

# 기하학적 접근에 의한 비선형 불확실성 시스템에 대한 강건한 슬라이딩 모드 제어

°박동원, 김우철, 김정식, 최승복  
인하대학교 공과대학 기계공학과

## Robust Sliding Mode Control of Nonlinear Uncertain System via Geometric Approach

°Dong-Won Park, Woo-Chul Kim, Jung-Sik Kim, Seung-Bok Choi  
Department of Mechanical Engineering, Inha University

### ABSTRACT

Variable structure control is applied to the robust output tracking control problem of general nonlinear multi-input multi-output(MIMO) systems. Using the concept of relative degree and minimum phase, input/output (I/O) linearization is undertaken. For I/O the linearized system, a new sliding hyperplanes design method is proposed. In this procedure, we can construct very robust and efficient sliding mode controller for general nonlinear systems of relative degree higher than two. The control results are illustrated by adopting a numerical example.

### I. 서론

슬라이딩 모드 제어(sliding mode control), 혹은 가변구조 시스템(variable structure system) 이론은 구 소련의 여러 문헌<sup>[1-2]</sup>에 기초를 두고 있는데, 최근 10여년간 이 분야에 대한 연구가 서방에서 활발히 진행되어 왔다.<sup>[3-5]</sup> 슬라이딩 모드는 가변구조 시스템의 구조들로 일컬어지는 하위시스템(subsystem)으로 구성되는 주 작동 모드(principal operation mode)로서 적당한 스위칭 논리(switching logic)에 의해 얻어질 수 있다. 이 스위칭 논리에 의해 제어기는 불연속성을 갖게 되며, 이러한 제어기에 의해 상태 변수가 불연속면들(discontinuity surfaces) 혹은 그것들의 교선들(intersections)에 머물러 있게되는 슬라이딩 모드가 발생된다. 슬라이딩 모드에서의 운동을 슬라이딩 운동(sliding motion)이라하며, 이렇게 슬라이딩 운동이 발생하는 불연속면들 슬라이딩 면(sliding surface) 혹은 보다 일반적으로 슬라이딩 초평면(sliding hyperplane)이라고 한다. 슬라이딩 모드 하에서 시스템은 변수변화 및 외란에 대해 매우 강건한 성질을 나타내며, 슬라이딩 초평면의 설계는 슬라이딩 모드에서의 시스템의 특성이 슬라이딩 초평면의 계수에의해 좌우되기 때문에 매우 중요하다.

한편, 일반 비선형 시스템(general nonlinear system)에 대한 입력/출력 선형화법(input/output linearization method)이 개발되었는데,<sup>[6-7]</sup> 이 방법은 비선형 항들의 정확한 제거에 의존하

고 있다. 따라서, 모델의 불확실성이나 외란이 존재할 경우 선형화가 불가능할 수 있다. 그러나, "정합 조건(matching condition)"을 만족하는 경우에는 입력/출력 선형화가 보장된다. 입력/출력 선형화된 방정식에 나타나지 않는 방정식을 제로 방정식(zero dynamics)이라하며, 이 방정식은 점근 안정성(asymptotic stability)을 갖지 않더라도 한정된 입력에 대해 상태가 한정되는 성질을 가져야 한다.

최근들어 입력/출력 선형화 법의 가변구조 제어에 대한 응용에 대한 연구가 활발히 진행되고 있다.<sup>[8-11]</sup> Elmali 와 Olgac 은 이상(ideal) 슬라이딩 모드에서의 슬라이딩 모드 제어와 입력/출력 선형화법의 동질성에 대한 고찰을 수행하였다. 입력/출력 선형화된 시스템이 상대차수 3이상일 경우 슬라이딩 초평면의 설계는 매우 어렵고, 이제까지 이 문제에 대해 구체적이고 체계적인 방법을 제시한 연구는 거의 전무한 실정이다.

본 논문에서는 일반 비선형 불확실성 시스템에 대한 강건한 출력 추적제어를 위하여 입력/출력 선형화를 수행하였다. 이렇게 선형화된 불확실성 시스템에 대하여 가변구조 제어가 설계되었다. 그리고, 이 시스템에 대해 새로운 슬라이딩 초평면의 설계법이 제안되었는데, 이 방법으로 El-Ghezawi 등이 제안한 기하학적 접근방법을 이용한 슬라이딩 초평면의 설계방법과 동일한 결과를 얻을 수 있다. 그러나, 본 연구에서 제안된 방법은 보다 간단하며 체계적이다. 마지막으로, 시뮬레이션을 통하여 제안된 방법의 효율성과 강건성을 고찰하였다.

### II. 비선형 불확실성 시스템의 입력/출력 선형화

다음과 같은 다입력다출력 비선형 불확실성 시스템을 고려한다.

$$\dot{x} = f(x) + \Delta f(x,t) + \sum_{i=1}^m [g_i(x) + \Delta g_i(x)] u_i \quad (2.1a)$$

$$y_i = h_i(x), \quad i=1, \dots, m$$

여기서  $x(\cdot) : R \rightarrow D \subset R^n$ 는 시스템 상태 벡터,  $u(\cdot), y(\cdot) : R \rightarrow R^m$ 는 각각 시스템 입력과 출력 벡터이며,  $f(\cdot), g_i(\cdot) : R^n \rightarrow R^n, i=1, \dots, m$ , 는 부드러운 벡터장(smooth vector

field)이며,  $h_i(\cdot) : R^n \rightarrow R^n$ ,  $i=1, \dots, m$ , 는 부드러운 함수이다.  $\Delta f(\cdot)$  and  $\Delta g(\cdot)$ ,  $i=1, \dots, m$ , 는 외란과 모델 불확실성을 나타낸다. 보다 간편하게 표현하기 위하여 다음과 같이 압축된 형태로 표현하였다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + \Delta f(x,t) + [G(x) + \Delta G(x)]u \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad (2.1b)$$

여기서

$$u = \text{col}(u_1, \dots, u_m)$$

$$y = \text{col}(y_1, \dots, y_m)$$

$$G(x) = [g_1(x), \dots, g_m(x)]$$

$$\Delta G(x) = [\Delta g_1(x), \dots, \Delta g_m(x)].$$

위의 불확실성 항들은 다음과 같은 범위 안에서 변화한다고 가정한다.

$$|\Delta f_j(x,t)| \leq \alpha_j(x,t) \quad (2.2)$$

$$|\Delta g_j(x)| \leq \beta_j(x), \quad i=1, \dots, n, j=1, \dots, m$$

여기서  $\alpha_j(x,t)$  와  $\beta_j(x)$  는 각각  $f(\cdot)$  와  $g_i(\cdot)$  의 알고있는 상한(upper bound)이다.

만약 다음과 같은 조건을 만족하면 시스템 (2.1) 은  $x_0$  에 서 (벡터) 상대 차수 (relative degree)  $[r_1, \dots, r_m]$  를 갖는다고 한다.

(i) 모든  $i=1, \dots, m, j=1, \dots, m, k=1, \dots, m$  와  $x_0$  의 근방에 있는 모든  $x$  에 대하여

$$L_{g_j}^{r_i} h_i(x) = 0 \text{ 이며,}$$

(ii)  $m \times m$  행렬

$$B(x) = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_{f_1}^{r_1-1} h_1(x) & \dots & L_{g_m} L_{f_1}^{r_1-1} h_1(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{g_1} L_{f_1}^{r_m-1} h_m(x) & \dots & L_{g_m} L_{f_1}^{r_m-1} h_m(x) \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

의  $x=x_0$  에서의 행렬식의 값이 0이 아니다. 또한, 이 시스템 은 어떤 개집합(open set) D안의 모든 점에 대하여 같은 (벡터) 상대차수를 갖으면 집합 D에 대하여 강한 (벡터) 상대차수를 갖는다고 한다. 본 논문에서는 시스템 (2.1)이 정의구역에 대하여 강한 상대차수를 갖는다고 가정한다. 윗식에서  $L^k$  는 Lie 미분을 k번 반복연산하는 것을 의미한다.

이 상대차수는 다음의 "정합 조건"이 만족되면, 외란과 불확실성으로 인해 변하지 않는다.<sup>[11]</sup> 즉, 모든  $i, j=1, \dots, m$  에 대하여

$$\Delta f(x,t), \Delta g_i(x) \in \text{Ker}[dh_i, dL_{f_1} h_i, \dots, dL_{f_1}^{r_i-2} h_i] \quad (2.4)$$

이 조건은  $\Delta f$  와  $\Delta G$  항이  $r_i$  번 미분으로 미분할 경우  $y_i$  의 미분식에 나타나지 않는다는 것을 보장한다. "정합조건"이 만족될 경우 시스템 (2.1)은  $(\xi, \eta) = T(x)$  의 좌표변환에 의하여 다음과 같이 변환될 수 있다.

$$\xi_1^i = \xi_2^i$$

⋮

$$\xi_{r_i-1}^i = \xi_{r_i}^i$$

$$\xi_{r_i}^i = a_i(\xi, \eta) + \Delta a_i(\xi, \eta)$$

$$+ \sum_{j=1}^{r_i} [b_{ij}(\xi, \eta) + \Delta b_{ij}(\xi, \eta)] u_j$$

(2.5)

for  $i=1, \dots, m$

$$\eta_i = q_i(\xi, \eta) \quad \text{for } i=r_i+1, \dots, m$$

$$y_i = \xi_1^i \quad \text{for } i=1, \dots, m$$

여기서

$$\xi^i = \text{col}[\xi_1^i, \xi_2^i, \dots, \xi_{r_i}^i] \in R^{r_i}$$

for  $i=1, \dots, m$

$$\xi = \text{col}[\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^m] \in R^r$$

$$\eta = \text{col}[\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r}] \in R^{n-r}$$

$$r = \sum_{i=1}^m r_i$$

$$a_i(\xi, \eta) = L_{f_1}^{r_i} h_i(T^{-1}(\xi, \eta))$$

$$\Delta a_i(\xi, \eta) = L_{\Delta f} L_{f_1}^{r_i-1} h_i(T^{-1}(\xi, \eta))$$

for  $i, j=1, \dots, m$

$$b_{ij}(\xi, \eta) = L_{g_j} L_{f_1}^{r_i-1} h_i(T^{-1}(\xi, \eta)),$$

$$\Delta b_{ij}(\xi, \eta) = L_{\Delta g_j} L_{f_1}^{r_i-1} h_i(T^{-1}(\xi, \eta))$$

독립변수  $(\xi, \eta)$ 를 모든  $i, j=1, \dots, m$ 에 대해 압축함으로써 식 (2.5)를 축약하여 표현하면

$$\begin{aligned} \dot{\xi}^{(r)} &= a + \Delta a + (B + \Delta B)u \\ \dot{\eta} &= q \end{aligned} \quad (2.6)$$

여기서

$$\xi^{(r)} = \text{col}[(\xi_1^1)^{(r_1)}, (\xi_1^2)^{(r_2)}, \dots, (\xi_1^m)^{(r_m)}]$$

$$a = \text{col}[a_1, a_2, \dots, a_m]$$

(2.7)

$$\Delta a = \text{col}[\Delta a_1, \Delta a_2, \dots, \Delta a_m]$$

$$\Delta B = [\Delta b_{ij}] \quad i, j=1, \dots, m$$

윗식에서 괄호안의 윗첨자는 시간에 대한 미분의 차수를 나타낸다. 행렬  $B(\xi, \eta)$ 의 역행렬이 존재하므로 식 (2.6)의 공칭부(nominal part)를 선형화하는 제어기를 다음과 같이 정의한다.

$$u = B^{-1}(v-a) \quad (2.8)$$

여기서  $v$ 는 "설계입력(synthetic input)"이며  $v = \text{col}(v_1, \dots, v_m)$  이다. 이 제어기를 대입하여 식 (2.6)을 정리하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\xi}^{(r)} &= v + \Delta a + \Delta B B^{-1}(v-a) \\ \dot{\eta} &= q \end{aligned} \quad (2.9)$$

제어기 (2.8)은 상태벡터  $\eta$ 를 출력벡터에서 관측할 수 없도록 만든다. 여하튼,  $\xi$ 는  $\eta$  방정식에 대한 외부 입력으로 간주할 수 있다. 안정한 추적제어를 위해서는 다음의 방정식으로 표현되는 시스템

$$\dot{\eta} = a(\xi, \eta) \quad (2.10)$$

이 유한입력 유한상태 안정성(bounded-input bounded-state (BIBS) stability)을 가져야 한다. 다음의 제로 방정식(zero dynamics)

$$\dot{\eta} = a(0, \eta) \quad (2.11)$$

의 지수 안정성(exponential stability)이 식 (2.10)의 유한입력 유한상태 안정성의 충분조건이다.<sup>[10]</sup> 이러한 시스템을 상곡선적 최소위상(hyperbolically minimum phase) 시스템이라 하며, 본 논문에서는 이러한 형태의 시스템만을 고려한다.

### III. 슬라이딩 모드 제어기 설계

이제 최소 위상인 입력/출력 선형화된 불확실성 시스템에 대하여 슬라이딩 초평면을 ( $e | \sigma(e) = 0$ )로 정의한다.

$$\sigma(e) = [\sigma_1(e) \ \dots \ \sigma_m(e)]^T \quad (3.1)$$

$$\sigma_i(e) = c_i \dot{e}^i = \sum_{j=1}^i c_{ij} e^j, \quad c_{ii} = 1$$

여기서 모든  $i = 1, \dots, m$ 에 대하여  $c_{ij}$ 는 Hurwitz,  $c_i = [c_{i1}, \dots, c_{in}]$ 이며, 모든  $e$ 에 대하여  $e = \text{col}(e^1, \dots, e^m)$ ,  $\dot{e}^i = [e^1, \dots, e^i]^T = [e^1, \dots, (e^i)^{(n_i)}]^T$ ,  $e^i = y_i - y_{id} = \xi_i^1 - y_{id}$ 이다.

슬라이딩 초평면  $\sigma_i(e) = 0$ 의 양면의 상태궤적이 모두 이 초평면을 향한다면, 상태점이 이 초평면 상에서 머물면서 미끄러지는 슬라이딩 운동이 발생한다.<sup>[2]</sup> 그러므로,  $i$ 번째 슬라이딩 초평면에서 슬라이딩 운동이 일어나기 위한 조건은  $\sigma_i(e) = 0$ 의 근방에서

$$\lim_{\sigma_i \rightarrow 0^-} \dot{\sigma}_i < 0 \quad \text{and} \quad \lim_{\sigma_i \rightarrow 0^+} \dot{\sigma}_i > 0 \quad (3.2)$$

이며, 혹은 보다 간편하게

$$\sigma_i \dot{\sigma}_i < 0 \quad (3.3)$$

와 같이 나타낼 수 있다. 슬라이딩 운동 하에서 시스템은 다음과 같은 조건을 만족한다.

$$\sigma_i(e) = 0 \quad \text{and} \quad \dot{\sigma}_i(e) = 0 \quad (3.4)$$

이 때, 이 시스템은 외란과 변수변화에 대해 불변성을 갖게 된다.

$\sigma$  방정식과 설계입력  $v$ 의 관계는  $\sigma(e)$ 의 시간미분을 취함으로써 얻어낼 수 있다. 즉,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sigma(e) &= e^{(r)} + CE \\ &= v + \Delta a + \Delta BB^{-1}(v-a) - y_d^{(r)} + CE \end{aligned} \quad (3.5)$$

여기서

$$CE = \text{col} \left[ \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} e^j \right] \quad \text{for } i = 1, \dots, m$$

$$y_d^{(r)} = \text{col} \{ (y_d^1)^{(r_1)}, \dots, (y_d^m)^{(r_m)} \}.$$

따라서, 벡터형태로 표현된 조건 (3.3)은 다음과 같이 된다.

$$\sigma^T [v + \Delta a + \Delta BB^{-1}(v-a) - y_d^{(r)} + CE] < 0 \quad (3.6)$$

이에 따라 "설계입력"  $v$ 를 다음과 같은 형태로 제안한다.

$$\begin{aligned} v &= \hat{v} - k \text{sgn}(\sigma), \quad k > 0 \\ &= y_d^{(r)} - CE - k \text{sgn}(\sigma) \end{aligned} \quad (3.7)$$

여기서  $\text{sgn}(\sigma) = \text{col}[\text{sgn}(\sigma_i)]$ ,  $i = 1, \dots, m$ , 이며  $\hat{v}$ 은 시스템 (2.9)의 공칭시스템에 대하여  $\sigma(e)$ 의 시간미분치를 0으로 만드는 부분이다. 식 (3.7)을 (3.6)에 대입함으로써 흡인조건(attractivity condition)은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned} \sigma^T [-k(I + \Delta BB^{-1})\text{sgn}(\sigma) \\ + \Delta BB^{-1}(\hat{v} - a) + \Delta a] < 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

벡터 노름을 이용하여 식 (3.8)을 다시 정리하면

$$\begin{aligned} \|\sigma\| [-k + k \|\Delta BB^{-1}\text{sgn}(\sigma)\| \\ + \|\Delta BB^{-1}(\hat{v} - a)\| + \|\Delta a\|] < 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

과 같이 된다. 또한,  $\sigma^T \text{sgn}(\sigma) \geq \|\sigma\|$  이므로  $-k \sigma^T \text{sgn}(\sigma) \leq -k \|\sigma\|$  이 성립한다.

슬라이딩 초평면의 광역흡인성을 위하여 다음의 조건을 제안한다.

$$\begin{aligned} -k + k \|\Delta BB^{-1}\text{sgn}(\sigma)\| \\ + \|\Delta BB^{-1}(\hat{v} - a)\| + \|\Delta a\| < -\mu \end{aligned} \quad (3.10)$$

여기서  $\mu > 0$  이다. 식 (3.10)을 통하여  $k$ 의 가능구역을 구하면,

$$k \geq \frac{\|\Delta BB^{-1}(\hat{v} - a)\| + \|\Delta a\| + \mu}{1 - \|\Delta BB^{-1}\text{sgn}(\sigma)\|} \quad (3.11)$$

과 같으며, 여기에서는  $\|\Delta BB^{-1}\text{sgn}(\sigma)\| < 1$  이라는 가정이 사용되었다. 또한, 불확실항들이 다음의 조건

$$\|\Delta a\| \leq \|\bar{P}(x)\alpha(x,t)\| \quad (3.12)$$

$$\|\Delta Bx\| \leq \|\bar{P}(x)\beta(x)x\|$$

을 만족하며, 여기서  $P(x)$ 는  $m \times n$  행렬이고, 이 행렬의 열은

모든  $i = 1, \dots, m$ 에 대하여  $P_i(x) = \text{row}(dL_i^{r_i-1}h_i)$ 이며,

$\bar{P}_0 = |P_{ij}|$ 이다. 또한, 모든  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, m$

에 대하여  $\alpha(x,t) = \text{col}[\alpha_i(x,t)]$ 이며  $\beta(x) = [\beta_{ij}(x)]$ 이다.

최종적으로  $\xi$  영역에서의 제어기  $u$ 는

$$u = B^{-1}[y_d^{(r)} - CE - k \text{sgn}(\sigma) - L^T h]. \quad (3.13)$$

와 같이 된다. 참고로, 제어입력의 불연속성용 제거하기 위하여 경계층을 갖는 포화함수를 부호함수 대신 사용할 수 있다.<sup>[10]</sup>

#### IV. 슬라이딩 초평면의 설계법

기존의 슬라이딩 초평면의 설계법에는 여러가지가 있으나, 그 중에서 기하학적 접근방법을 이용한 설계법<sup>[2]</sup>이 가장 일반적으로 적용될 수 있고, 특히 상대차수 3이상의 시스템에 대한 슬라이딩 초평면의 설계에 적합한 것으로 알려져 있다. 그러나, 이제까지의 기하학적 접근방법은 매우 복잡한 계산을 거쳐야만 하는 번거로운 방법이다. 본 논문에서는 제어가능 표준형 시스템(controllable canonical system)에 대하여 새롭고 간편한 슬라이딩 초평면의 설계법을 제안하고, 이 방법과 기하학적 접근방법의 동질성을 입증한다. 먼저, El-Ghezawi 등에 의해 제안된 기하학적 접근방법에 대해 다시 살펴보기로 한다.

공간 S에서 모든  $x \in S$ 에 대해  $x = x_1 + x_2$ ;  $x_1 \in S_1$ ,  $x_2 \in S_2$ 를 만족하는 하위공간(subspace)  $S_1$  과  $S_2$ 로의 분할에 대하여, 선형 연산자(linear operator) P가  $x$ 를  $x_1$ 으로 사상(mapping)할 때, 즉  $Px = x_1$ ,  $Px_2 = 0$  일 때  $S_2$ 를 따른  $S_1$  위로의 투영자(projector)라 한다. 투영자의 유용한 성질 몇 개를 열거하여 보면 다음과 같다.

(i) 선형 연산자 P가 투영자가 될 필요충분조건은 P가 멱등원(idempotent)인 것이다. 즉,

$$P^2 = P. \quad (4.1)$$

(ii) 만약 P가  $S_2$ 를 따른  $S_1$ 위로의 투영자라면,  $(I-P)$ 는  $S_1$ 를 따른  $S_2$ 로의 투영자가 된다.

(iii) 만약 P가  $N(P)$  (null space of P)를 따른  $R(P)$  (range of P) 위로의 투영자라면,  $(I-P)$ 는  $R(P)$ 를 따른  $N(P)$ 로의 투영자가 된다.

(iv) 모든  $x \in R(P)$ 에 대해서 다음의 성질들이 성립한다.

$$Px = x, \quad (I-P)x = 0 \quad (4.2)$$

$$\text{rank}(P) = \text{trace}(P), \quad \text{rank}(I-P) = n - \text{trace}(P) \quad (4.3)$$

$$R(P) = N(I-P), \quad N(P) = R(I-P) \quad (4.4)$$

이제 시스템 (2.9)의 공칭 시스템에 제어기 (3.13)을 대입하여 오차상태공간에서 표현하면

$$\dot{e}^i = \bar{A}_i e^i + \bar{b}_i (-k_i \text{sgn}(\sigma_i)), \quad i = 1, \dots, m \quad (4.5)$$

여기서

$$\bar{A}_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & -c_{i1} & -c_{i2} & \dots & -c_{i(r_i)} \end{bmatrix}, \quad \bar{b}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

그리고  $\bar{A}_i \in R^{r_i \times r_i}$ ,  $\bar{b}_i \in R^{r_i}$ 이다. 한편,  $(\bar{A}_i, \bar{b}_i)$ 쌍이 제어가능하다는 것은 매우 확실하다.

$P_i = \bar{b}_i (c_i \bar{b}_i)^{-1} c_i$ 로 정의하면  $P_i^2 = P_i$ 이 된다. 즉  $P_i$ 는 투영자가 되며  $\text{rank}(P_i) = 1$ 이다. 이것은  $c_i \bar{b}_i$ 가 0이 아니기 때문이다. 따라서  $(I_{r_i} - P_i)^2 = (I_{r_i} - P_i)$ 이며  $\text{rank}(I_{r_i} - P_i) = r_i - 1$ , 여기서  $I_{r_i}$ 는  $r_i \times r_i$  항등행렬이다. 그러므로 행렬

$[I_n - P_i] \bar{A}$ 는 적어도  $r_i - 1$ 개의 0이 아닌 고유치를 갖게 된다. 우리의 목적은 다음의 행렬

$$(I_{r_i} - P_i) \bar{A}_i = \bar{A}_i - \bar{b}_i [(c_i \bar{b}_i)^{-1} c_i \bar{A}_i] \quad (4.6)$$

이  $r_i - 1$ 개의 미리 설정된 요구 고유치를 갖도록 하는  $c_i$ 를 설계하는 것이다. 주어진 고유치에 따른 고유벡터  $w_1^i, \dots, w_{r_i-1}^i$ 는 다음과 같은 성질을 만족한다.

$$\{ \bar{A}_i - \bar{b}_i [(c_i \bar{b}_i)^{-1} c_i \bar{A}_i] \} W_i = W_i J_i \quad (4.7)$$

여기서

$$W_i = [w_1^i, \dots, w_{r_i-1}^i]$$

이고 행렬  $J_i$ 는 주어진 고유치를 갖는 Jordan 표준형이다. 식 (4.7)은  $\bar{A}_i W_i - W_i J_i$ 의 열들이 B의 치역에 속한다는 것을 의미한다. 즉,

$$\text{col}(\bar{A}_i W_i - W_i J_i) \in \text{Range}(\bar{b}_i). \quad (4.8)$$

또한  $c_i$ 와  $W_i$ 사이에는 다음의 관계가 성립한다.

$$c_i W_i = 0 \quad (4.9)$$

더 구체적인 방법은 참고문헌 [12]를 참고하기 바란다.

이제 주어진 고유치의 값이  $\lambda$ 로 동일한 경우에 대하여 고려해 보자. 이 경우에  $W_i$ 는 쉽게 구해질 수 있으며 각 고유벡터의 첫번째 요소  $(w_j^i)_1 = \gamma_j$ 라고 하면,  $W_i$ 의 첫번째 열벡터와 k행 j열의 요소는 각각 다음과 같은 성질을 갖는다.

$$w_1^i = \gamma_1 [1 \quad \lambda \quad \lambda^2 \quad \dots \quad \lambda^{r_i-1}]^T \quad (4.10)$$

$$(w_j^i)_k = (w_{j-1}^i)_{k-1} + \lambda (w_j^i)_{k-1}$$

여기서  $j = 2, \dots, r_i-1$ 이다. 따라서, 다음의 정리에 의하여 주어진 고유치로부터 복잡한 계산과정을 거치지 않고 곧바로  $c_i$ 를 구할 수 있다.

**정리** 제어가능 표준형인 시스템에 대하여, 주어진 모든 고유치의 값이  $\lambda$ 로 동일할 경우  $c_i = [(-\lambda)^{r_i-1} \quad (-\lambda)^{r_i-2} \quad \left(\frac{n}{1}\right) \dots \quad (-\lambda) \left(\frac{n}{n-1}\right) \quad 1]$ 로 정의하면 이  $c_i$ 는 식 (4.9)를 만족한다.

정리의 증명은 지면관계상 생략한다. 위의 정리로부터 구한  $c_i$ 가 기하학적 접근방법에서 요구되는 조건을 만족하는 것을 알 수 있다. 이는 다시말하여, 만일 슬라이딩 운동을 규정하는 시스템의 요구 고유치가 동일하게 주어졌다면 매우 간단한 방법으로 높은 차수의 시스템에 대한 안정된 초평면을 설계할 수 있음을 의미한다.

#### V. 예 제

다음에 주어진 예제를 살펴보자.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 + x_2^2 \\ x_3 - x_1 x_4 + x_4 x_5 \\ x_2 x_4 + x_1 x_5 - x_5^2 \\ x_5 \\ x_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta f_1 \\ \vdots \\ \Delta f_5 \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ \cos(x_1 - x_5) & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta g_{11} & \Delta g_{12} \\ \vdots & \vdots \\ \Delta g_{51} & \Delta g_{52} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$y = [h_1(x), h_2(x)]^T = [x_1 - x_5, x_4]^T$$

여기서  $|\Delta f_i|$  와  $|\Delta g_{ij}|$  는  $\alpha_i$  와  $\beta_{ij}$  에 의해서 각각 한정되어 있다. 두 개의 함수  $h_1(x)$  와  $h_2(x)$  는 다음의 조건을 만족한다.

$$\begin{aligned} L_{g_i} h_1(x) &= L_{g_i} h_1(x) = 0 \\ L_{g_i} L_f h_1(x) &= L_{g_i} L_f h_1(x) = 0 \\ L_{g_i} h_2(x) &= L_{g_i} h_2(x) = 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

또한 행렬

$$\begin{aligned} B(x) &= \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^2 h_1(x) & L_{g_2} L_f^2 h_1(x) \\ L_{g_1} L_f h_2(x) & L_{g_2} L_f h_2(x) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(x_1 - x_5) & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.3)$$

$x=0$ 에서의 행렬식이 0이 아니다. 따라서 출력  $y_1 = h_1(x)$  과  $y_2 = h_2(x)$  를 갖는 시스템 (5.1)은 상대차수  $\{r_1, r_2\} = \{3, 2\}$  를 가지며  $r_1 + r_2 = 5 = n$  이 된다. 만약 위의 시스템이 "정합조건"을 만족한다면 좌표변환  $\xi = T(x)$ 에 의해 시스템 (5.1)이 다음과 같은 형태로 변환된다.

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1^1 &= \xi_2^1 \\ \dot{\xi}_2^1 &= \xi_3^1 \\ \dot{\xi}_3^1 &= a_1(\xi) + \Delta a_1(\xi) + \sum_{j=1}^2 [b_{1j}(\xi) + \Delta b_{1j}(\xi)] u_j \\ \dot{\xi}_1^2 &= \xi_2^2 \\ \dot{\xi}_2^2 &= a_2(\xi) + \Delta a_2(\xi) + \sum_{j=1}^2 [b_{2j}(\xi) + \Delta b_{2j}(\xi)] u_j \\ y_i &= \xi_i^i \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (5.4)$$

여기서

$$\begin{aligned} \xi^1 &= \text{col}[\xi_1^1, \xi_2^1, \xi_3^1], \quad \xi^2 = \text{col}[\xi_1^2, \xi_2^2] \\ \xi &= \text{col}[\xi^1, \xi^2] \in R^r \end{aligned}$$

$$a_i(\xi) = L_f^i h_i(T^{-1}(\xi))$$

$$\Delta a_i(\xi) = L_{\Delta f} L_f^{i-1} h_i(T^{-1}(\xi))$$

$$b_{ij}(\xi) = L_{g_j} L_f^{i-1} h_i(T^{-1}(\xi))$$

$$\Delta b_{ij}(\xi) = L_{\Delta g_{ij}} L_f^{i-1} h_i(T^{-1}(\xi)), \quad i = 1, 2$$

따라서,  $b_{11}(\xi) = \cos(x_1 - x_5) = \cos(\xi_1^1)$ ,  $b_{12}(\xi) = 1$ ,

$$b_{21}(\xi) = 0, \quad b_{22}(\xi) = 1 \text{이며 } a_1(\xi) = 0, \quad a_2(\xi) = x_2^2 = (\xi_1^2)^2$$

이다. 이제 식 (5.1)에 제어기 (3.13)을 대입하여 오차 상태공간에서 표현하면 다음과 같다.

$$e^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -c_{11} & -c_{12} \end{bmatrix} e^1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} (-k_1 \text{sgn}(\sigma_1)) \quad (5.5)$$

$$e^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -c_{21} \end{bmatrix} e^2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (-k_2 \text{sgn}(\sigma_2))$$

만약  $e^1$ 에 대해 -3의 두개의 고유치가  $e^2$ 에 대해서는 -4의 고유치가 각각 주어졌다면, 앞 장의 정리에 의해  $c_i$ 는 다음과 같이 된다.

$$c_1 = [9 \ 3 \ 1], \quad c_2 = [4 \ 1] \quad (5.6)$$

시뮬레이션을 위하여 다음과 같은 값들이 사용되었다.

$$y_d^1(t) = 0.1 \cos(t)$$

$$y_d^2(t) = 0.1 \cos(0.7t)$$

$$\Delta f_1 = 0.3 \sin(3t) \quad (5.7)$$

$$\Delta g_{ij} = 0.1 \sin(8t), \quad i, j = 1, \dots, 5$$

$$\mu = 0.1$$

Fig 1은 출력  $y_1$ 과  $y_2$ 를 나타내며, Fig 2는  $u_1(t)$ 와  $u_2(t)$ 를 나타낸다. 시뮬레이션 결과를 통하여 알 수 있듯이 이러한 방법을 통하여 비선형 불확실성 시스템에 대한 강건하며 효과적인 슬라이딩 모드 추적제어가 가능하다.

## VI. 결론

본 연구에서는 일반 비선형 불확실성 시스템에 대하여 가변구조 제어이론을 통한 강건한 추적제어를 수행하였다. 먼저 일반 비선형 시스템에 대해 입력/출력 선형화하였고, 이에 대한 가변 구조 제어기를 설계하였다. 새롭게 제안된 설계법을 이용하여 상대차수 3 이상의 비선형 시스템에 대해서도 간편하게 슬라이딩 초평면을 설계할 수 있었다. 마지막으로 시뮬레이션을 통하여 제안된 방법의 효율성과 우수성을 입증하였다.

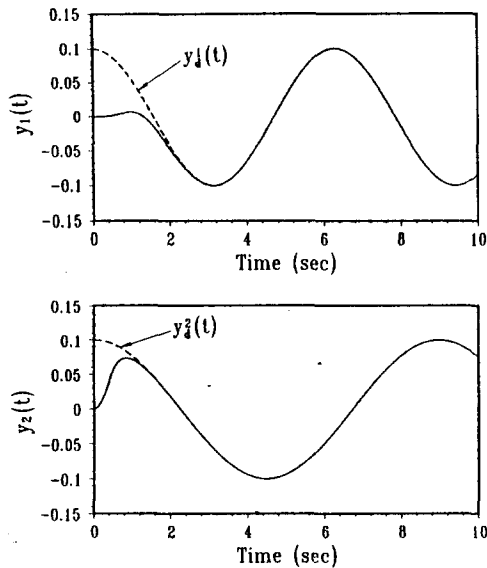


Fig. 1 Controlled Responses

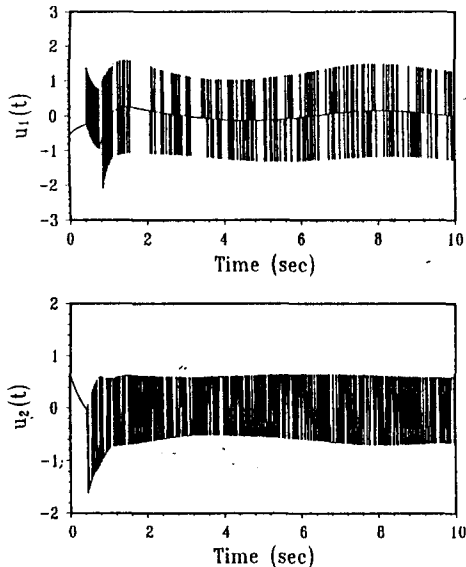


Fig. 2 Control histories

## REFERENCES

- [1] A. F. Fillipov, "Differential equations with discontinuous right-hand side," *Am. math. Soc. Trans.*, vol. 42, pp. 199-231, 1964.
- [2] V. I. Utkin, *Sliding Modes and their Application in Variable Structure Systems*, Moscow: MIR Publishers, 1974.
- [3] K. K. D. Young, "Controller design for a manipulator using theory of variable structure systems," *IEEE Transactions on System, Man and Cybernetics*, vol. SMC-8, pp. 101-109, 1978.
- [4] J. J. E. Slotine and S. S. Sastry, "Tracking control of nonlinear systems using sliding surfaces with application to robot manipulators," *International Journal of Control*, vol. 38, pp. 465-492, 1983.
- [5] S. Hui, and S. H. Zak, "Robust control synthesis for uncertain/nonlinear dynamical systems," *Automatica*, vol. 28, pp. 289-298, 1992.
- [6] A. Isidori, *Nonlinear Control Systems, An Introduction*, New York : Springer-Verlag, 1985.
- [7] S. S. Sastry and A. Isidori, "Adaptive control of linearizable system," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-34, pp. 1123-1131, 1989.
- [8] B. R. Fernandez and J. K. Hedrick, 1987, "Control of multivariable nonlinear systems by the sliding mode method," *International Journal of Control*, vol. 46, pp. 1019-1040, 1987.
- [9] H. Sira-Ramirez, "Sliding regimes in general non-linear systems: a relative degree approach," *International Journal of Control*, vol. 50, pp. 1487-1506, 1989.
- [10] S. Behtash, "Robust output tracking for non-linear systems," *International Journal of Control*, vol. 51, pp. 1381-1407, 1990.
- [11] H. Elmali, and N. Olgac, "Robust output tracking control of nonlinear MIMO systems via sliding mode technique," *Automatica*, vol. 28, pp. 145-151, 1992.
- [12] O. M. E. El-Ghezawi, S. I. Zonober, and S. A. Billings, "Analysis and design of variable structure systems using a geometric approach," *International Journal of Control*, vol. 38, pp. 657-671, 1983.