

스위칭 다이내믹을 이용한 단순화된 극점 배치 기법의 개발

박귀태*, 김동식**, 서삼준*, 서호준*

*고려대학교 공과대학 전기공학과, **순천향대학교 공과대학 제어계측공학과

Development of a Simplified Pole-Placement Design using Switching Dynamics

Gwi-Tae Park*, Dong-Sik Kim**, SampJun Seo*, Ho-Joon Seo*

*Dept. of Electrical Engr., Korea University

** Dept. of Control and Instrumentation Engr. of Soonchunhyang University

ABSTRACT

A simplified pole-placement design method is developed by analysing dynamic characteristics of the switching dynamics. Unlike the design procedure of conventional pole-placement, in the proposed method, overall state-space is directly decomposed into two invariant subspaces by the projection operator which is defined in the equivalent systems, and then the closed-loop poles are assigned to each subspace independently. Hence, computations for state-feedback gain matrix are easy and simple.

1. 서론

다중 입력을 가진 선형 시불변 시스템에 대한 극점 배치 기법은 주어진 시스템이 가제어(Controllable) 하다는 가정 하에 여러가지 다양한 형태로 연구가 진행되어 왔다 [1-3]. 그런데, 기존의 극점 배치 기법에 의한 상태 궤환 제어기의 설계 과정은 전체 상태 공간에서 수행되기 때문에 다중 입력 시스템에 있어서 설계자가 원하는 위치에 극점을 가지도록 하는 상태 궤환 이득 행렬을 결정하기 위해서는 상당히 많은 계산 시간이 요구될 뿐만 아니라 컴퓨터를 이용한 수치해의 결정상에 많은 난점들을 가진다[4-5]. 따라서, 본 연구에서는 이러한 난점을 극복하기 위해, 슬라이딩 모드시 에 시스템을 지배하는 방정식으로 부터 정의된 투영 연산자의 적합 분해(Direct-Sum Decomposition) 를 이용하여 전체 상태 공간을 두개의 낮은 차원을 가지는 부분 벡터 공간으로 분해한 다음, 각 부분 벡터 공간에서 설계자가 원하는 극점을 가지도록 하는 상태 궤환 이득 행렬을 제안된 스위칭 다이내믹의 개념으로부터 독립적으로 결정하였다.

결국, 제안된 단순화 된 극점 배치 기법은 기존의 극점 배치 기법과는 달리 분해된 각 부분 벡터 공간에서 독립적으로 행해지기 때문에 상태 궤환 이득 행렬에 대한 계산 시간이 절감될 수 있다는 장점을 지닌다. 또한, 제안된 기법

은 입력의 갯수 만큼 시스템의 차수 감소효과를 나타내기 때문에 다중입력 시스템이나 대규모 시스템의 제어에 대단히 유용하다. 제안된 단순화 된 극점 배치 기법을 몇가지 간단한 연속 및 이산 시간 다변수 시스템들에 대해 각각 적용한 결과 제안된 기법의 유효성을 입증하였다.

2. 연속시간 스위칭 다이내믹을 이용한 극점배치 기법

2.1 상태 공간의 적합 분해

다음과 같은 연속 시간 선형 다변수 시스템을 고려한다.

$$\dot{X} = AX + BU, \quad X(t_0) = X_0 \quad (2.1)$$

여기서 $X \in \mathbb{R}^n$ 은 상태 벡터이며 $U \in \mathbb{R}^m$ 은 제어 입력 벡터이다. 스위칭 평면을 식(2.2)으로 정의하면 슬라이딩 모드시 시스템을 지배하는 동특성 방정식은 식(2.3)으로 표현된다.

$$S = CX = 0, \quad G \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad (2.2)$$

$$\dot{X} = [I_n - B(GB)^{-1}G] AX = A_{00}X \quad (2.3)$$

식 (2.3)에서 $P = B(GB)^{-1}G$ 로 정의하면, P 는 Rank 가 m 인 투영 연산자가 되며, 또한 $I_n - P$ 도 Rank 가 $n-m$ 인 투영 연산자가 된다.

따라서, 투영 연산자 $I_n - P$ 는 A 의 모든 열벡터들을 G 의 Null-Space, $N(G)$, 에 대응시키기 때문에 등가 시스템에서의 A_{00} 는 기껏해야 $n-m$ 개의 영이 아닌 고유치만을 가지게 된다. 또한 식 (2.3)으로 부터 다음의 관계가 성립한다.

$$A_{00} = (I_n - P) A \quad (2.4)$$

식 (2.4)의 양변에 $I_n - P$ 를 곱하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} (I_n - P) A_{00} &= (I_n - P)^2 A \\ &= (I_n - P) A = A_{00} \end{aligned} \quad (2.5)$$

식 (2.5)로 부터 A_{00} 는 투영 연산자 $I_n - P$ 에 대해 불변이며, 이것은 A_{00} 의 각각의 열벡터들이 $I_n - P$ 의 Range-Space 에 속한다는 것을 의미한다. 그러므로, 식 (2.5)로 부터 다음의 관계식이 성립한다.

$$P A_{0q} = 0 \quad (2.6)$$

n 차원 상태 공간 Σ_0 를 위에서 정의한 투영 연산자 P 를 이용하여 다음과 같이 두개의 부분 벡터 공간으로 직합 분해할 수 있다[6].

$$\Sigma_0 = R(P) \oplus N(P) = R(P) \oplus R(I_n - P) \quad (2.7a)$$

식 (2.7a)의 우변을 살펴보면 $R(P)$ 는 $R(B)$ 이고, $N(P)$ 는 $N(G)$ 와 동일하므로 식 (2.7a)는 결국 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\Sigma_0 = R(B) \oplus N(G) \quad (2.7b)$$

상태 공간을 직합 분해하는 목적은 전체 상태 공간에서 수행해야 하는 일련의 매우 복잡하고 어려운 작업들을 두개의 낮은 차원의 부분 벡터 공간에서 독립적으로 수행함으로써 작업의 간편성을 도모하고자 하는 것이다. 다음 절에서는 연속 시간 스위칭 다이내믹(Continuous-time Switching Dynamics : CSD)을 이용한 슬라이딩 모드 제어시스템의 설계에 대하여 기술한다.

2.2 CSD 를 이용한 슬라이딩 모드 제어시스템의 설계

스위칭 평면에서 슬라이딩 모드를 발생하기 위해서는 슬라이딩 모드의 존재 조건인 식(2.8)이 만족되어야 한다[7].

$$S(X)T^*S(X) < 0 \quad (2.8)$$

본 절에서는 다음과 같은 CSD 즉, G 의 Range-Space 에서의 동특성 방정식을 미리 지정함으로써 슬라이딩 모드를 얻을 수 있는 새로운 방법을 제시한다.

$$\dot{S} = -\Gamma S \quad (2.9)$$

여기서 Γ 는 식 (2.10)으로 정의되는 Positive Definite 대각 행렬이다.

$$\Gamma = \text{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m), \quad \gamma_i > 0 \quad (2.10)$$

$$i=1, 2, \dots, m$$

식 (2.9)는 스위칭 함수의 1 차 미분 방정식으로 그 해는 다음과 같다.

$$S(t) = \exp[-\Gamma(t-t_0)] S(t_0) \quad (2.11)$$

스위칭 함수값 S 는 지수 함수적으로 0 에 접근하게 되며, 그 수렴 속도는 Γ 에 따라 정해진다. 한편, 식 (2.9)와 같이 정의된 CSD 는 슬라이딩 모드의 존재 조건인 식(2.8) 을 항상 만족함을 알 수 있다. 즉,

$$S^T \dot{S} = -S^T \Gamma S < 0 \quad \text{만일 } S \neq 0 \quad (2.12)$$

전형적인 가변구조 제어기법과는 달리 본 절에서는 슬라이딩 모드를 얻을 수 있도록 먼저, CSD 를 설정하고 이를 이용하여 제어 입력을 결정하는 방법을 제안하였으며 제어기 설계 절차는 다음과 같다.

먼저, 식(2.1)의 시스템에 대하여 식 (2.2)를 미분하여 식 (2.9)를 대입하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\dot{S} = G \dot{X} = G (AX + BU) = -\Gamma S \quad (2.13)$$

윗 식을 제어 입력 U 에 대해 정리하면 다음과 같다.

$$U = -(GB)^{-1} [GAX + \Gamma S] = U_{0q} + U_{nd} \quad (2.14)$$

여기서 U_{0q} 와 U_{nd} 는 각각 다음과 같이 정의된다.

$$U_{0q} = -(GB)^{-1}GAX \quad (2.15a)$$

$$U_{nd} = -(GB)^{-1}\Gamma S = -(GB)^{-1}\Gamma GX \quad (2.15b)$$

식 (2.14)의 제어 입력을 식 (2.1)의 시스템에 인가하면 다음과 같은 페루프 방정식이 얻어진다.

$$\dot{X} = [A_{0q} - B(GB)^{-1}\Gamma G] X = A_0 X \quad (2.16)$$

여기서 A_0 와 A_{0q} 는 각각 다음과 같이 정의된다.

$$A_0 = A_{0q} - B(GB)^{-1}\Gamma G \quad (2.17)$$

$$A_{0q} = [I - B(GB)^{-1}G] A \quad (2.18)$$

다음의 정리 2.1 은 식(2.16)의 페루프 시스템의 동특성이 스위칭 표면행렬 G 의 Range-Space 동특성과 Null-Space 동특성으로 분리된다는 것을 나타낸다.

■ 정리 2.1

식 (2.1)의 시스템에 식 (2.14)의 제어입력을 인가한 경우, 식 (2.16)의 페루프 시스템의 고유치는 다음과 같이 결정된다.

$$\sigma(A_0) = \{ \lambda : \det(\lambda I_{n-m} - J) \det(\lambda I_m + \Gamma) = 0 \} \quad (2.19)$$

여기서 $\sigma(A_0)$ 는 행렬 A_0 의 스펙트럼이며 J 는 식(2.3) 과 같이 스위칭 표면행렬 G 에 의해서 결정되는 A_{0q} 의 영이 아닌 고유치와 동일한 고유치를 가지는 $(n-m) \times (n-m)$ Jordan 행렬이며, Γ 는 식 (2.10)과 같이 결정되는 $m \times m$ 대각 행렬이다.

□ 증명 : 페루프 시스템인 식 (2.16)을 식 (2.20)의 정칙 변환 행렬 M 을 이용하여 새로운 좌표계로 변환한다.

$$X^{NEW} = \begin{bmatrix} W^* \\ G \end{bmatrix} X \quad (2.20)$$

여기서, $W \in R^{n \times (n-m)}$ 는 A_{0q} 의 고유 벡터로 구성되는 행렬이며 W^* 는 W 의 유사 역행렬(Pseudo-inverse), G 는 스위칭 표면행렬이다.

M 의 역행렬을 구하기 위해 다음과 같이 R_1 과 R_2 로 구성된 행렬 M^{-1} 를 정의한다.

$$M^{-1} = [R_1 : R_2] \quad (2.21)$$

$M^{-1} = I_n$ 의 관계식으로 부터 다음을 얻을 수 있다.

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} W^* \\ G \end{bmatrix} [R_1 : R_2]$$

$$= \begin{bmatrix} W^*R_1 & W^*R_2 \\ GR_1 & GR_2 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

식 (2.22) 는 단위 행렬이 되어야 하므로 다음이 성립한다.

$$W^*R_1 = I_{n-m} \quad (2.23a)$$

$$W^*R_2 = 0 \quad (2.23b)$$

$$GR_1 = 0 \quad (2.23c)$$

$$GR_2 = I_m \quad (2.24d)$$

위의 관계가 만족되도록 R_1 과 R_2 를 결정하면 다음과 같다.

$$R_1 = W \quad (2.24a)$$

$$R_2 = B \quad (2.24b)$$

그러므로, M 의 역행렬은 다음과 같이 결정된다.

$$M^{-1} = [W : B] \quad (2.25)$$

정치 변환 행렬 M 에 의해 상태 공간의 기저 벡터를 다음과 같이 정의한다.

$$X^{NEW} = M X \quad (2.26)$$

위의 정치 변환을 이용하여 페루프 시스템 (2.16)을 새로운 좌표계로 다시 표현하면 다음과 같다.

$$\dot{X}^{NEW} = M [A_{0q} - B(GB)^{-1}\Gamma G] M^{-1} X^{NEW} \quad (2.27)$$

$$= \begin{bmatrix} W^*[A_{0q} - B(GB)^{-1}\Gamma G]W & W^*[A_{0q} - B(GB)^{-1}\Gamma G]B \\ G[A_{0q} - B(GB)^{-1}\Gamma G]W & G[A_{0q} - B(GB)^{-1}\Gamma G]B \end{bmatrix} X^{NEW}$$

유사 역행렬의 정의와 식 (2.23)을 이용하면 식(2.27)의 페루프 시스템은 새로운 좌표계에서 다음과 같은 단순화된 상태 공간 모델로 표현된다.

$$\dot{X}^{NEW} = \begin{bmatrix} W^*AW & W^*AB \\ 0 & -\Gamma \end{bmatrix} X^{NEW} \quad (2.28)$$

따라서, 페루프 시스템의 고유치는 식 (2.28)로 부터 다음과 같이 결정된다.

$$\det(\lambda I_{n-m} - W^*AW) \det(\lambda I_m + \Gamma) = 0 \quad (2.29)$$

한편, $W^*AW = J$ 이므로 페루프 시스템의 고유치는 다음의 방정식으로 부터 결정된다.

$$\det(\lambda I_{n-m} - J) \det(\lambda I_m + \Gamma) = 0 \quad (2.30)$$

증명 끝 ■

결국, 전체 페루프 시스템의 고유치는 G 의 Null-Space 의 동특성을 결정하는 Jordan 행렬 J 와 G 의 Range-Space 의 동특성을 결정하는 대각 행렬 Γ 에 의해 결정됨을 알 수 있다. J 와 Γ 는 설계자가 임의로 선정하는 설계 인자 이므로 전체 페루프 계통의 안정도는 항상 보장받을 수 있다. 설계상 G 의 Range-Space 의 동특성은 빠른 모드가 되도록 하고, Null-Space 의 동특성은 느린 모드가 되도록 설계한다.

2.3 CSD 를 이용한 상태궤환 이득행렬의 결정

정리 2.1에서 전체 페루프 시스템이 $N(G)$ 및 $R(B)$ 에 의해 지배된다는 사실에 착안하여, $N(G)$ 및 $R(B)$ 에서 설계자가 원하는 극점을 각각 다음과 같이 설정한다.

$$\{ \underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_{n-m}}_{N(G) \text{에 대한 극점}} ; \underbrace{-\gamma_1, \dots, -\gamma_m}_{R(B) \text{에 대한 극점}} \} \quad (2.31)$$

$N(G)$ 에 대한 극점 $R(B)$ 에 대한 극점

$$\lambda_i < 0, \quad \gamma_j > 0 \quad i=1,2,\dots,n-m \quad j=1,2,\dots,m$$

CSD 의 관계가 항상 유지되도록 해주는 제어입력 U 는 앞에서 기술한 바와 같이 다음과 같이 결정된다.

$$U = -(K_n + K_r) X = -KX \quad (2.32)$$

$$K = K_n + K_r$$

여기서 K_n 및 K_r 은 각각 $N(G)$ 와 $R(B)$ 에서의 상태 궤환 이득 행렬로서 다음과 같이 정의된다.

$$K_n = (GB)^{-1}GA \quad (2.33a)$$

$$K_r = (GB)^{-1}\Gamma G \quad (2.33b)$$

따라서, 식 (2.33)으로 부터 K_n 과 K_r 을 결정하기 위해서는 스위칭 포면행렬 G 와 CSD의 동특성을 결정하는 행렬 Γ 를 선정해야 한다. 그런데, Γ 는 식 (2.10)이 만족되도록 설계자가 임의로 선정하면 되므로 결국, 전체 상태 궤환 이득 행렬 K 를 결정하는 문제는 식(2.3)의 등가 시스템이 미리 설정된 $n-m$ 개의 고유치 $\{ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-m} \}$ 를 가지도록 스위칭 포면 행렬 G 를 결정하는 문제로 귀착된다.

스위칭 포면 행렬은 참고 문헌[6]로 부터 기하학적으로 결정될 수 있으며 이를 요약하면 다음과 같다.

■ 스위칭 포면행렬 G 의 결정 알고리즘

- ① 설계자가 원하는 $n-m$ 개의 고유치 $\{ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-m} \}$ 를 설정한다.
- ② 행렬 H 의 값을 설계목적에 따라 적절하게 선정한다.
- ③ 행렬 방정식 $AW - WJ = BH$ 로 부터 페루프 고유벡터 행렬 W 를 결정한다.
- ④ W 의 소멸 연산자 W^0 로 부터 $\Lambda = H(W^0B)^{-1}$ 를 결정한다.
- ⑤ 스위칭 포면 행렬 $G = H(W^0B)^{-1}W^0$ 를 결정한다.

그러므로 위의 스위칭 포면행렬 G 의 결정 알고리즘으로 부터 상태궤환 이득행렬들은 다음과 같이 결정 된다.

$$K_n = (W^0B)^{-1}W^0A \quad (2.34a)$$

$$K_r = \Gamma (W^0B)^{-1}W^0 \quad (2.34b)$$

그림 2.1 에 제안된 CSD 를 이용한 단순화된 극점 배치 기법을 그림으로 도시 하였다.

3. 이산시간 스위칭 다이내믹을 이용한 극점배치 기법

3.1 상태 공간의 직합 분해

다음과 같은 이산 시간 선형 다변수 시스템을 고려한다.

$$X_{k+1} = AX_k + BU_k, \quad X_{k0} = X_0 \quad (3.1)$$

여기서 $X_k \in \mathbb{R}^n$ 는 상태 벡터이며 $U_k \in \mathbb{R}^m$ 는 제어 입력 벡터이다. 스위칭 평면을 식 (3.2)로 정의하면 슬라이딩 모드 시스템에 지배하는 동특성 방정식은 식(3.3)으로 표현된다.

$$S_k = GX_k, \quad G \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad (3.2)$$

$$X_{k+1} = [A - B(GB)^{-1}G(A-I)] X_k = A_{0q}' X_k \quad (3.3)$$

식 (3.3)에서 $P = B(GB)^{-1}G$ 로 정의하면, P 는 Rank 가 m 인 투영 연산자이며 $I_n - P$ 도 Rank 가 $n-m$ 인 투영 연산자가 된다. 식 (3.3)으로부터 다음의 관계가 성립한다.

$$A_{0q}' = (I - P)A + P \quad (3.4)$$

식 (3.4)의 양변에 P 를 곱하여 정리하면 다음의 관계식을 얻을 수 있다.

$$P(I_n - A_{0q}') = 0 \quad (3.5)$$

결국 식 (3.5)에서 투영 연산자 P 는 $I_n - A_{0q}'$ 의 각 열벡터들을 P 의 Null-Space 에 대응시키며, 이 점이 식 (2.6)으로 주어지는 연속시간 슬라이딩 모드의 관계식과 다른점이다. 다시 말하면, 연속 시간 슬라이딩 모드 동특성 방정식에서 정의되는 투영 연산자는 등가 시스템 행렬 A_{0q} 의 각 열벡터들을 P 의 Null-Space 에 대응시키는데 반해서, 이산 시간 슬라이딩 모드 동특성 방정식에서 정의되는 투영 연산자 P 는 등가 시스템 행렬 A_{0q}' 와 단위 행렬 I_n 의 차로 구성되는 행렬 즉, $I_n - A_{0q}'$ 의 각 열벡터들을 P 의 Null-Space 에 대응시킨다.

2.1 절에서와 마찬가지로 n 차원 상태 공간 Σ_d 를 투영 연산자 P 를 이용하면 식 (2.7)과 마찬가지로 적합 분해할 수 있다. 즉,

$$\Sigma_d = R(B) \oplus N(G) \quad (3.6)$$

다음 절에서는 이산 시간 스위칭 다이내믹(Discrete-time Switching Dynamics : DSD)을 이용한 슬라이딩 모드 제어 시스템의 설계에 대하여 기술한다.

3.2 DSD 를 이용한 슬라이딩 모드 제어 시스템의 설계

본 절에서는 2 장에서 제안된 CSD 를 이산시간 다변수 시스템에 확장 적용하기 위하여 슬라이딩 모드의 존재를 보장하는 이산 시간 스위칭 다이내믹을 제안하였다.

3.2.1 DSD 의 동특성

먼저, 식 (3.1)로 표현되는 이산 시간 다변수 시스템에 대하여 항상 슬라이딩 모드의 존재를 보장받기 위해서는 식 (3.7)로 표현되는 Lyapunov 함수 $V(S_k)$ 를 정의하여 그 차분값이 항상 음이 되도록 만들어 주면 된다[8].

$$V(S_k) = S_k^T S_k \quad (3.7)$$

위에서 정의한 Lyapunov 함수의 차분값 $\Delta V(S_k)$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Delta V(S_k) &= V(S_{k+1}) - V(S_k) \\ &= S_{k+1}^T S_{k+1} - S_k^T S_k \end{aligned} \quad (3.8)$$

식 (3.8)의 우변은, 만일 식 (3.9)의 관계가 항상 만족되도록 대각행렬 $\Gamma' = \text{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m)$ 를 적절히 선정하면 음의 값이 됨을 보장할 수 있다.

$$\Delta S_k = S_{k+1} - S_k = -\Gamma' S_k \quad (3.9)$$

식 (3.9)의 관계를 식 (3.8)에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Delta V(S_k) &= S_{k+1}^T S_{k+1} - S_k^T S_k \\ &= S_k^T (I - \Gamma')^2 S_k - S_k^T S_k \\ &= S_k^T (\Gamma'^2 - 2\Gamma') S_k \\ &= \sum_{i=1}^m (\gamma_i^2 - 2\gamma_i) S_{ki} < 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

여기서 S_{ki} 는 S_k 의 i 번째 성분을 나타낸다. 식 (3.10)이 항상 음의 값이 되기 위해서는 Γ' 를 다음의 조건이 만족되도록 선정해야 한다.

$$0 < \gamma_i < 2 \quad (3.11)$$

결국 2 장에서의 CSD 에서는 행렬 Γ 의 원소가 양의 값이 되면 충분했으나, 이산 시간 스위칭 다이내믹에서는 행렬 Γ' 의 원소를 식 (3.11)이 만족되도록 선정해야 한다는 점이 다르다.

식 (3.9)는 1 차 차분 방정식(Difference Equation)으로 그 해는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} S_k &= (I - \Gamma')^{k-k_0} S_0 \quad \forall k \geq k_0 \\ S_0 &= S_{k_0} = GX_{k_0} \end{aligned} \quad (3.12)$$

식 (3.12)에서 행렬 $I - \Gamma'$ 의 i 번째 대각 원소 $1 - \gamma_i$ 의 절댓값은 1 보다 작게 선정한다면 S_k 는 지수 함수적으로 0 에 접근하게 되며, 그 수렴 속도는 Γ' 에 의해 결정된다. 식 (3.9)로 정의된 관계식을 2 장에서의 연속시간 스위칭 다이내믹과 대응되어 이산시간 스위칭 다이내믹이라 부르기로 한다.

3.2.2 DSD 를 이용한 슬라이딩 모드 제어기의 설계

먼저 식 (3.1)로 표현되는 이산시간 다변수 시스템은 다음과 같다.

$$X_{k+1} = AX_k + BU_k, \quad X_{k_0} = X_0 \quad (3.1)$$

식 (3.1)로 표현되는 시스템에 식 (3.9)의 관계를 적용하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Delta S_k &= S_{k+1} - S_k \\ &= GAX_k + GBU_k - GX_k = -\Gamma' S_k \end{aligned} \quad (3.13)$$

식 (3.13)을 제어입력 U_k 에 대해 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} U_k &= -(GB)^{-1} [G(A-I)X_k + \Gamma' S_k] \\ &= U_{k0q} + U_{k0d} \end{aligned} \quad (3.14)$$

여기서 U_{k0q} 와 U_{k0d} 는 각각 다음과 같이 정의된다.

$$U_{k,q} = -(GB)^{-1}G(A-I)X_k \quad (3.15a)$$

$$U_{k,d} = -(GB)^{-1}\Gamma^*S_k \quad (3.15b)$$

다음으로 DSD 를 식 (3.1)의 시스템에 적용하여 얻어진 전체 페루프 시스템 동특성을 해석함으로써 슬라이딩 모드 가 항상 안정함을 정리 3.1 에서 증명하기로 한다.

먼저 식 (3.14)의 제어입력을 식 (3.1)의 시스템에 대입하여 정리하면 다음과 같은 페루프 시스템이 얻어진다.

$$X_{k+1} = [A-B(GB)^{-1}G(A-I)-B(GB)^{-1}\Gamma^*G]X_k = A'_0 X_k \quad (3.16)$$

여기서 A'_0 는 다음과 같이 정의된다.

$$A'_0 = A - B(GB)^{-1}G(A-I) - B(GB)^{-1}\Gamma^*G \quad (3.17)$$

■ **정리 3.1** 식 (3.1)의 시스템에 식 (3.14)의 제어입력을 인가하면 식 (3.16)으로 결정되는 페루프 시스템의 고유치는 다음과 같이 결정된다.

$$\sigma(A'_0) = \{ \lambda ; \det(\lambda I_{n-m} - J') \det(\lambda I_m - I_m + \Gamma') = 0 \} \quad (3.18)$$

여기서 $\sigma(A'_0)$ 는 행렬 A'_0 의 스펙트럼을 나타내며 $J' \in R^{(n-m) \times (n-m)}$ 는 Jordan 행렬이며 $\Gamma' \in R^{m \times m}$ 은 식 (3.11) 과 같이 결정되는 대각행렬이다.

▷ **증명** : 페루프 시스템인 식 (3.16)을 식 (3.19)와 같은 정칙 변환 행렬 M' 을 이용하여 새로운 좌표계로 변환한다.

$$M' = \begin{bmatrix} W^* \\ \dots \\ G \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

여기서, $W^* \in R^{n \times (n-m)}$ 는 A'_0 의 고유 벡터로 구성되는 행렬이며 W^* 는 W' 의 유사 역행렬, $G \in R^{m \times n}$ 는 스위칭 포 먼 행렬이다.

M' 의 역행렬을 구하기 위해 다음과 같이 R_1' 과 R_2' 로 구성된 행렬 M'^{-1} 를 정의한다.

$$(M')^{-1} = [R_1' : R_2'] \quad (3.20)$$

$M'(M')^{-1} = I_n$ 의 관계식으로 부터 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} M'(M')^{-1} &= \begin{bmatrix} W^* \\ \dots \\ G \end{bmatrix} [R_1' : R_2'] \\ &= \begin{bmatrix} W^*R_1' & \dots & W^*R_2' \\ \dots & \dots & \dots \\ GR_1' & \dots & GR_2' \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.21)$$

식 (3.21) 은 단위 행렬이 되어야 하므로 다음의 관계가 성립한다.

$$W^*R_1' = I_{n-m} \quad (3.22a)$$

$$W^*R_2' = 0 \quad (3.22b)$$

$$GR_1' = 0 \quad (3.22c)$$

$$GR_2' = I_m \quad (3.22d)$$

위의 관계식이 항상 만족되도록 R_1' 와 R_2' 를 결정하면 다음과 같다.

$$R_1' = W^* \quad (3.23a)$$

$$R_2' = B^* \quad (3.23b)$$

그러므로, M' 의 역행렬은 다음과 같이 결정된다.

$$(M')^{-1} = [W^* : B^*] \quad (3.24)$$

정칙 변환 행렬 M' 에 의해 상태 공간의 기저 벡터를 다음과 같이 정의한다.

$$X_k^{NEW} = M' X_k \quad (3.25)$$

위의 정칙 변환을 이용하여 페루프 시스템 식 (3.16)을 새로운 좌표계로 다시 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} X_{k+1}^{NEW} &= M' [A-B(GB)^{-1}G(A-I)-B(GB)^{-1}\Gamma^*G] (M')^{-1} X_k^{NEW} \\ &= \begin{bmatrix} NEW A'_0(1,1) & \dots & NEW A'_0(1,2) \\ \dots & \dots & \dots \\ NEW A'_0(2,1) & \dots & NEW A'_0(2,2) \end{bmatrix} X_k^{NEW} \end{aligned} \quad (3.26)$$

여기서 $NEW A'_0(i,j)$ $i, j=1,2$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$NEW A'_0(1,1) = W^* [A-B(GB)^{-1}G(A-I)-B(GB)^{-1}\Gamma^*G] W^* \quad (3.27a)$$

$$NEW A'_0(1,2) = W^* [A-B(GB)^{-1}G(A-I)-B(GB)^{-1}\Gamma^*G] B \quad (3.27b)$$

$$NEW A'_0(2,1) = G [A-B(GB)^{-1}G(A-I)-B(GB)^{-1}\Gamma^*G] W^* \quad (3.27c)$$

$$NEW A'_0(2,2) = G [A-B(GB)^{-1}G(A-I)-B(GB)^{-1}\Gamma^*G] B \quad (3.27d)$$

유사 역행렬의 정의와 식 (3.22)를 이용하면 식 (3.16)의 페루프 시스템은 새로운 좌표계에서 다음과 같은 단순화된 상태 공간 모델로 표현된다.

$$X_{k+1}^{NEW} = \begin{bmatrix} W^*AW^* & \dots & W^*AB \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & I - \Gamma^* \end{bmatrix} X_k^{NEW} \quad (3.28)$$

따라서, 페루프 시스템의 고유치는 식 (3.28)로 부터 다음과 같이 결정된다.

$$\det(\lambda I_{n-m} - W^*AW^*) \det(\lambda I_m - I_m + \Gamma^*) = 0 \quad (3.29)$$

한편, $W^*AW^* = J'$ 가 성립하므로 결국 페루프 시스템의 고유치는 다음과 같이 결정된다.

$$\det(\lambda I_{n-m} - J') \det(\lambda I_m - I_m + \Gamma^*) = 0 \quad (3.30)$$

증명 끝 ■

따라서, 전체 페루프 시스템의 고유치는 G 의 Null-Space 의 동특성을 결정하는 Jordan 행렬 J' 와 G 의 Range-Space 동특성을 결정하는 대각 행렬 Γ^* 에 의해 결정됨을 알 수 있다. J' 와 Γ^* 는 설계자가 임의로 선정하는 설계 인자이므로 전체 페루프 시스템의 안정도는 항상 보장받을 수 있다. 설계상 G 의 Range-Space 동특성은 빠른 모드가 되도록 하고, Null-Space 동특성은 느린 모드가 되도록 설계한다.

3.3 DSD 를 이용한 상태기환 이득행렬의 결정

정리 3.1에서 전체 페루프 시스템이 $N(G)$ 및 $R(B)$ 에 의해 지배된다는 사실에 착안하여, $N(G)$ 및 $R(B)$ 에서 설계자

가 원하는 극점을 각각 다음과 같이 설정한다.

$$\{ \lambda_1', \dots, \lambda_{n-m}' ; 1-\gamma_1', \dots, 1-\gamma_m' \} \quad (3.31)$$

N(G)에 대한 극점 R(B)에 대한 극점

$$|\lambda_i'| < 1, \quad 0 < \gamma_j' < 2 \quad i=1,2,\dots,n-m \quad j=1,2,\dots,m$$

DSD의 관계가 항상 유지되도록 하는 제어입력 U_k 는 앞에서 기술한 바와 같이 다음과 같이 결정된다.

$$U_k = -(K_n' + K_r') X_k = -K' X_k \quad (3.32)$$

$$K' = K_n' + K_r'$$

여기서 K_n' 및 K_r' 은 각각 N(G)와 R(B)에서의 상태 궤환 이득 행렬로서 다음과 같이 정의된다.

$$K_n' = (GB)^{-1}G(A-I) \quad (3.33a)$$

$$K_r' = (GB)^{-1}\Gamma'G \quad (3.33b)$$

따라서, 식 (3.33)으로 부터 K_n' 와 K_r' 를 결정하기 위해서는 스위칭 표면행렬 G와 DSD의 동특성을 결정하는 행렬 Γ' 를 선정해야 한다. 그런데, Γ' 는 식 (3.11)이 만족되도록 임의로 선정하면 되므로 결국 상태궤환 이득행렬 K' 를 결정하는 문제는 식(3.3)의 등가 시스템이 미리 설정된 n-m개의 고유치 $\{\lambda_1', \lambda_2', \dots, \lambda_{n-m}'\}$ 를 가지도록 스위칭 표면행렬 G를 결정하는 문제로 귀착된다.

2.3절에서의 스위칭 표면행렬 결정 알고리즘으로 부터 상태궤환 이득행렬들은 다음과 같이 결정된다.

$$K_n' = (W' \circ B)^{-1}W' \circ (A-I) \quad (3.34a)$$

$$K_r' = \Gamma'(W' \circ B)^{-1}W' \circ \quad (3.34b)$$

여기서 행렬 $W' \circ$ 는 페루프 고유벡터 행렬 W의 소멸 연산자이다.

그림 3.1에 제안된 DSD를 이용한 단순화된 극점 배치 기법을 그림으로 도시하였다.

4. 결론

본 논문에서는 슬라이딩 모드시에 시스템을 지배하는 등가 시스템으로 부터 정의된 투영연산자를 이용하여 전체 상태공간을 두개의 부분공간으로 직합 분해함으로써, 각 부분공간에서 제안된 스위칭 다이내믹을 이용하여 설계자가 독립적으로 극점 배치를 위한 상태궤환 이득행렬을 결정할 수 있는 단순화된 극점 배치 기법을 개발하였다. 제안된 기법은 기존의 극배치 기법 적용시 궤환 이득행렬 계산이 대단히 어려웠던 다중입력 시스템에서 보다 더 유효하게 적용될 수 있다는데 큰 장점을 지닌다.

5. 참고 문헌

- [1] G.S. Miminis and C.C. Paige, "An algorithm for pole-assignment of time-invariant linear systems," *Int. J. Control*, vol. 35, pp. 341-354, 1982
- [2] W.H. Wonham, "On pole-assignment in multi-input controllable linear systems," *IEEE Trans. Auto. Control*, vol. AC-12, pp. 660-665, 1967
- [3] A.S. Morse, "Decoupling and pole-assignment in linear multivariable systems - a geometric approach," *SIAM J. Control*, vol. 8, pp. 1-18, 1970
- [4] E.S. Armstrong, "A design system for linear multi-variable control," New York: Dekker, 1980
- [5] G.H. Golub et al., "A Hessenberg-Scheer method for the problem $AX + XB = C$," *IEEE Trans. Auto. Control*, vol. AC-24, pp. 909-913, 1979
- [6] O. M. E. El-Ghezawi et al., "Analysis and design of variable structure systems using a geometric approach," *Int. J. Control*, vol. 38, pp. 657-671, 1983
- [7] R. A. Decarlo et al., "Variable structure control of nonlinear multivariable systems", in *Proc. of the IEEE*, vol. 76, pp. 212-232, 1988
- [8] K. Furuta, "Implementation of sliding mode control by a digital computer," *IECON*, pp. 453-458, 1988

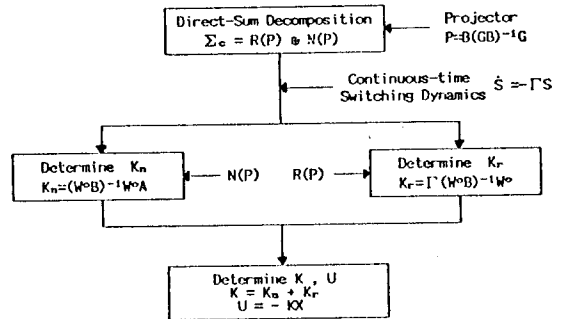


Fig. 2.1 Simplified Pole-Placement Design using the CSD

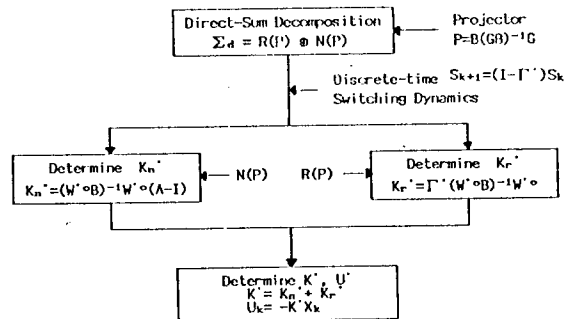


Fig. 3.1 Simplified Pole-Placement Design using the DSD