

다단계 생산공정에 대한 공리모델

An Axiomatic Model of the Multi-Stage Production Process

안 웅
서경대학교 산업공학과

Modeling the production process is a necessary and essential aspect of the production planning. This paper introduces a theoretical model of the multi-stage production process. A multi-stage production process is regarded as a network of interrelated production activities which use system exogenous inputs of goods in production and the intermediate products transfers between activities to produce final products. Our model is characterized by (1) a few of the production-related assumptions and (2) two types of elements "goods and activities" that are represented in terms of the network terminology. This model is different from the another multi-stage production models, so-called production network models in relation to the production-theoretical concept. It is not based on the concept of the production correspondence and the activity production functions, but the technology model of Koopmans.

1. 문제제기

공업생산이란 재화의 체계적인 창조활동을 의미한다. 이러한 활동은 경제적 시스템인 생산시스템내에서 이루어지며, 완제품(desired products)은 일반적으로 재화의 단계적인 변형과정(transformation process)을 통해서 생산되어진다. 생산활동의 효율적인 대안을 제시하는 생산계획은 재화의 투입 및 산출관계를 계량적으로 나타낸 생산모델을 통해서 이루어진다. 생산모델이 생산계획을 위한 적합한 모델이 되기 위해서는 공업생산의 일반적인 생산형태인 다단계 생산공정이 생산모델에 포함되어 있어야 한다. 다단계 생산공정은 다수의 생산활동과 기술적 상호 관련성을 갖고 있는 생산활동들 간의 재화의 흐름으로 구성된 하나의 네트워크로 나타낼 수 있다.

Shephard는 1977년 선박건조에 대한 최초의 생산 네트워크 모델을 발표하였다. 이 생산모델의 주된 목적은 선박건조의 구조 및 실질적인인 생산활동들을 - 예를들면 선박 몸체의 조립, 엔진생산, 내부장치시설등- 모델에 적합하게 記述·把握하기 위함이며, 또한 선박건조의 生産計劃에 있었다. 이 생산모델이 기존의 생산모델과 큰 차이점은 생산시스템내에서 발생하는 재화의 흐름을(intermediate products transfers) 모델에 顯示的(explicitly)으로 파악한 점이다. Shephard의 생산 네트워크 모델은 Leachman 과 Hackman에 의해서 이론적으로 더욱 발전되었으며 생산계획의 여러 응용분야에 적용될 수 있게끔 확장되었다.

Shephard유형의 생산 네트워크 모델의 이론적인 배경은 Production Correspondence 와 Activity Production Functions개념 이다. 이러한 생산 네트워크 모델들의 장점은 기술적, 시간적 상호 의존관계를 갖는 생산활동들의 정확한 寫像(mapping)에 있다. 그러나 불충분한 사항으로는 생산현장에서 흔히 발생 가능한 생산선택(Alternative Productions) 및 代替생산과정(Substitutional Production Process)문제에 대한 결핍된 인식이다.

본 논문에서는 이러한 문제의 해결방안으로써 생산 네트워크 모델의 이론적인 배경으로 Koopmans의 기술모델(Technology Model)과 Flow Network Model의 사용을 통해 하나의 포괄적인 생산모델을 제시하였다.

2. 모델정의

생산모델 구성의 기본적인 요소는 재화와 Activity이다. 재화란 경제적 계산의 대상이 되는 모든 유형·무형물을 의미한다. 외부에서 조달된 원자재, 생산설비, 인간의 노동력등과 같은 재화를 기본재(Primary Factors)라 하며, 생산시스템내에서 생산의 결과로 발생한 재화들 중에서 다시 생산요소로 투입되는 재화를 중간재(Intermediate Products)라 하고 소비자에게 상품의 형태로 판매 가능한 재화를 최종재(Final Products, Desired Products)라 한다. Activity는 생산기술의 계량적인 표현으로 생산에 필요한 투입재 뿐만이 아니라 생산의 결과로 발생한 산출재를 재화종류에 따라 수량으로 표시한 하나의 재화목록이다.

다단계 생산모델에 있어서는 각 개별적인 변형과정에서 투입·산출된 재화들을 기본재, 중간재, 최종재로 구분하는 것이 바람직스럽다.

$X \subset \mathbb{R}^m$: 기본재 공간

$A \subset \mathbb{R}_+^r$: 중간재 투입공간

$B \subset \mathbb{R}_+^r$: 중간재 산출공간

$Y \subset \mathbb{R}_+^n$: 최종재 공간

생산단위 S_j , $j=1, \dots, n$ 의 생산활동 V_k^j 은 非陽의 투입벡터 $(x_k^j, a_k^j) \in I$, $I = X \times A$ 와 하나의 非陰의 산출벡터 $(b_k^j, y_k^j) \in O$, $O = B \times Y$ 로 정의되어진다, 즉

$$V_k^j := (x_k^j, a_k^j, b_k^j, y_k^j) \in X \times A \times B \times Y$$

여기서 벡터 I 는 기본재와 중간재의 공동투입공간이며 O 는 이에 상응하는 중간재 및 최종재의 공동산출공간이다.

D.1.: 생산단위 S_j , $j=1, \dots, n$ 에서 기술적으로 가능한 생산활동들의 집합

$$T^j := \{ V_k^j \mid k \in \mathcal{O}(j), V_k^j := (x_k^j, a_k^j, b_k^j, y_k^j) \in X \times A \times B \times Y \}$$

$\mathcal{O}(j)$ 는 생산단위 j 의 모든 생산활동들의 집합을 나타낸다.

특정 생산단위의 기술적으로 가능한 생산활동의 분석후 주어진 생산프로그램을 효율적으로 실현하기 위해, 가능한 생산활동 중에서 어떤 생산활동들이 선택되어야 하는 문제가 대두된다. 이 문제의 해결을 위해서는 생산의 효율성 개념이 필요하다

D.2.: 효율적인 생산(Efficient Production)

생산단위 S_j 내의 생산활동 $(x_k^j, a_k^j, b_k^j, y_k^j)$, $(x_w^j, a_w^j, b_w^j, y_w^j) \in X \times A \times B \times Y$

이 있을때 만약에 T^j 에 다음과 같은 조건을 만족시키는

$$(x_w^j, a_w^j, b_w^j, y_w^j) - (x_k^j, a_k^j, b_k^j, y_k^j) \geq 0$$

생산활동 $(x_w^j, a_w^j, b_w^j, y_w^j)$ 이 존재하지 않으면 생산활동 $(x_k^j, a_k^j, b_k^j, y_k^j) \in T^j$ 는 효율적이다.

상기 효율성 개념은 각 생산단위의 생산기술적인 최대·최소원칙을 나타내고 있다. 다단계 생산시스템내에서 각 생산단위들 간의 상호 기술적인 관련성을 나타내기 위해서는 生産經路(a sequence of production activities, Production Path) 라는 개념이 필요하다. 생산경로는 생산기술 및 조직적으로 가능한 각 생산단위의 생산활동들의 조합을 의미한다.

D.3. 생산경로 P^1

생산경로 P^1 은 생산활동들의 생산기술 및 조직적으로 가능한 조합이다, 즉

$$(x_1, a_1, b_1, y_1), (x_2, a_2, b_2, y_2), \dots, (x_l, a_l, b_l, y_l)$$

$$:= \{ (x_k, a_k, b_k, y_k) \}_{k=1}^l$$

그러므로 생산경로의 크기(길이)는 생산활동들의 수와 일치한다. 생산시스템내의 모든 생산경로는 생산활동의 상이한 조합에 의해서 구성된다. 만약에 어떤 생산프로그램이 정확하게 하나의 생산활동 조합으로 구성된 생산경로에 의해서 실행되어 진다면 이러한 생산경로를 非代替生産經路라 한다. 그러나 유연생산시스템에서는 특정 생산프로그램이 하나의 비대체생산경로를 통해서 실현되는 것이 아니라 일반적으로 다수의 대체생산경로에 의해서 수행되어질 수 있다.

D.4. 생산경로의 대체성

만약에 특정 생산프로그램이 생산활동들의 상이한 조합에 의해서 구성된 적어도 두가지 이상의 생산경로에 의해서 실행되어 질 수 있을때 이 생산경로들은 서로 대체적인 관계에 있다.

일련의 정의된 용어를 통해 다단계 생산시스템의 생산기술집합(Production Technology Set)을 다음과 같이 정의 할 수 있다. 여기서 생산시스템의 전체 생산기술집합은 각 생산단위의 생산기술집합으로 구성되어 진다.

D.5. 다단계 생산시스템의 생산기술집합 T

$$T := \bigcup_{j=1}^n T^j,$$

$$T^j := \{ V_k^j \mid k \in \mathcal{O}(j), V_k^j := (x_k^j, a_k^j, b_k^j, y_k^j) \in X \times A \times B \times Y \}$$

다단계 생산시스템에서 각 개별적인 생산활동들의 투입·산출관계, 각 생산활동들간의 기술적인 상호관련성을 나타내는 생산경로 및 각 생산단위들간의 재화의 흐름은 생산활동과 재화의 흐름(운반)을 호(Arc), 재화의 종류 및 저장을 마디(Node)로 표현하여 하나의 Network로 구성할 수 있다. 생산 네트워크에서 생산활동의 계량적인 투입·산출관계는 호에 대한 weight function을 통해 명시적으로 나타내어 진다.

D.6. 호에 대한 Weight Function

E를 호의 집합이라 하고 $T \subset E$, $\tau: E \longrightarrow \mathbb{R}^{m+2l+n}$ 이면, 각각의 호 $e_k \in E$ 에 대한 weight function $\tau(e_k)$ 은 다음과 같다.

$$\tau(e) := \begin{cases} (x_k, a_k, b_k, y_k) \in \mathbb{R}^{m+2l+n} & , \text{ 만약에 } e_k \in T \\ 0, & \text{ 그밖에} \end{cases}$$

Weight Function을 통한 생산활동 V_k 는 다음과 같다.

$$\textcircled{i} \xrightarrow{(x_k, a_k, b_k, y_k)} \textcircled{j}$$

여기서 매듭 i 와 j 는 투입·산출재화의 벡터를 의미한다.

D.7. Activity-on-Arc Production Network (AAPN)

N 이 생산의 투입·산출에 관련된 재화의 종류 및 재고를 나타내는 마디집합이고, 각 생산단위 S_j , $j=1,2,\dots,n$ 의 생산활동을 나타내는 호들의 집합을 E , τ 는 호의 Weight Function이라 할때, 즉

$$\text{AAPN} := (N, E, \tau)$$

에서는 다음과 같은 조건이 충족되어 져야한다.

조건 1: 각 생산단위 S_j , $j=1,\dots,n$ 에 생산시스템이 보유하고 있는 기본재가 분배되어 진다,

$$x \leq \sum_{j=1}^n x^j .$$

이 조건은 각 생산단위의 기본재 총투입량이 각 생산단위에 할당된 기본재량을 초과해서는 안된다는 사실을 나타내고 있다.

조건2: 중간재 벡터인 $a^j \in A$, $b^j \in B$ 와 벡터 $r_{ij} \in \mathbb{R}_+^1$ ($i,j=1,\dots,n$)

$$|a^j| \leq \sum_{i=1}^n r_{ij} ,$$

$$b^j < \sum_{i=1}^n r_{ij} .$$

벡터 r_{ij} 는 생산단위 S_j 의 후생산활동들을 수행하기 위해서 생산단위 S_i 로부터 생산단위 S_j 로 운반된 재화량이다.

조건3: 중간재에 대한 투입 · 산출 균형이 유지되어 진다.

$$\sum_{j=1}^n a^j + \sum_{j=1}^n b^j \geq 0.$$

이 조건은 각 중간재에 대해 전체 투입량이 산출량을 초과할 수 없다. 이 조건은 Network이론에서는 flow conservation 이라 한다.

조건4: 최종재는 각 생산단위 S_j 에서 분할생산이 가능하다.

$$y \leq \sum_{j=1}^n y^j.$$

조건5: 각 생산단위 S_j , $j=1, \dots, n$ 의 생산활동은 각 하부생산네트워크 PN^j 으로 구성되며 다음조건을 충족 시킨다.

$$PN^j := (N^j, E^j, \tau) \subset PN, \quad \bigcup_{j=1}^n PN^j = PN.$$

3. 공리시스템

다단계 생산시스템의 생산기술적인 사항은 다음 공리시스템에 의해 특징지워진다.

공리1: 양의 생산결과를 갖는 생산경로가 존재한다.

$$\exists P^1 := \left\{ (x_k, a_k, b_k, y_k) \right\}_{k=1}^1, \quad y_1 \geq 0.$$

이 공리는 생산시스템이 생산활동의 휴식이외에도 생산적이어야 한다는 사실을 보장하고 있다.

공리2: 각 생산단위 S_j 에 대해 다음을 충족 시키는 하나의 비공집합의 인덱스 집합 $I = \{k_1, \dots, k_m\}$ 이 있다.

$$(b_k^j, y_k^j) \geq 0 \longrightarrow x_{k_q}^j < 0, \text{ 적어도 하나의 } q, q=1, \dots, m$$

이 공리는 기본재 투입없이 재화가 산출되지 않는다는 것을 직접적으로 나타내고 있다. 이 공리는 또한 생산기술적인 측면에서 생산시스템내에 각 생산단위에 기본재가 투입되어야 한다는 합리적인 사고를 나타내고 있다.

공리3: 재화의 낭비가 가능하다.

a) 산출부문에서의 재화낭비 (Input Disposability)

모든 $(x_k, a_k, b_k, y_k) \in T$ 와 $(b^*, y^*) \in 0$ 에 대해

$$(b^*, y^*) \leq (b_k, y_k) \longrightarrow (x_k, a_k, b^*, y^*) \in T$$

이 가능하다.

이 공리는 산출량의 감소는 같은 크기의 투입벡터에 의해서 가능하다. 그러므로 산출의 낭비가 허용되어진다.

b) 투입부문에서의 재화낭비 (Output Disposability)

모든 $(x_k, a_k, b_k, y_k) \in T$ 와 $(x^*, a^*) \in I$ 에 대해

$$(x^*, a^*) \leq (x_k, a_k) \longrightarrow (x^*, a^*, b_k, y_k) \in T$$

이 성립된다.

어떤 경우에도 투입량의 증가는 이미 생산된 산출벡터의 크기를 감소시킬 수 없다. 그러므로 투입의 낭비가 가능하다.

여기에 소개된 공리시스템은 생산기술적으로 일반적인 가정들을 포함하고 있다. 이러한 공리시스템은 각 생산시스템의 개별적인 기술형태 및 특별한 성격에 따라 확장되어 질 수 있다.

참 고 문 헌

- 【1】Koopmans, T.C., "Analysis of Production as an Efficient Combination of Activities", *Activity Analysis of Production and Allocation*, New Haven, 1951, pp.33-97.
- 【2】Hackman, S.T., A General Model of Production: Theory and Application, *Unpublished Dissertation*, Berkely, 1983.
- 【3】Hackman, S.T. and R.C. Leachman, "An Aggregate Model of Project-Oriented Production", *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, Vol.19(1989), pp.220-231.
- 【4】Hackman, S.T. and R.C. Leachman, "A General Framework for Modeling Production", *Management Science*, Vol.35(1989), pp.478-495.
- 【5】Leachman, R.C., Preliminary Design and Development of a Corporate-Level Production Planning System for the Semiconductor Industry, *ORC Report 86-11*, University of California at Berkeley, 1986.
- 【6】Shephard, R.W., R.A. Al-Ayat, and R.C. Leachman, "Shipbuilding Production Function: An Example of a Dynamic Production Function", *Quantitative Wirtschaftsforschung*, Tübingen, 1977, pp.627-654.
- 【7】Shephard, R.W., "Dynamic Production Networks", *Quantitative Studies on Production and Prices*, Würzburg-Wien, 1983, pp.113-128.