K$
$A_{ik}$ : 운항경로 k가 제약식 i를 포함하고 있으면 1이고, 그렇지 않으면 0임
$i=1, 2, ..., N, ..., N+T,\ k=1, 2, ..., K$

이상의 기호 중 제약식의 계수 $A_{ik}$의 의미는 i 값에 따라 달라진다. 만약 $i \le N$ 이면 운항경로 k에 운항편 i의 포함여부를 의미하고, 그렇지 않으면 운항경로 k가 기종 (i-N)에 의한 운항여부를 의미한다.

대부분의 운항계획에서 생성될 수 있는 운항경로의 가지 수는 보통 수 천만개 내지 수 억개 이상으로 방대하다[3]. 따라서 가능한 모든 변수를 사용하여 최적해를 구하기가 쉽지 않으므로 본 연구에서는 가능한 전체 변수 중에서 일부의 변수를 생성하여 최적해를 구할 수 있는 열 생성 최적해법을 제안한다. 본 연구에서 제안하는 수리 모형 $IP_2$는 다음과 같다.

[모형 $IP_2$]
$$\text{Max} \sum_{k=1}^{K} P_k \cdot X_k \tag{3.1}$$
$$\text{s.t.} \sum_{k=1}^{K} A_{ik} \cdot X_k \le 1, \quad i = 1, 2, ..., N \tag{3.2}$$
$$\sum_{k=1}^{K} A_{ik} \cdot X_k = F_t, \quad i = N+1, ..., N+T, \quad t \in S \tag{3.3}$$
$$\sum_{k=1}^{K} A_{ik} \cdot X_k = 1, \quad i \in D \tag{3.4}$$
$$\sum_{i \in I_s} \sum_{k=1}^{K} A_{ik} \cdot X_k = 1 \tag{3.5}$$
$$\sum_{i \in U_{Ci}} \sum_{k=1}^{K} A_{ik} \cdot X_k \le C_i \tag{3.6}$$
$$X_k = 0 \text{ 또는 } 1, \quad k = 1, 2, ..., K \tag{3.7}$$

목적식 (3.1)은 이익을 최대로 하는 운항경로를 선택한다. 제약식 (3.2)는 각 운항편을 최대로 한번만 선택되도록 하고 제약식 (3.3)은 가용할 수 있는 기종별 항공기 대수만큼 운항경로가 선택되도록 한다. 제약식 (3.4)는 반드시 운항해야 하는 운항편이 선택되도록 하고 제약식 (3.5)는 특정 운항구간에서 정해진 시간대에 해당하는 운항편 중 반드시 1편이 선택되도록 한다. 제약식 (3.6)은 특정 운항구간의 운항가능 운항편 중에서는 정해진 편수이내만 선택되도록 하고 마지막 제약식 (3.7)은 정수해 조건을 나타낸다.

모형 $IP_1$과 $IP_2$를 비교하면 모형 $IP_2$의 제약식이 모형 $IP_1$보다 약 N·T 정도 줄어든 반면 결정변수의 개수는 모형 $IP_1$보다 증가한다. 따라서 모형 $IP_1$의 규모보다 작은 소규모의 문제로 최적해를 구할 수 있다.

2. 최적 운항계획 수립과정

본 연구에서는 분지한계 기법을 이용하여 최적의 운항계획을 수립하기 위한 해법으로 분지한계 최적해법을 제안한다. 이 최적해법의 절차는 5장에서 보이고, 여기서는 해법의 개념을 먼저 보인다. 분지한계 최적해법은 최적해가 구해질 때까지 그림 3.1와 같이 분지를 반복한다. 그림에서 분지점 문제는 해당 분지점의 후보문제를 나타내고, 문제의 상한은 후보문제의 정수해에 대한 해의 상한을 나타낸다.

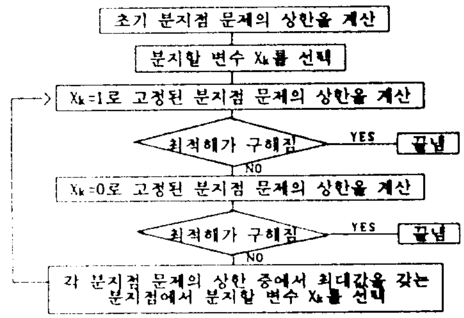


그림 3.1 분지한계 최적해법의 분지과정

대규모 정수계획의 경우 일반적으로 각 분지점 문제의 상한은 정수해 조건을 완화한 선형계획의 최적해를 계산하여 구한다. 그러나 운항계획 문제는 대규모 정수계획이므로 각 분지점 문제의 상한을 구하기가 쉽지 않다. 본 연구에서 분지점 문제의 상한은 정수해 조건을 완화한 선형계획 문제(이후 완화된 운항계획이라고 함)의 최적해로 4장에서 제안하는 열 생성 최적해법으로 계산한다.

본 연구의 분지한계 최적해법에서는 기존 연구[13]와 같이 최선치 우선순위로 分枝(branch)할 분지점을 선택한다. 즉, 그림 3.1에서와 같이 분지가 가능한 분지점 중 완화된 운항계획의 최적해 값이 최대인 분지점을 분지할 분지점으로 선택한다. 분지점이 선택되면 선택된 분지점의 완화된 운항계획의 해를 계산하여 분수값을 갖는 결정변수 중에서 분지할 변수를 하나 선택한다. 이때 선택하는 기준은 최대의 분수값을 갖는 변수를 선택한다. 이는 운항계획 수립문제가 최대화 문제이므로 최대의 분수값을 갖는 변수가 1로 고정되면 이 외의 변수보다 최적해에 근사한 상한을 구할 수 있기 때문이다.

분지가 시작되는 초기 분지점 문제의 상한은 열 생성 최적해법에 의해 모형 $IP_2$의 모든 변수 중 일부의 변수를 생성하여 구한다. 반면 다른 분지점의 완화된 운항계획은 초기 분지점에서 해당 분지점까지 분지를 위하여 선택된 변수들이 1 또는 0 으로 고정된 상태에서 열 생성 최적해법으로 필요한 변수를 생성하여 계산한다.

초기 분지점을 제외한 다른 분지점 문제의 상한을 구할 때는 다음 두 가지 경우 즉, 변수값이 1로 고정되어 있는 경우와 0으로 고정되어 있는 경우를 고려해야 한다. 첫번째의 경우, 해당 변수의 열에서 제약식 계수가 1인 행(row)들을 삭제하고, 이 행들에서 제약식의 계수가 1인 변수를 0으로 고정시켜 문제의 크기를 줄인다[1]. 두번째의 경우, 0으로 고정된 변수는 문제에서 삭제하고 변수를 생성하는 과정에서 이 변수는 생성이 금지되어야 한다.

생성이 금지된 변수가 생성되면 정수 최적해를 보장할 수가 없다. 열 생성 최적해법과 분지한계 기법으로 정수 최적해를 구한 기존 연구[14]에서는 변수를 생성하는 과정에서 생성이 금지된 변수가 생성되지 않을 수 있는 방법을 제안하지 못하였다. 본 연구에서 제안한 분지한계 최적해법에서는 다음과 같은 방법으로 생성이 금지된 변수는 생성되지 않도록 한다. 임의의 변수 $X_k$가

0으로 고정된 분지점 문제의 상한을 계산할 때 생성이 금지된 변수의 생성을 방지하기 위하여 선택된 변수 $X_k$의 값을 0으로 고정하지 않고 변수값의 상한을 0에 근사한 값(예, 0.00000001)으로 두고 변수를 생성한다.

본 연구의 분지한계 최적해법에서는 각 분지점 문제의 상한을 계산할 때 불필요한 변수 생성을 줄여 기존 연구[14]보다 효율적으로 계산할 수 있도록 다음과 같이 실행한다. 탐색나무에서 각 분지점 문제의 상한은 부모 분지점의 상한보다 증가될 수가 없다. 따라서, 분지점 문제의 상한을 계산하는 과정에서 생성된 변수가 추가된 목적식의 값이 부모 분지점 문제의 상한과 같아지면 해당 분지점에서의 변수 생성을 끝낸다.

3. 완화된 운항계획에 대한 열 생성과정의 개념

본 연구에서 제안하는 열 생성과정은 한계가치가 음수인 변수를 생성하는데, 모형 $IP_2$는 결정변수가 운항경로이므로 변수를 생성하는 것은 限界價値(marginal value)가 음수인 운항경로를 생성하는 것을 의미한다. 완화된 운항계획의 최적해를 구해 단체승수 벡터 $\Pi$를 계산한 후 운항경로 k의 한계가치 $M_k$를 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$M_k = \Pi \cdot A_{.k} - P_k = \sum_i \{\pi_i \cdot A_{ik}\} - P_k \tag{3.8}$$

여기서 $\pi_i$는 제약식 i의 단체승수이고, $A_{ik}$는 제약식 i에서 운항경로 k의 계수이다. 그리고 $P_k$는 운항경로 k의 운항이익으로 목적식에서 변수 $X_k$의 계수이다. 운항편 s의 운항이익을 $p_s$라고 하고, 운항경로 k에 포함된 운항편 집합을 $S_k$라고 하면 $P_k$는 $S_k$에 속한 운항편 이익의 합과 같으므로 식 (3.8)은 다음과 같이 된다.

$$M_k = \sum_i \{\pi_i \cdot A_{ik}\} - \sum_{s \in S_k} p_s \tag{3.9}$$

식 (3.9)로 운항경로의 한계가치를 계산하면 한계가치가 음수인 변수를 생성할 수 있으나 해당되는 변수를 모두 생성하면 변수의 개수가 방대해져서 완화된 운항계획의 최적해를 계산하기가 어려워 진다. 반면 한계가치가 음수인 모든 변수 중에서 최소값을 갖는 변수 하나만을 생성하면 변수를 생성하는 횟수가 증대되어 효율적이지 못하다[5]. 본 연구에서는 한 회의 변수 생성에서 일정 개수의 필요한 변수를 생성하는 과정을 보인다.

열 생성 최적해법의 효율은 생성되지 않은 변수 중에서 한계가치가 음수인 변수를 생성하는 방법에 따라 결정된다. 모형 $IP_2$의 제약식 (3.2)에서 각 운항편은 최대로 한번 선택될 수 있으므로 발생가능한 모든 운항경로를 첫 운항편별로 그룹화하면 각 그룹에서 최대로 하나의 운항경로만이 선택될 수 있다. 본 연구에서는 이러한 운항계획 수립의 특성을 고려하여 발생가능한 운항경로를 첫 운항편 별로 그룹화한 후, 각 그룹내에서 한계가치가 음수이며 최소인 운항경로를 하나만 찾아 변수로 생성시킨다. 즉, 한 회의 변수 생성에서 최대로 첫 운항편의 개수만큼 생성한다.

각 그룹에서 생성되는 운항경로는 해당 그룹내의 모든 운항경로 중 한계가 치가 최소인 경로이다. 즉, 그룹 g에서 생성되는 경로 P(g)는 다음 식 (3.10)을 만족한다. 여기서 $G_g$는 그룹 g에 속한 운항경로의 집합이고, G는 첫 운항편수 즉, 그룹의 개수이다.

$$P(g) = \min_{k \in G_g} \left[ \sum_i \{\pi_i \cdot A_{ik}\} - \sum_{s \in S_k} p_s \right],\ g=1, 2, \ldots, G \tag{3.10}$$

각 그룹에서 생성되는 경로는 해당 그룹내의 발생가능한 모든 경로 중 한계가치가 최소인 경로이므로 Yen의 최단 경로 알고리듬[1]과 같은 최단 경로법으로 찾을 수 있다. 본 연구에서 제안하는 열 생성과정은 모든 운항경로의 한계가치가 비음일 때까지 이 변수의 생성과정을 반복한다.

# Ⅳ. 운항계획에 대한 최적해법

## 1. 완화된 운항계획에 대한 열 생성 최적해법

본 연구에서는 한계가치가 음수인 변수를 생성시켜 완화된 운항계획의 최적해를 효율적으로 계산하기 위해 먼저 전체 변수 중에서 일부의 변수를 초기변수로 선정하여 초기의 제한된 모형을 만든다. 초기 문제의 변수는 전체 문제의 가능해 중의 하나이며, 초기의 제한된 모형은 다음과 같이 모형화 된다. 여기에서 I는 임의로 선정된 초기변수의 집합이다.

$$
\begin{aligned}
[\ RM_0\ ]\quad & \text{Max} \quad \sum_{k \in I} P_k \cdot X_k \\
& \text{s.t.} \sum_{k \in I} A_{ik} \cdot X_k \le 1, \quad i = 1, 2, \ldots, N \\
& \qquad \sum_{k \in I} A_{ik} \cdot X_k = F_t, \quad i = N+1, \ldots, N+T, \quad t \in S \\
& \qquad X_k \ge 0, \qquad\qquad k = 1, 2, \ldots, K
\end{aligned}
$$

모형 $RM_0$를 만들어 본 연구에서 제안하는 열 생성과정에 의해 첫 운항편별로 한계가치가 음수이며 최소인 변수를 생성한다. 생성된 변수가 추가된 모형 $RM_t$에서 완화된 운항계획의 최적해가 구해지면 이 때의 모형(이후 $RM_T$라고 함)을 초기 분지점의 문제로 하고 분지를 시작한다.

초기 분지점 문제를 제외한 다른 분지점 문제의 상한은 부모 분지점 문제의 변수 중 분지를 위해 선택한 변수를 0 또는 1로 고정한 후 열 생성 최적해법을 이용하여 계산한다. 이 때 열 생성 횟수를 줄일 수 있도록 자식 분지점 문제의 상한을 구하는 열 생성과정에서 목적식의 값이 부모 분지점 문제의 상한 이상이면 열 생성과정을 끝낸다.

각 분지점의 완화된 운항계획에 대한 최적해를 계산하는 열 생성 최적해법의 과정은 다음과 같다. 여기에서 S는 초기 분지점 문제에 대한 여부를 나타내고, t는 열 생성 횟수를 나타낸다. UB는 부모 분지점 문제의 상한을 나타내고, M은 상수로 매우 큰 값이다.

[완화된 운항계획에 대한 열 생성 최적해법 : CGA]

단계 0. [초기화]
- 만약 초기 분지점 문제이면, S←1로 하고 그렇지 않으면, S←2로 한다.
- t ← 0, · M ← ∞

단계 1. [$RM_0$의 최적화]
- 모형 $RM_0$의 최적해를 계산한다.
- 만약 S = 1 이면, UB←M으로 하고 그렇지 않으면, UB←부모 분지점 문제의 상한으로 한다.

단계 2. [변수의 생성]
- 만약 $RM_t$ 의 최적해 값이 UB 보다 크면, 단계 4로 간다.
- 모형 $RM_t$의 단체승수를 구한다.
- 제안하는 열 생성과정을 이용하여 첫 운항편별로 한계가치가 음수이며 최소인 변수를 생성시킨다.

단계 3. [모형 $RM_t$의 최적화]
- 만약 생성된 변수가 없으면, 단계 4로 간다.
- 생성된 변수를 $RM_t$에 추가하여 문제 $RM_{t+1}$로 한다.
- t ← t+1
- 모형 $RM_t$의 최적해를 계산하고 단계 2로 간다.

단계 4. [끝냄]
- 현 단계의 해를 최적해로 한다.

해법 CGA의 단계 2에서 각 그룹별로 한계가치가 음수이며 최소인 운항경로는 다음 절에서 제안하는 열 생성과정으로 생성한다. 이 단계에 의해 초기 분지점을 제외한 다른 분지점 문제의 상한을 계산할 때 불필요한 열 생성 횟수를 줄일 수 있다. 단계 1과 3에서 $RM_0$와 $RM_t$의 최적해는 단체법으로 계산한다. $RM_0$와 $RM_t$는 모형 LP에 비해 소규모 문제이므로 해법 LPA로도 최적해의 계산이 가능하다.

## 2. 열 생성과정

열 생성 최적해법의 효율은 생성되지 않은 변수 중에서 한계가치가 음수인 변수를 생성하는 방법에 따라 결정된다. 3장 1절의 제약식 (3.2)에서 각 운항편은 최대로 한 번 선택될 수 있으므로 발생 가능한 모든 운항경로를 첫 운항편별로 그룹화하면 각 그룹에서 최대로 하나의 운항경로만이 선택될 수 있다.

본 연구에서는 이러한 운항계획의 특성을 고려하여 발생 가능한 운항경로를 첫 운항편 별로 그룹화 한 후 각 그룹내에서 한계가치가 음수이며 최소인 운항경로를 하나만 찾아 변수로 생성시킨다. 열 생성과정의 실행과정을 보이기 전에 열 생성과정에서 사용하는 기호와 용어를 정의하면 다음과 같다.

G : 첫 운항편의 개수 즉, 첫 운항편별 그룹의 개수
$V_i$ : 교점 i의 교점값 즉, $\pi_i - p_i$
$U_i$ : 교점 i 까지의 경로에 들어가 있는 교점값의 합
$b_i$ : 교점 i 의 선행 교점
c : 생성된 변수가 있으면 1, 없으면 0
M : 총 교점 수 즉, N · T
M+1 : 종료(terminal) 교점

본 연구에서 제안하는 열 생성과정에서는 Yen[1]의 최단 경로법을 이용하여 각 그룹에서 한계가치가 음수이며 최소인 경로를 찾는다. 각 그룹에서 한계가치가 음수이며 최소인 경로를 찾는 과정은 다음과 같다. 여기에서 교점(node) 과 호(arc)는 가능한 모든 운항경로의 네트워크에서 교점과 호를 의미한다. m은 경로값이 계산되고 있는 교점을 나타낸다.

[열 생성과정 : CP]
단계 0. [그룹의 초기화]
- g ← 1, · m ← 1, · G ← 그룹의 개수

단계 1. [모든 교점값의 초기화]
(1.1) 교점 i = 1 에서 M+1 까지 다음을 반복한다.
- $U_i \leftarrow \infty$, · $b_i \leftarrow -1$

(1.2) 첫 운항편 g에 해당되는 모든 교점 i에 대해 다음을 반복한다.
- $U_i \leftarrow V_i$, $b_i \leftarrow 0$

단계 2. [교점 m까지의 최단 경로값을 계산]
(2.1) $m \leftarrow m + 1$
(2.2) $i \leftarrow 0$
(2.3) 만약, $i > M$ 이면 단계 3으로 간다.
(2.4) 만약, $U_i + V_m < U_m$ 이면 다음을 실행한다.
- $U_m \leftarrow U_i + V_m$
- $b_m \leftarrow i$, $c \leftarrow 1$

(2.5) $i \leftarrow i + 1$ 로 하고 단계 2.3으로 간다.

단계 3. [최단경로 생성을 확인]
- 만약, $m \le M$ 이면 단계 2로 간다.
- 만약, $m = M+1$ 이고 $c = 1$ 이면 m을 1로 하고 단계 2로 간다.

단계 4. [종료조건을 검사]
- 만약, $U_{M+1} < 0$ 이면 $b_i$을 이용하여 변수를 생성한다.
- $g \leftarrow g+1$
- 만약, $g > G$ 이면 끝내고, 그렇지 않으면 단계 1로 간다.

단계 2에서 $b_i$는 교점 i의 선행 교점을 나타내므로 각 그룹별 한계가치가 음수이며 최소인 경로는 $b_i$를 이용하여 단계 4에서 쉽게 해당 경로를 추적할 수 있다.

3. 최적 운항계획 수립을 위한 분지한계 최적해법

운항계획은 대규모 정수계획이므로 정수 최적해법이 필요하다. 본 연구에서는 최적의 운항계획을 수립하기 위한 최적해법으로 분지한계 최적해법을 제안한다. 제안하는 분지한계 최적해법은 분지한계 기법과 열 생성 최적해법 CGA를 이용하여 운항계획의 정수 최적해를 계산한다. 최적의 운항계획을 수립하는 과정은 다음과 같다. 여기에서 LB는 분지한계의 과정에서 정수해에 대한 하한이다.

[분지한계 최적해법 : BBA]

단계 0. [초기화]

- $LB \leftarrow 0$

단계 1. [분지할 변수의 선택]

- 문제 $RM_T$의 최적해에서 분수값을 갖는 변수중 최대의 분수값을 갖는 변수를 선택한다.
- 만약, 분수값을 갖는 변수가 없으면 LB←문제 $RM_T$에 대한 최적해값으로 하고 단계 7로 간다.

단계 2. [선택된 변수를 1로 고정한 문제의 상한을 계산]

- 선택된 변수를 1로 고정하고 해법 CGA를 이용하여 완화된 운항계획 문제의 최적해를 구해 현 단계 분지점 문제의 상한으로 한다.
- $i \leftarrow 1$ 로 하고 단계 4로 간다.

단계 3. [선택된 변수를 0으로 고정한 문제의 상한을 계산]

- 선택된 변수의 상한을 0에 근사한 값으로 두고, 해법 CGA를 이용하여 완화된 운항계획의 최적해를 계산해 현 단계 분지점 문제의 상한으로 한다.
- $i \leftarrow 0$ 로 하고 단계 4로 간다.

단계 4. [정수해 하한가 LB 값의 갱신]

- 만약, 현 단계 분지점의 완화된 운항계획의 최적해가 비 정수해이면 단계 5로 간다.
- LB 값을 다음과 같이 갱신한다.
  LB ← min{ LB, 현 단계 분지점 문제의 상한 }
- 현 단계의 분지점에서는 더 이상 분지하지 않도록 표시하고 단계 6으로 간다.

단계 5. [분지할 변수의 선택]

- 만약, 현 단계 분지점 문제의 상한이 LB보다 작거나 같으면 이 분지점에서는 더 이상 분지하지 않도록 표시하고 단계 6으로 간다.
- 분수값을 갖는 변수 중 최대의 분수값을 갖는 변수를 선택한다.

단계 6. [분지할 분지점의 선택]

- 만약, $i = 1$ 이면 단계 3으로 간다.
- 만약, 분지가 가능한 분지점이 없으면 단계 7로 간다.
- 분지가 가능한 분지점 중 상한이 최대인 분지점을 선택하고 단계 2로 간다.

단계 7. [끝냄]

- 현재의 LB가 최적 정수해이다.

본 연구에서 제안하는 해법 BBA에서는 다음과 같이 기존 연구[15]의 최적해법을 개선하였다. (1) 기존 연구에서는 분지된 문제의 상한을 구하기 위하여 한계가치가 음수인 변수가 생성되지 않을 때까지 변수 생성과정을 반복하였다. 반면 본 연구에서는 해법 CGA를 실행하는 과정 중에 $RM_t$의 목적식의 값이 부모교점의 상한과 같으면 변수 생성과정을 끝내도록 하여 불 필요한 열 성 횟수를 줄였다. (2) 생성이 금지된 변수의 생성을 방지할 수 있도록 해당 변수의 값을 0으로 고정하지 않고, 선택된 변수의 상한을 0에 근사한 값으로 고정한 후 변수를 생성시킨다.

본 연구에서 제안하는 분지한계 최적해법의 특성은 다음과 같다. (1) 각 분지점 문제의 규모가 윈 문제보다 소규모 문제이므로 각 분지된 문제의 상한을 효율적으로 계산한다. (2) 기존의 열 생성 기법과 분지한계 기법을 이용한 정수 최적해법은 생성이 금지된 변수가 생성될 수 있으나 본 연구에서 제안한 분지한계 최적해법에서는 생성이 금지된 변수가 다시 생성되지 않는다. (3) 열 생성 최적해법을 실행하여 분지점 문제의 상한을 계산하는 과정에서 부모교점의 상한과 같은 값이 구해지면 변수생성을 끝내도록 하여 열 생성 횟수를 줄였다.

# V. 실험 결과

본 연구에서는 여섯 가지 운항계획에 대한 실험 결과를 보이는데, 이 수치 예는 모두 실제 항공기 문제를 다루었다. 이 여섯 가지의 문제를 모형 $IP_2$로 수식화하여 해법 CGA와 해법 BBA의 실행결과를 보인다. 이 중 두 가지 문제는 모형 $IP_1$으로도 수식화하여 단체법과 선형계획 해법 CGA와의 실행 결과를 비교하고, 기존의 정수계획법과 해법 BBA의 실행결과를 비교한다.

컴퓨터는 SUN 워크스테이션(SPARCstation 1+)으로 실험한다. 기존의 모형 $IP_1$에서 정수해 조건을 완화한 선형계획의 최적해와 모형 $IP_1$에 대한 정수 최적해는 혼합 정수계획(MIP)용으로 매우 효율적인 것으로 보고된[4] 소프트웨어인 CPLEX (Version 1.2)를 이용하여 계산한다.

실험한 여섯 가지 문제 중 문제 2는 18 개 운항구간에서 273 편의 운항가능 운항편을 만들어 기종 8 가지에 대하여 운항경로를 결정하는 문제이다. 문제 1은 문제 2에서 항공기 한 대가 감소한 경우이고 문제 3은 문제 2에 항공기 1대를 추가한 경우이다. 문제 6은 문제 2에 운항구간이 6개가 증가된 경우이며 항공기 9대의 운항경로를 구하는 문제이다. 문제 1과 2와 3 그리고 6은 특정 운항구간의 운항편이 정해진 시간대에 선정되도록 제약된 경우이고, 문제 4와 5는 이러한 제약의 범위를 확장하여 더 넓은 시간대에서 선정되도록 하거나 이러한 제약을 무시한 것이다.

이상에서 언급한 여섯 가지 문제에 대해 실험한 결과를 다음과 같이 보인다. 먼저, 여섯 가지 문제에 대해 해법 CGA의 최적해를 계산한 결과를 요약하면 표 5.1과 같다. 이 표는 해법 CGA로 선형계획의 최적해를 구했을 때 이 해의 정수해 여부도 보이고 있다. 기존의 선형계획 기법과 본 연구에서 제안한 해법 CGA의 효율성을 비교하면 표 5.2와 같다.

여섯 가지 문제 중 해법 CGA의 최적해에서 정수 최적해가 계산되지 않은 문제 2, 4 그리고 6에 대하여 해법 BBA로 정수 최적해를 계산한 결과는 표 5.3과 같다. 기존의 정수계획 해법과 본 연구에서 제안한 해법 BBA의 효율성을 비교하기 위하여 문제 4와 5를 모형 $IP_1$으로 수식화하여 분지한계 기법으로 최적해를 계산한 결과는 다음 표 5.4와 같다.

표 5.1 모형 $IP_2$에 대해 해법 CGA로 최적해를 구한 결과

| 수치 예 | 식의 수 (개) | 교점 수 (개) | 호의 수 (개) | 총 변수 수 (개) | 생성된 변수 (개) | 계산시간 (초) | 정수해 여부 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 문제 1 | 306 | 1,342 | 14,202 | 약 100만 | 306 | 288 | 정수 |
| 문제 2 | 307 | 1,544 | 16,583 | 약 300만 | 462 | 319 | 비정수 |
| 문제 3 | 307 | 1,645 | 17,593 | 약 500만 | 367 | 374 | 정수 |
| 문제 4 | 355 | 1,906 | 22,662 | 약 1,000만 | 525 | 870 | 비정수 |
| 문제 5 | 607 | 3,363 | 61,108 | 약 5,000만 | 1,201 | 2,823 | 정수 |
| 문제 6 | 323 | 1,452 | 19,960 | 약 1,000만 | 620 | 284 | 비정수 |

표 5.2 단체법과 해법 CGA로 선형계획의 최적해를 구한 결과

| 수치 예 | 단체법으로 해를 구한 결과 | | | 해법 CGA로 해를 구한 결과 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 변수 수 (개) | 식의 수 (개) | 계산시간 (초) | 변수 수 (개) | 식의 수 (개) | 계산시간 (초) |
| 문제 4 | 5,884 | 3,407 | 4,826 | 약 1,000만 | 355 | 870 |
| 문제 5 | 6,991 | 4,340 | 8,516 | 약 5,000만 | 607 | 2,823 |

표 5.3 해법 BBA로 정수 최적해를 구한 결과

| 수치 예 | 식의 수 (개) | 교점 수 (개) | 호의 수 (개) | 총 변수 수 (개) | 생성된 변수 (개) | 계산시간 (초) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 문제 2 | 307 | 1,544 | 16,583 | 약 300만 | 651 | 14,961 |
| 문제 4 | 355 | 1,906 | 22,662 | 약 1,000만 | 778 | 31,937 |
| 문제 6 | 323 | 1,452 | 19,960 | 약 1,000만 | 620 | 330 |

표 5.4 분지한계 기법과 해법 BBA로 정수 최적해를 계산한 결과

| 수치 예 | 분지한계 기법 | | | 해법 BBA | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 변수 수 (개) | 식의 수 (개) | 계산시간 | 변수 수 (개) | 식의 수 (개) | 계산시간 (초) |
| 문제 4 | 5,884 | 3,407 | 10일 이상 | 약 1,000만 | 355 | 31,937 |
| 문제 5 | 6,991 | 4,340 | 8,516초 | 약 5,000만 | 607 | 2,823 |

이상의 수치 예에 대한 실험결과를 요약하면 다음과 같다. 표 5.1에 나타난 결과를 보면 실험한 문제 중 절반이 해법 CGA의 최적해에서 정수 최적해가 구해졌다. 또한, 단체법으로 해를 계산하는 시간보다 본 연구에서 제안한 해법 CGA의 최적해를 계산하는 시간이 약 1/3 정도로 감소한다는 것을 알 수 있다.

해법 CGA에서는 기존 모형 $IP_1$보다 매우 작은 규모에서 완화된 운항계획의 최적해가 계산되는 것을 표 5.1과 표 5.2에서 알 수 있다. 문제 2, 4 그리고 6은 단체법으로 약 10일 이상이 소요되는 반면 해법 BBA으로는 약 9 시간 이내에 최적해가 계산되었음을 표 5.3에서 알 수 있다. 표 5.4에서는 기존의 분지 한계법으로 모형 $IP_1$의 정수 최적해를 구하는 것보다 10 배 이상 빠르게 정수 최적해가 계산되는 것을 알 수 있다. 이는 초기 분지점 문제 $RP_T$의 규모가 모형 $IP_1$보다 매우 작아, 각 분지점의 한계를 효율적으로 계산할 수 있기 때문이다.

# Ⅵ. 결론

본 연구에서는 항공기 운항계획에 대한 최적해법을 제안하였다. 운항계획은 대규모의 정수계획이기 때문에 기존의 정수 최적해법으로는 최적해를 구하기 어렵다. 운항계획의 이러한 특성 때문에 부분 문제로 나누어 최적해에 근사한 운항계획을 수립하였다. 그러나 수립된 운항계획의 질적 수준이 항공사의 이익에 미치는 영향이 크기 때문에 항공사에서는 최적의 운항계획을 수립하기 위한 해법을 필요로 하고 있다.

본 연구에서는 대규모 운항계획에 제안한 연구내용을 요약하면 다음과 같다. (1) 열 생성 기법을 이용할 수 있는 운항계획의 새로운 모형을 제안하였다. (2) 운항계획에서도 필요한 변수를 생성할 수 있도록 열 생성과정을 제안하였고, 이 과정을 이용해 정수해 조건이 완화된 운항계획의 최적해를 구할 수 있는 열 생성 최적해법을 제안하였다. (3) 분지한계 기법과 열 생성 최적해법을 이용하여 운항계획의 정수 최적해를 구할 수 있는 분지한계 최적해법을 제안하였다.

일반적으로 열 생성 기법은 대규모의 집합 분할문제 또는 집합 피복문제 등으로 모형화가 가능한 특정한 문제에서 정수해 조건이 완화된 대규모 선형계획 문제의 최적해를 계산하는데 이용되었다. 본 연구에서 제안한 열 생성 최적해법은 이외의 문제인 운항계획에도 열 생성 기법을 응용하여 완화된 운항계획의 최적해를 효율적으로 구하는 해법이다.

제안한 분지한계 최적해법의 특성은 다음과 같다. (1) 각 분지점 문제의 상한을 계산하는 과정에서 부모 분지점의 상한과 같은 값이 계산되면 변수 생성을 끝내도록 하여 계산량이 감소되었다. (2) 분지과정 중 생성이 금지된 변수는 해당 변수의 상한 값을 0에 근사한 값으로 고정하여 생성이 금지되도록 하였다. 이러한 특성에 의해 각 분지점의 상한이 효율적으로 계산이 되므로 정수 최적해가 기존의 최적해법보다 빠르게 계산이 되었다.

본 연구에서 제안한 열 생성 최적해법과 분지한계 최적해법의 효율을 평가하기 위하여 여섯 가지의 실제 문제를 컴퓨터로 실험하였는데, 그 결과 실험한 문제 중 절반 이상의 완화된 운항계획의 최적해에서 정수 최적해가 구하여졌다. 완화된 운항계획의 최적해는 기존의 선형계획 최적해법 보다 약 3배정도 빠르게 계산되었고 기존의 정수 최적해법과 비교한 기존의 해법으로는 수 일 이상이 소요되는 반면 제안한 분지한계 최적해법으로는 수 시간내에 정수 최적해가 계산되었다.

본 연구에서 제안한 열 생성 최적해법과 분지한계 최적해법은 변수의 생성과정을 알 수 있는 다른 대규모의 선형계획 또는 정수계획 문제에 적용할 수 있는 매우 효율적인 해법이다.

# 참 고 문 헌


1. 강맹규, 네트워크와 알고리듬, 박영사, 서울, 1991.
2. Abara, T., "Fleet Assignment Using Integer Linear Programming," AGIFORS 23th, pp. 251-263, 1983.
3. Baker, E. K., L. D. Bodin, W. F. Finnegan, and R. J. Ponder, "Efficient Heuristic Solutions to an Airline Crew Scheduling Problem," AIIE Transactions, Vol. 11, No. 1, pp. 79-85, 1979.
4. Burgard, M., "Solution to Complex Problems," UNIX World, pp. 111-113, January 1990.
5. Desrosiers, J., F. Soumis, and M. Desrochers, "Routing with Time Windows by Column Generation," Networks, Vol. 14, No. 4, pp. 545-565, 1984.
6. Etschmaier, M. M. and D. F. X. Mathaisel, "Aircraft Scheduling: The State of the Art," AGIFORS 24th, pp. 182-225, 1984.
7. Etschmaier, M. M. and D. F. X. Mathaisel, "Airline Scheduling: An Overview," Transportation Science, Vol. 19, No. 2, pp. 127-137, 1985.
8. Gilmore, P. C. and R. E. Gomory, "A Linear Programming Approach to the Cutting-Stock Problem," Operations Research, Vol. 9, No. 6, pp. 849-869, 1961.
9. Lavole, S., M. Minoux, and E. Odier, "A New Approach for Crew Pairing Problems by Column Generation with an Application to Air Transportation," European Journal of Operational Research, Vol. 35, No. 1, pp. 45-58, 1988.
10. Minoux, M., "Column Generation Techniqnes in Combinatorial Optimization," AGIFORS 24th, pp. 23-27, 1984.
11. Nemhauser, G. L., Handbooks in Operations Research and Management Science, Elsevier Science Publishers, New York, 1989.
12. Philips, R. L. and D. W. Boyd, "An Integrated Approach to Airline Fleet and Schedule Planning," AGIFORS 29th, pp. 284-298, 1989.
13. Ribeiro, C. C., M. Minoux, and M. C. Denna, "An Optimal Column Generation with Ranking Algorithm for Very Large Scale Set Partitioning Problems in Traffic Assignment," European Journal of Operational Research, Vol. 41, No. 3, pp.232-239, 1989.
14. Rossi, G. and A. Vecchio, "Aircraft Rotation System," AGIFORS 29th, pp. 159-173, 1989.
15. Skitt, R. A. and R. R. Levory, "Vehicle Routing via Column Generation," European Journal of Operational Reasearch, Vol. 21, No. 1, pp. 65-76, 1985.
16. Soumis, F., J. A. Ferland, and J. M. Rousseau, "A Model for LargeScale Aircraft Routing and Scheduling Problems," Tranportation Research, Vol. 14B, No. 2, pp. 191-201, 1980.
17. Teodorovic, D., Airline Operations Research, Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1988.
18. Teodorovic, D. and E. Krcmar-Nozic, "Muticriteria Model to Determine Flight Frequencies on an Airline Network under Competitive Conditions," Tranporation Science, Vol. 23, No. 1, pp. 14-25, 1989.