

제품의 수명특성 관리를 위한
누적점수 관리도의 경제적 설계
An Economic Design of
CUSCORE Control Chart for Quality
Characteristics with Exponential Distribution¹⁾

Kim, Jong-Gurl²⁾, Jeong, Young-Min³⁾

Dept. of Industrial Engineering, Natural Science Campus,
Sung Kyun Kwan University, Cheoncheon-dong,
Changan-gu, Suwon, Kyunggi-do 440-746

ABSTRACT

This paper considers a procedure for the economic design of a cumulative score(CUSCORE) control chart which is more robust than the conventional CUSUM control chart and more sensitive than \bar{X} -type control chart for small shift to control the mean of a process with an exponentially distributed quality characteristic.

An expected loss - cost model as a function of design variables(sample size, sampling interval, scoring limit and decision limit) is derived. Direct search techniques are used to optimize the model subject to ARL in control.

Numerical examples and sensitivity analysis of the model are presented. For selected values of situation parameters a comparison study with CUSUM charts is given.

CUSCORE control charts compare favourably with CUSUM charts in cost for speedy production process.

The proposed control chart can be directly applied for controlling the lifetime characteristics.

I. 서론

관리도를 공정상의 평균, 불량률, 산포등을 알아내는 효과적인 도구로 사용하기 위해서는 먼저 적절한 관리도의 설계가 이루어져야 한다. 관리도의 설계는 부분군의 크기, 부분군의 채취빈도와 관리한계선을 설정하고 통계적 기준에 의해 결

1) 본 연구결과는 문교부 학술지원(89년도)에 의한 후속결과의 일부임

2) 성균관대학교 산업공학과 교수

3) 성균관대학교 산업공학과 대학원

정변수의 값을 정하는 것이다. 한편, 관리도의 설계에 있어서 또 다른 요인이 존재하는 데, 공정관리에 사용되는 결정변수의 값에 따라 발생하는 비용이 달라지게 되므로 이것을 고려한 경제적인 설계가 필요하다. 부분군의 채취와 검사에 드는 비용, 공정의 이상요인을 찾고 이를 제거하는데 드는 비용, 불량품에 의해 발생하는 비용 등이 관리도의 결정변수 값의 선택에 따라 변화하게 되며 이에 따라 관리도의 유지비용이 달라지게 된다. 이러한 경제적 관점에서의 관리도의 최적설계에 관한 연구가 공정상황 및 관리도 종류별로 많은 연구자에 의해 수행되어 왔다.[2,8]

관리도의 경제적 모형은 관리도의 결정변수들과 위의 비용들로 이루어진 단위 시간당 평균비용을 구하는 것으로 이루어진다. 단위 시간당 평균비용은 공정이 관리상태에서 이상상태로 전이했다가 다시 관리상태로 돌아오는 일련의 주기동안 발생하는 비용의 기대값을 이용하여 계산할 수 있다. 이러한 주기의 평균길이를 $E[T]$ 라 하고 $E[C]$ 를 그 주기 동안 발생한 총 기대비용이라고 하면 단위 시간당 평균비용은 $E[A]=E[C]/E[T]$ 이다. 따라서 경제적 설계는 이 $E[A]$ 를 최소화하는 부분군의 크기, 부분군의 채취 간격, 관리한계선을 구하는 것이다. 그러나 이와 같은 결정변수의 값은 해석적으로는 구하기 어렵고 컴퓨터를 이용하여 수치적인 방법으로 구해지고 있다. 이 경제적 설계의 대표적 모형에는 관리도의 경제적 설계의 기초를 제공한 \bar{X} 관리도에 관한 던칸[2]의 모형이 있고, 누적합 관리도의 경제적 설계모형은 1968년 테일러[9]로 시작하여 고엘과 우[3], 치우[1]등에 의하여 연구되어 왔다.

본 연구에서는 품질 특성치가 제품수명과 같은 지수분포를 따를 경우에 공정이 작은 변동에 대한 탐지능력이 뛰어나고 이상치(outlier)에 대해 강건성(robustness)을 가지며 상대적으로 적용이 편리한 것으로 알려진[5] 누적점수 관리도의 경제적 설계모형을 구성하고 누적합관리도의 경우와 비교분석하며 수치적인 경제적 설계예를 제시하고 아울러 공정상황 모수의 최적 결정변수에 대한 모형의 감도 분석을 수행한다.

II. 누적점수 관리도

공정을 관리하는데 단측과 양측의 경우 모두에서 정규분포의 평균을 관리하기 위한 간단한 점수부가체계를 사용하는 관리체계가 민포드[5]가 제안한 누적점수관리도이다. 누적점수-Cumulative Scores(CUSCORE)-관리도 체계는 단순히 공정평균이 극도의 음수, 극도의 양수 또는 그 밖의 값을 갖는가에 따라 -1, +1, 0의 값을 갖는다. 교정활동은 누적점수의 값이 어떤 고정된 값에 도달할 때 수행된다.

일반적으로 공정 특성을 연구하는 경우에 있어서, 정규분포 가정을 갖는 것이 보통이다. 그러나, 지수분포를 따르는 품질 특성을 갖는 공정이 있다면, 정규분포 가정으로서 올바른 관리도 체계를 구할 수는 없을 것이다. 지수분포를 가정한 누적합관리도의 경제적 설계모형은 대칭형태를 갖는 정규분포의 경우보다 복잡하다. 하지만, 그 필요성-정규분포가정을 갖는 누적점수관리도와 비교연구, 그리고 지수분포를 갖는 관리도체계의 필요성 등- 때문에 본 연구에서 지수분포를 가정한 경제적 설계가 이루어진다.

모형은 정규분포의 것과 같지만 다만, 공정은 대칭이 아닌 지수분포, 즉

$$F(x) = 1 - e^{-x/\theta}$$

를 따르며, β_0 에서 β_1 로의 이상원인을 갖는 변화

$$(\beta_1 = \beta_0 + \delta \cdot \beta_0 = (1 + \delta)\beta_0)$$

가 발생한다.

또한 점수부여에 있어서, k_1 (상한), k_2 (하한)의 두가지 경계로써, -1, 0, +1의 점수를 부여한다.

그 모형의 표본 평균 \bar{x}_i 는, 다음과 같은 감마(gamma)분포

$$g(\bar{x}; n, \beta) = \frac{n^n \beta^{-n}}{(n-1)!} \bar{x}^{n-1} \exp(-n \cdot \bar{x}/\beta)$$

를 따르며, 확률변수 W_i 는,

$$W_i = \begin{cases} -1 & \bar{x}_i/\beta \leq k_2 \\ 0 & k_2 < \bar{x}_i/\beta < k_1 \\ 1 & k_1 \leq \bar{x}_i/\beta \end{cases} \quad i=1, 2, \dots$$

이다.

여기서, 상한과 하한 k_1, k_2 를 결정하는 문제는, 공정이 정상 관리상태일 때, 누적점수의 랜덤 이 대칭형태를 갖는다는 조건에 따라

$$\int_0^{k_1} g(\bar{x}; n, 1) d\bar{x} = 1 - \int_0^{k_2} g(\bar{x}; n, 1) d\bar{x}$$

로써 결정되어 지며, 이는 $\Pr(W_i=1) = \Pr(W_i=-1)$ 이다.

또, 중심으로 부터의 점수 한계선간의 거리가 같다는 것으로부터, $k_1 = 2 - k_2$ 를 만족하는 k_1 과 k_2 를 얻을 수 있다.

이러한 값을 갖는 모형은

$$S_0 = 0 \\ S_j = \begin{cases} 0 & S_{j-1} + W_j = -a \\ S_{j-1} + W_j & \text{otherwise} \end{cases}$$

이고, S_j 가 (+)값을 가질 때에는 j 번째 표본까지에서 표본평균이 많이 초과되고 있음을 나타내는 것이고, S_j 가 (-)값을 가질 때에는 그 반대의 의미이다. 여기서, $S_j \geq a$ 이면 교정활동이 이루어 진다.

추출된 부분군의 결과들을 누적하여 공정의 변화를 판단하는 누적합관리도는 아주 작은 공정의 변화를 탐지하기 위한 관리도로 현장에서 많이 사용되고 있다.[11] 그러나 과도한 민감성으로 인하여 일시적이 이상자료의 영향을 크게 받기 때문에, 이를 개선하기 위한 대안적인 누적합관리도체제들이 개발·제안되어 오고 있다. 본 연구에서는, 이 중 가장 뛰어난 성질을 갖는 것으로 드러난[5], 공정평균의 변화를 민감하게 감지하는 누적합관리도의 특성을 유지하면서도 어떤 값 이상의 표본에 대해 점수를 부여한다는 간단한 방식으로 일시적 이상치 표본이 관리도에 미치는 커다란 왜곡현상에 저항하는, 누적점수관리도에 대해 연구를 행한다.

III. 경제적 설계

본 연구에서는 공정상태에 관한 다음과 같은 몇가지 가정하에 누적점수 관리도 체계의 경제적 최적설계 문제를 다루고자 한다.

공정은 평균 $1/\beta_0$, 표준편차 $1/\beta_0$ 를 갖는 지수분포를 따르며 관리상태에서 진행된다. 그리고 관리상태의 공정의 평균 μ_0 은 이상요인에 의해 $\beta_1 = \beta_0 + \delta\beta_0$ ($\delta > 0$)로 변화한다. 공정에 이상요인이 발생할 때까지의 시간은 평균 $1/\lambda$ 를 갖는 지수분포를 따른다. 공정의 샘플을 얻고 해석하는 동안은 이상요인이 발생하지 않고 이상요인을 찾는 동안에는 공정은 진행되지 않는다. 공정의 평균은 수정조치에 의해서만 수정되어 질 수 있다.

다음은 누적점수 체계를 위한 비용모형을 세울 때 고려되는 변수들이다.

n	표본크기(부분군 수:sample size)
a	관리 한계선(action limit)
g	표본 추출 간격(sampling interval)
k_1, k_2	점수 부여 한계(scoring limit)
k	중심조정치(reference value)
T	공정이 관리상태에 있을 시간
M	공정이 이상상태가 되기 전까지 얻어진 표본수
N	오판(false alarm)의 수
S	이상원인이 발생 후 수정조치가 행하여 질 때까지 얻어진 표본수
P_0	공정이 관리상태에 있을 때의 단위 시간당 이득
P_1	공정이 이상상태에 있을 때의 단위 시간당 이득
τ_s	이상요인(assingable cause)발견시까지의 시간
K_s	이상요인 발견시까지 드는 비용
τ_r	이상신호발생 이후 공정에 수정조치를 가할 때까지의 시간
K_r	이상신호발생 이후 공정에 수정조치를 가할 때까지 드는 비용
b	표본크기와는 무관하게 표본추출이나 관리도의 유지에 드는 비용
c	표본크기와 비례하여 표본추출이나 관리도의 유지에 드는 비용
ARL(β)	평균 β 를 갖을 때의 평균 런길이

앞서 언급되어진 공정의 주기에 따라 한 주기의 길이는 그림 1과 같이, 공정이 관리상태에서 지속되는 시간, $g \cdot E[M+S]$, 이상요인을 찾는 시간, $(E[N]+1) \cdot \tau_s$, 신호 후 공정에 수정조치를 가할 때까지의 시간, τ_r 의 합으로 이루어 진다. 따라서 한 주기의 길이는 $g \cdot E[M+S] + (E[N]+1) \cdot \tau_s + \tau_r$ 이다.

그리고 한 주기의 기대이익은

$$P_0 \cdot E[T] + P_1 \cdot E[M \cdot g + S \cdot g - T] - (E[T]+1)K_s - K_r - (b+c \cdot n) \cdot E[M+S] \text{이다.}$$

여기서, $E[M] = 1/(\lambda \cdot g) - 1/2 + \lambda \cdot g/12$,

$$E[N] \approx E[M]/ARL(\beta_0), E[S] \approx ARL(\beta_1), E[T] = 1/\lambda \text{ 이다.}$$

따라서 시간당 평균 이득은 (한 주기의 기대이익)/(한 주기의 길이)라고 할 수 있다. 결국 공정이 관리상태에 있을 때의 이득에서 단위시간당 이득을 빼면 손실

비용함수 F 를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$F = \frac{\lambda \cdot U \cdot B_1 + V \cdot W + (b+c \cdot n)(1+\lambda \cdot B_1)/g}{1+\lambda \cdot B_1 + \tau_s B_0 + \lambda(\tau_r + \tau_s)}$$

여기서,

$$B_0 = (1/g - \lambda/2 + \lambda^2 g/12) / ARL(\beta_0)$$

$$B_1 = (ARL(\beta_1) / 2 + \lambda g/12) g$$

$$U = (P_0 - P_1)$$

$$V = K_s P_0 \tau_s$$

$$W = K_r + K_s + P_0(\tau_r + \tau_s) \text{이다.}$$

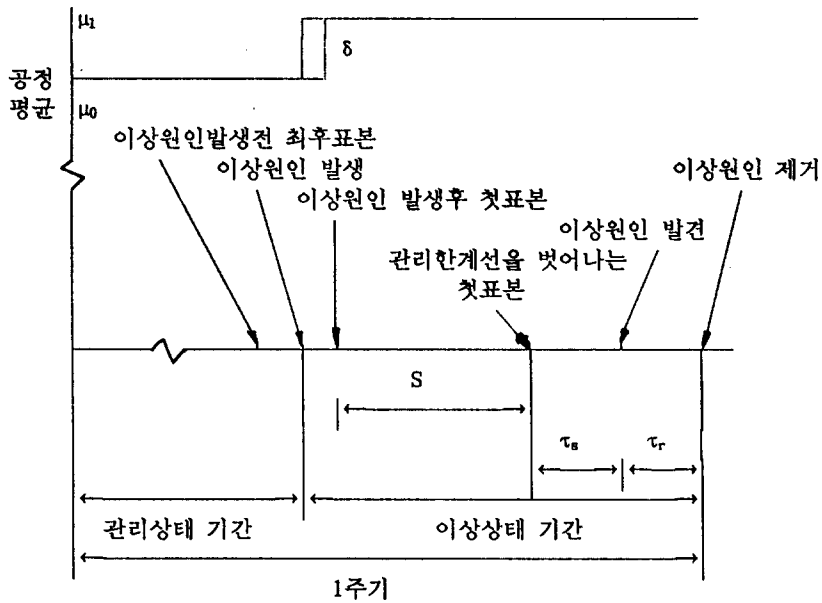


그림 1. 공정 주기

그리고 그 계산과정은, 먼저 각 변수들과 $\beta_1 = \beta_0 + \delta\beta_0 (\delta > 0)$ 를 정의 한다. 여기서 경제적 설계의 주요변수중 하나인 점수부여 한계선 k_1, k_2 를 계산할 수 있는데,

$$G(k_1, \beta) = \int_0^{k_1} g(\bar{x}; n, 1) d\bar{x}$$

이라고 하면,

$$p = \Pr(W_i = 1) = 1 - G(k_1, \delta_1)$$

$$q = \Pr(W_i = -1) = G(k_2, \delta_1) \quad \text{where } \delta_1 = \beta/\beta_0$$

이다.

여기서도, $ARL(\beta)$ 는 다음과 같이 구해진다.

$$ARL(\beta) = \begin{cases} \frac{a^2}{p}, & p = q \\ \frac{a}{(p-q)}(1 - (q/p)^a), & p \neq q \end{cases}$$

누적점수관리도와 비교를 위한 지수분포를 따르는 누적합관리도가 있는데, 모든 가정과 계산방식은 같고, 다만 경제적 설계의 주요인자를 표본 크기 n , 누적점수 상한 h , 표본 추출 간격 g 로 보며, 중심조정치 k 의 선택은 많은 선행연구들[1]과 같이 중심 조정치의 잇점에 따른 AQL과 RQL의 중간인 $k = \mu_0 + 0.5 * \delta\sigma$ 를 사용하기로 한다. 특성치가 정규분포를 따르는 경우 누적점수관리도와 누적합관리도의 비교연구[6]에서 사용된 누적합관리도와 동일한 k 값을 사용한다.

n 과 $ARL(\beta_0)$ 이 주어지면 계산이 가능한 g 의 값은, 계산을 간편하게 하기 위해, F 에서 작은 값은 갖는 항을 제외하면, $g = ((V/ARL(\beta_0) + b + c * n) / (\lambda * U(ARL(\beta_1)) - 0.5))^{0.5}$ 로써, 주어진 n 과 a 에서의 g 값을 구하고, 최적해 탐색기법을 이용하여 손실비용함수 F 의 최적해를 찾게 된다.

최적해를 찾는 수치해는 F 가 결정 변수에 대해 단일최소치를 갖는 형식이 아니기 때문에 all grid 방법으로 지역해의 집합을 찾은 후 후크-지브방법, 포웰방법 또는 다차원 피보나치, 패턴서치 등을 이용하여 최적해를 구할 수 있다.

IV. 모형의 특성

1. 예제

경제적 설계에 고려되는 변수들이 다음과 같은 값을 갖는다고 가정하자.

$$P_0 = 1500, \quad P_1 = 5000, \quad \tau_s = 5, \quad K_s = 10,$$

$$\tau_r = 50, \quad K_r = 1000, \quad b = 50, \quad c = 10,$$

$$\lambda = 0.1, \quad \delta = 0.5,$$

이에 의해 얻어진 값은, 부분군수 $n = 1$, 점수한계 값 $a = 3$ 그리고 표본추출간격 $g = 0.23$ 이면 가장 경제적인 손실비용함수 값 $F = 12692.56$ 의 설계가 된다.

한편, 치우[1]의 자료를 사용하여, 표본추출간격 $g = 1.44$, 점수 한계값 $a = 1$, 부분군 수 $n = 5$ 일 때, 손실비용함수 값은 2.46($k_1 = 1.431$, $k_2 = 0.569$)을 얻어서, 정규분포를 가정한 경우인 부분군 수 $n = 4$, 점수 한계값 $a = 1$, 표본추출간격 1.47, 그리고 $F = 2.29$ 와는 차이를 보이고 있다.

본 연구에서는 다양한 모형 모수의 값을 이용하여 누적점수관리도의 경제적 분

석에 대해 다각적으로 분석이 행해지고 비교되어 졌으며, 분석결과 누적합에 비해 누적점수관리도의 우수성이 떨어지지 않음이 밝혀졌으며, 치우의 예를 중심으로 모수값 변화별 최적해를 구하면 표1과 같다. 손실비용함수와 샘플크기(n)와 관리 한계선(a)과의 관계를 보면 그림 2와 같다.

2. 비용함수의 감도분석

표1. 모수값이 변할 때, 누적점수관리도체계와 누적합 관리도 체계의 경제적 설계

	b	c	λ	P_0	P_1	τ_r	τ_s	K_r	K_s	δ	n	h/a	g	F
누적 점수 관리 도	500	100	0.10	15000	5000	100	10	2000	100	0.5	1	1	0.8551	13774.44
	500	100	0.10	15000	5000	100	10	1000	10	0.5	1	1	0.8549	13765.57
	500	100	0.10	15000	5000	100	10	2000	10	0.5	1	1	0.8549	13773.66
	50	10	0.10	15000	5000	50	5	1000	10	0.5	1	3	0.2339	12692.56
	50	10	0.10	15000	5000	50	5	2000	10	0.5	1	3	0.2399	13706.73
	500	100	0.10	15000	5000	100	5	2000	100	0.5	1	1	0.6857	13748.47
누적 합 관 리 도	500	100	0.10	15000	5000	100	10	2000	100	0.5	1	1	0.7992	13776.01
	500	100	0.10	15000	5000	100	10	1000	10	0.5	1	1	0.7990	13767.10
	500	100	0.10	15000	5000	100	10	2000	10	0.5	1	1	0.7990	13775.23
	50	10	0.10	15000	5000	50	5	1000	10	0.5	1	2	0.2707	12692.88
	50	10	0.10	15000	5000	50	5	2000	10	0.5	1	2	0.0207	12707.20
	500	100	0.10	15000	5000	100	5	2000	100	0.5	2	1	0.8201	13749.90

표 1에서 대체적으로, 생산주기 동안의 시간당 이득인 P_0, P_1 가 큰 값을 가질 때, 손실비용 F도 커지며, 손실비용에 가장 큰 영향을 주는 요소는 표본 추출간격 g인 것으로 밝혀졌다. 특히, τ_s, τ_r 즉, 이상신호발생 이후 공정에 수정조치를 가할 때까지의 시간과 이상용인을 찾을 때까지의 시간이 변화할 때 관리 한계선 a의 값에 크게 영향을 미치게 된다.

공정평균이 이상요인에 의해 변화하는 크기인 δ 는, 그 크기가 클 때, 즉 변화의 폭이 큰 경우 손실비용이 더 적은 것으로 나타났으며, 표본크기와 점수한계가 줄고 표본추출간격이 길어졌다.

관리도 유지에 드는 비용인 b와 c는, 표본크기와 무관한 비용인 b가 커지면 표본크기는 대폭 커지고, 점수한계는 줄며, 표본추출간격이 길어진다. 또, 표본크기에 비례하는 비용인 c가 증가하면, 표본수는 줄어들고 추출간격이 짧아진다.

단위 시간당 발생하는 이상요인 수인 λ 가 줄어들면, 표본크기가 커지고 점수한계는 줄며 추출간격이 매우 길어지게 된다. 또 손실비용이 현저히 작아지는 것이 보인다.

누적합관리도체계에서는 앞서의 누적점수와는 달리 표본추출간격 g보다는 누적합 상한 h가 손실비용에 미치는 영향이 큰 것으로 나타났으며, 이 누적합의 상한 역시 τ_s, τ_r 의 값에 큰 영향을 받는 것으로 밝혀져, 경제적 설계시, 공정의 τ_s, τ_r 에 초점을 두어 알맞은 n, h, g를 선택하는 것이 주요할 것으로 판단된다.

3. 누적함관리도 체계와의 비교

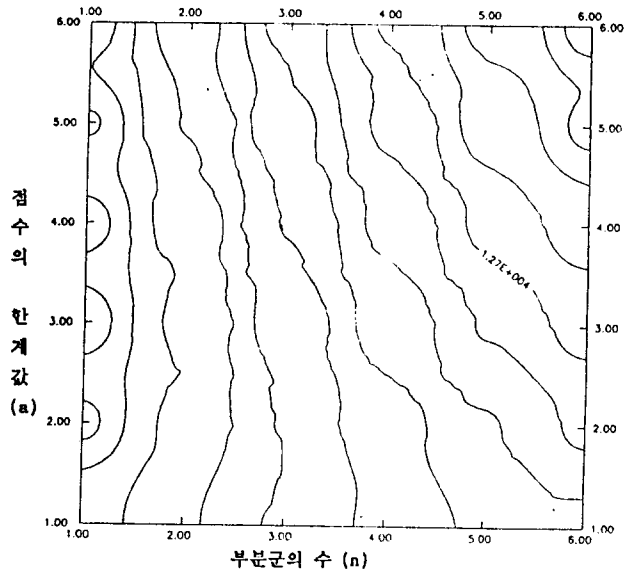


그림 2. 손실비용함수의 값

표 1.에서 보면 부분군수(n)은 1, 누적함의 한계값(h)는 2, 표본추출간격(g)는 0.27일 때, 최소의 손실비용 12692.88을 찾아서, 지수분포를 따르는 누적점수관리도($F=1262.56$)에 비해 매우 근소한 차이를 보이고 있다.

한편, 치우[1]의 자료를 사용하여 전체 관리도를 비교해보면, 정규분포를 따르는 누적점수의 부분군 $n = 4$, 점수 한계값 $a = 1$, 그리고 표본추출간격 1.47일 때, 경제적인 $F = 2.29$ 의 설계, 정규분포를 따르는 누적함의 최소 손실비용을 갖는 부분군 수(n) 1, 누적함의 한계값(h)이 1, 표본추출간격(g)는 0.81인 경우의 손실비용함수 값 2.80인 설계, 지수분포를 가정한 누적점수의 표본추출간격 $g = 1.44$, 점수 한계값 $a = 1$, 부분군 수 $n = 5$ 일 때, 손실비용함수 값 2.46($k_1 = 1.431$, $k_2 = 0.569$)인 설계, 그리고 지수분포를 따르는 누적함관리도의 부분군 수(n) 3, 누적함의 한계값(h) 1, 표본추출간격(g) 1.23일 때, 최소의 손실비용 2.43을 갖음으로써, 정규분포를 가정한 공정에서는 누적점수관리도가 월등히 적은 손실비용을 갖는데 비해, 공정이 지수분포를 따른다면, 누적함관리도가 누적점수관리도에 비해 조금 작은 손실비용을 갖는다. 결론적으로, 누적점수관리도는 누적함관리도에 비해 많은 부분군 수를 필요로 하지만, 더 긴 표본추출간격으로 더 경제적인 관리도의 운영을 할 수 있다.

V. 결론

공정 평균의 변화를 민감하게 감지하는 누적함 관리도의 특성을 유지하면서도 어떤값 이상의 표본값에 대해 점수를 부여한다는 간단한 방식으로 일시적 이상치 표본이 관리도에 미치는 커다란 왜곡현상에 저항하도록 설계된 누적점수 관리도에

대해 경제성의 비교평가와 최적 경제적 설계가 이루어 졌다. 이 연구의 주요 결과는 다음과 같다.

품질 특성이 지수분포를 따를때 관리도를 경제적으로 설계하는 경우 누적점수관리도와 누적합관리도의 비교에서 누적점수관리도가 널리 사용되고 있는 누적합관리도에 비해, 공정속도가 큰 공정에서의 비슷한 환경하에서 크게 떨어지지 않는 경제성을 갖는 것으로 나타났다.

參 考 文 獻

1. Chiu, W.k., The Economic Design of Cusum Charts for Controlling Normal means, Applied Statistics, Vol.23, No.3, 1974
2. Duncan, A.J., The Economic Design of \bar{x} -Charts Used to maintain current control of a process, Journal of the American Statistical Association, Vol. 51, 1956.
3. Goel, A.L. and Wu, S.M., Economically Optimum Design of CUSUM Charts, Management Science, Vol. 19, No. 11, July, 1973.
4. Goel, A.L., Jain, S.C., and Wu, S.M., An Algorithm for the Determination of the Economic Design of \bar{x} -Charts Based on Duncan's Model, American Statistical Association Journal, March 1968.
5. Kim, J.G. and Lee, E.J., Alternative Control charts for Improving the Robustness of CUSUM Control Chart, Sung Kyun Kwan Journal of Science and Technology, Vol. 43, No. 1, 1992.
6. Kim, J.G., Jeong Y.M. and Lee E.J., An Economic Design of a Cumulative Score Control Chart for Normal Distribution, 한국 경영과학회/대한 산업공학회 춘계 공동 학술 발표 논문집, Session B8, 1993
7. Munford, A.G., A Control Chart based on Cumulative Scores, Applied Statistics, Vol.29, No.3, pp.252-258, 1980.
8. Syoboda, L., Economic Design of Control Charts : A Review and Literature Survey(1979 - 1989), SPC in Manufacturing, 311-330, 1991
9. Taylor, H.M., The Economic Design of Cumulative Sum Control Charts, Technometrics, Vol. 3, 1968.
10. Vance, L.C., Average Run Length of Cumulative Sum Control Charts for Controlling Normal Means, Journal of Quality Technology, Vol. 18, No. 3, July 1986.
11. Woodall, W.H., The Distribution of Run Length off One Sided CUSUM Procedures for Continuous Random Variables, Technometrics, Vol. 25, 1983.