'93 한국자동제어학술회의논문집 (1993. 10. 20~22)

중복 분산 제어기의 안정성

°박찬국, 이장규
서울대학교 공과대학 제어계측공학과

Stability of an Overlapping Decentralized Controller

°Chan Gook Park, Jang Gyu Lee
*Department of Control and Instrumentation Engineering & Automation and Systems Research Institute, Seoul National University

Abstract - This paper presents design criteria of an overlapping decentralized controller by investigating the controllability and closed loop stability of the expanded system. To determine the criteria we classify the overlapping decentralized controller into an overlapping expanded controller and a contractible controller. It is shown that conditions of system expansion to design these controllers are differently used. The overlapping expanded controller needs the aggergation conditions due to the importance of a structure of the expanded system. The contractible controller which intends to use in the original space needs the restriction because of stability of the original system.

1. 서 론

시스템의 차수가 높고 복잡한 수학적 모델에 대하여 분산 제어와 추정 방법이 정보 처리의 상당한 감소를 초래한다는 사실은 오랫동안 인식되어져 왔다. 분해 개념과 방법은 시스템의 분산처리를 위하여 요구되는 필수적인 과제중의 하나로서 최근에 보다 일반적이고 유용한 중복분해(overlapping decomposition) 개념이 제시되었다. 이것은 지금까지의 일반적인 분해 방법으로는 처리할 수 없었던 것을 가능하게 한것으로서 1980년 Ikeda와 Siljak[1]에 의하여 중복분해 제어기가 발표되면서 분산 제어이론이 정립되기 시작하였다. 중복분해 방법은 대형 시스템의 분산 제어를 위한 보다 일반적인 구조를 제공하고, 상호작용을 포함하는 부시스템에 대한 분산 이론의 범위를 확대시키 중요한 실제적인 문제들을 해결하는데 커다란 진전을 가져왔다. 전력시스템, 경제학, 고속도로 교통통제, 대형 연성 구조, 기계 시스템 그리고 다중 제어시스템 등이 제어분야의 대표적 예가 된다[2].

중복분해 방법은 부시스템 사이에 강한 상호작용이 부분적으로 존재할 때 이들을 공유하는 새로운 부시스템을 구성하여 부시스템에 대하여 독립적으로 모든 연산을 수행하는 것이다. 부시스템에서 구한 해는 전체 시스템의 해를 구하기 위하여 결합되는데 이때 중복분해 방법은 일반분해(disjoint decomposition) 방법에 비하여 전체 시스템의 안정성을 향상시켜준다[1][3]. 중복분해를 통한 제어기 설계의 수학적 골격은 포함원리(inclusion principle)이다[4]. 이 원리는 확장된 시스템의 운동이 원래 시스템의 운동을 포함하는 조건이지만 실제로 제어기를 구성할 때는 이 조건의 단순화된 조건들인 제약과 축약이 사용된다[5]. 지금까지 발표된 대부분의 결과들이 중복 분산 제어기를 설계하기 위하여 제약조건을 제시하고 있으나[6][7], Malinowski[8]는 이것과 배타적인 특징을 나타내는 축약조건이 제어기 설계에 적합한 것으로 제시하고 있다. 이처럼 상반된 결과가 나타난 이유는 중복 분산 제어기의 한가지 구조만을 가정했기 때문이다.

따라서 본 논문에서는 중복 분산 제어기의 구조를 사용하고자 하는 목적에 따라 다음과 같이 두가지로 분류하여 각기 다른 조건하에서 설계되어야 한다는것을 제시하고자 한다. 첫번째 구조로는 시스템을 중복 확장하여 확장된 공간만을 고려하여 분산 제어기를 설계하는 중복 확장 제어기로서 이는 시스템의 신뢰성을 높이기 위한 다중 제어시스템(multiple control system)[9]과 같은 특정한 목적을 위하여 사용된다. 이것은 중복 확장된 공간에서 제어기를 구성하기 때문에 확장된 시스템의 제어 가능성이나 견실성등의 구조가 중요하게 된다. 두번째로는 주어진 공간에서 제어기 설계를 목적으로 하는 축소 가능 제어기로서 일반적인 대형시스템의 제어기 설계에 유용하게 사용될 수 있다. 이것은 중복 확장된 공간에서 분산 제어기를 설계한 후 이를 축소하여 원 시스템에 대하여 구현하기 때문에 확장된 시스템 자체보다는 확장된 시스템의 성질이 축소된 원 시스템에서도 유지되는가 하는 축소 가능성(contractibility)이 가장 중요하게 된다. 본 논문에서는 이처럼 각기 다른 특성을 지닌 중복 분산 제어기 설계를 위한 조건을 제시한다. 중복 확장된 시스템의 제어 가능성과 폐루프 안정성을 조사함으로서 얻어진 이 결과들은 지금까지 한가지 조건에 의해서만 구별없이 설계되던 중복 분산 제어기의 설계 기준을 제공하게 된다.

2. 시스템의 포함원리

중복 확장 시스템과 주어진 시스템의 포함관계를 살펴보기 위하여 다음과 같은 선형 동적 시스템을 고려하자.

$$\Sigma : \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),\ x(t) \in R^n,\ u(t) \in R^m \quad (1)$$

여기서 행렬 A와 B는 제어 가능하고 다음과 같이 부행렬(submatrix)로 구성되어 있다고 가정하자.

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} B_{11} & 0 \\ B_{21} & B_{22} \\ 0 & B_{32} \end{bmatrix} \tag{2}$$

여기서 $A_{ij} \in R^{n_i \times n_j}, B_{ij} \in R^{n_i \times m_j}$ 그리고 $n = n_1 + n_2 + n_3$, $m = m_1 + m_2$가 성립한다. 다음에는 시스템 Σ의 중복 확장 시스템 $\tilde{\Sigma}$를 고려하자.

$$\tilde{\Sigma} : \dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}u(t),\ \tilde{x}(t) \in R^{\tilde{n}} \tag{3}$$

여기서 두 시스템 Σ와 $\tilde{\Sigma}$의 상태공간의 차원은 $\tilde{n} \geq n$이 되며 두 시스템은 다음과 같은 선형변환 관계를 지닌다.

$$\tilde{x}(t) = Vx(t),\ x(t) = U\tilde{x}(t) \tag{4}$$

식(4)의 변환에 의하여 시스템 Σ와 $\tilde{\Sigma}$의 행렬들은 다음과 같은 준유사변환(pseudo-similarity transformation)의 관계를 지닌다.

$$\tilde{A} = VAU + M,\ \tilde{B} = VB + N \tag{5}$$

여기서 M과 N은 보조행렬(complementary matrix)들로서 $\tilde{\Sigma}$가 Σ를 포함하기 위해서는 다음의 조건을 만족해야한다[4].

$$UM^iV = 0,\ UM^{i-1}N = 0, \quad \forall i = 1, 2, \cdots \tilde{n} \tag{6}$$

이때 시스템 $\tilde{\Sigma}$는 시스템 Σ의 확장(expansion)이라 하고, Σ는 $\tilde{\Sigma}$의 축소(contraction)라 한다. 그러나 실제로 제어기를 설계하기 위하여 시스템을 확장-축소할 때는 이들의 특별한 경우인 제약과 축약조건을 사용하는데, 다음 정리는 이들의 조건을 제시하고 있다.

정리 1 [4]:

(a) Σ가 $\tilde{\Sigma}$의 제약이 되기 위한 보조행렬의 필요충분조건은

$$MV = 0,\ N = 0. \tag{7}$$

(b) Σ가 $\tilde{\Sigma}$의 축약이 되기 위한 보조행렬의 필요충분조건은

$$UM = 0,\ UN = 0. \tag{8}$$

이제 정리 1에 주어진 조건을 이용하여 시스템 Σ를 확장하자.

A. 제약(restriction)에 의한 확장

중복 확장을 위한 변환행렬은 다음과 같다.

$$V_R = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{n_2} & 0 \\ 0 & I_{n_2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{n_3} \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$U_R = (V_R^T V_R)^{-1} V_R^T = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}I_{n_2} & \frac{1}{2}I_{n_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n_3} \end{bmatrix}$$

이때 정리 1(a)를 만족하는 보조행렬은 다음과 같이 선정하자.

$$M_R = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & A_{12} & -A_{12} & 0 \\ 0 & A_{22} & -A_{22} & 0 \\ 0 & -A_{22} & A_{22} & 0 \\ 0 & -A_{32} & A_{32} & 0 \end{bmatrix},\ N_R = 0_{\tilde{n} \times m} \tag{10}$$

이상과 같이 주어진 행렬들에 의하여 확장된 시스템 $\tilde{\Sigma}_R$의 행렬들은 식(5)에 의하여 다음과 같이 결정된다.

$$\tilde{A}_R = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & 0 & A_{23} \\ A_{21} & 0 & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & 0 & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix},\ \tilde{B}_R = \begin{bmatrix} B_{11} & 0 \\ B_{21} & B_{22} \\ B_{21} & B_{22} \\ 0 & B_{32} \end{bmatrix} \tag{11}$$

B. 축약(aggregation)에 의한 확장

중복 확장을 위하여 다음과 같은 변환행렬을 선택한다.

$$U_A = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{n_2} & I_{n_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n_3} \end{bmatrix},\ V_A = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}I_{n_2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}I_{n_2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{n_3} \end{bmatrix} \tag{12}$$

정리 1(b)를 만족하는 보조행렬을 다음과 같이 선정하자.

$$M_A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & -A_{22} & -A_{23} \\ -A_{21} & -A_{22} & A_{22} & A_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$N_A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B_{21} & -B_{22} \\ -B_{21} & B_{22} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{13}$$

이상과 같이 주어진 행렬들을 식(5)에 대입하여 얻어진 확장된 시스템 $\tilde{\Sigma}_A$의 행렬들은 다음과 같다.

$$\tilde{A}_A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix},\ \tilde{B}_A = \begin{bmatrix} B_{11} & 0 \\ B_{21} & 0 \\ 0 & B_{22} \\ 0 & B_{32} \end{bmatrix} \tag{14}$$

축약조건에 의하여 확장된 입력행렬 $\tilde{B}_A$는 블록 대각(block diagonal) 형태이기 때문에 분산 제어기를 구성하기에 보다 유리하게 된다.

3. 중복 확장 시스템의 제어 가능성

제약과 축약에 의하여 중복 확장된 시스템의 제어 가능성(controllability)을 조사하기 위하여 PBH 계수시험(rank test) 방법을 적용한다. 즉 시스템 $\tilde{\Sigma}$가 제어 가능하기 위한 필요충분조건은 모든 λ에 대하여 행렬 $\tilde{H} = [\tilde{A} - \lambda I_{\tilde{n}} \vdots \tilde{B}]$의 계수가 $\tilde{n}$과 같아야 한다. 이 조건을 만족하지 못하는 λ를 제어 불능 모드라 한다. 이제 제약과 축약에 의하여 각각 확장된 시스템 $\tilde{\Sigma}_R$과 $\tilde{\Sigma}_A$의 제어 가능성을 조사하자.

A. 제약의 경우

식(11)에 주어진 시스템 $\tilde{\Sigma}_R$에 대하여 행렬 $\tilde{H}_R$를 구하면 다음과 같다.

$$\tilde{H}_R = [\ \tilde{A}_R - \lambda I_{\tilde{n}} \ \vdots\ \tilde{B}_R\ ] \equiv [\ \tilde{A}_R(\lambda) \ \vdots\ \tilde{B}_R\ ] \tag{15}$$

행렬 $\tilde{H}_R$에 기본 연산(elementary operation)을 수행하면 다음과 같은 행렬을 얻을 수 있다.

$$\tilde{H}'_R = [\ \tilde{A}'_R(\lambda) \ \vdots\ \tilde{B}'_R\ ] \tag{16}$$

여기서

$$\tilde{A}'_R(\lambda) = \begin{bmatrix} A_{11} - \lambda I_{n_1} & A_{12} & A_{12} & A_{13} \\ 0 & A_{22} - \lambda I_{n_2} & 0 & 0 \\ A_{21} & 0 & A_{22} - \lambda I_{n_2} & A_{23} \\ A_{31} & 0 & A_{32} & A_{33} - \lambda I_{n_3} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B}'_R = \begin{bmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & 0 \\ B_{21} & B_{22} \\ 0 & B_{32} \end{bmatrix}$$

따라서 A_{22}의 고유치인 모드 λ에 대하여 $\tilde{H}'_R$의 계수는 $\tilde{n}$ 보다 작기 때문에 제어 불능함을 알 수 있다.

B. 축약의 경우

축약의 경우는 제약과 유사한 방법에 의하여 제어 가능성을 조사할 수 있다. 식(14)의 시스템 $\tilde{\Sigma}_A$에 대하여 행렬 $\tilde{H}_A$를 구성하면 다음과 같다.

$$\tilde{H}'_A = [\ \tilde{A}'_A(\lambda) \ \vdots\ \tilde{B}'_A\ ] \tag{17}$$

여기서

$$\tilde{A}'_A(\lambda) = \begin{bmatrix} A_{11} - \lambda I_{n_1} & 0 & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} - \lambda I_{n_2} & 0 & 0 \\ A_{21} & 0 & A_{22} - \lambda I_{n_2} & A_{23} \\ A_{31} & 0 & A_{32} & A_{33} - \lambda I_{n_3} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B}'_A = \begin{bmatrix} B_{11} & 0 \\ B_{21} & 0 \\ B_{21} & B_{22} \\ 0 & B_{32} \end{bmatrix}$$

따라서 A_{22}의 고유치인 모드 λ에 대해서도 제어 가능할 수 있으며, 시스템 $\tilde{\Sigma}_A$는 입력 행렬이 블록 대각인 분산 입력 형태를 나타내기 때문에 분산제어기를 구성할 때 전체 시스템의 안정성을 향상시킬 수 있게된다.

A와 B의 경우를 통하여 중복 확장 시스템에서의 제어기 구성을 목적으로 하는 중복 확장 제어기에 축약조건이 보다 유리함을 알 수 있다.

4. 중복 분산 제어기의 안정성

주어진 시스템의 상태변수를 중복하여 얻어진 시스템은 차수가 증가하기 때문에 확장된 시스템에 대하여 직접 제어기를 구성하는 경우보다 중복 확장 시스템을 분해한 중복 부시스템에 대하여 독립적으로 제어기를 구성하는 분산 제어기가 보다 일반적으로 사용된다. 이때 중복 확장 시스템 $\tilde{\Sigma}$에 대한 상태 되먹임(state feedback) 분산제어 입력은 다음과 같은 형태를 지닌다.

$$u(t) = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{23} & K_{24} \end{bmatrix} \tilde{x}(t) \equiv \tilde{K}_D x(t) \tag{18}$$

제약조건에 의하여 확장된 시스템 $\tilde{\Sigma}_R$에 식(19)의 제어 입력을 주었을 때 폐루프 시스템은 다음과 같다.

$$\dot{\tilde{x}} = (\tilde{A}_R - \tilde{B}_R\tilde{K}_D)\tilde{x} \equiv \tilde{A}_{RF}\tilde{x} \tag{19}$$

식(20)에 주어진 폐루프 시스템의 안정성을 조사하기 위하여 행렬 $\tilde{A}_{RF}$의 고유치를 조사하자.

$$\tilde{A}_{RF}(\lambda) = \tilde{A}_{RF} - \lambda I_{\tilde{n}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \ \vdots\ \alpha_2 \ \vdots\ \alpha_3 \ \vdots\ \alpha_4 \end{bmatrix} \tag{20}$$

여기서

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} A_{11} - B_{11}K_{11} - \lambda I_{n_1} \\ A_{21} - B_{21}K_{11} \\ A_{21} - B_{21}K_{11} \\ A_{31} \end{bmatrix} \tag{21a}$$

$$\alpha_2 = \begin{bmatrix} A_{12} - B_{11}K_{12} \\ A_{22} - B_{21}K_{12} - \lambda I_{n_2} \\ -B_{21}K_{12} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{21b}$$

$$\alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -B_{22}K_{23} \\ A_{22} - B_{22}K_{23} - \lambda I_{n_2} \\ A_{32} - B_{32}K_{23} \end{bmatrix} \tag{21c}$$

$$\alpha_4 = \begin{bmatrix} A_{13} \\ A_{23} - B_{22}K_{24} \\ A_{23} - B_{22}K_{24} \\ A_{33} - B_{32}K_{24} - \lambda I_{n_3} \end{bmatrix} \tag{21d}$$

행렬 $\tilde{A}_{RF}(\lambda)$에 기본 행과 열 연산을 수행하면 다음과 같은 행렬을 얻을 수 있다.

$$\tilde{A}'_{RF}(\lambda) = \begin{bmatrix} \beta_1 \ \vdots\ \beta_2 \ \vdots\ \beta_3 \ \vdots\ \beta_4 \end{bmatrix} \tag{22}$$

여기서

$$\beta_1 = \begin{bmatrix} A_{11} - B_{11}K_{11} - \lambda I_{n_1} \\ A_{21} - B_{21}K_{11} \\ 0 \\ A_{31} \end{bmatrix} \tag{23a}$$

$$\beta_2 = \begin{bmatrix} A_{12} - B_{11}K_{12} \\ A_{22} - B_{21}K_{12} - B_{22}K_{23} - \lambda I_{n_2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{23b}$$

$$\beta_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -B_{22}K_{23} \\ A_{22} - \lambda I_{n_2} \\ A_{32} - B_{32}K_{23} \end{bmatrix} \tag{23c}$$

$$\beta_4 = \begin{bmatrix} A_{13} \\ A_{23} - B_{22}K_{24} \\ 0 \\ A_{33} - B_{32}K_{24} - \lambda I_{n_3} \end{bmatrix} \tag{23d}$$

행렬 $\tilde{A}_{RF}(\lambda)$와 $\tilde{A}'_{RF}(\lambda)$의 행렬식(determinant)은 동일하기 때문에 식(22)에서 다음의 관계를 유도할 수 있다.

$$| \tilde{A}_{RF} - \lambda I_{\tilde{n}} | = | A_{22} - \lambda I_{n_2} || A - BK_D - \lambda I_n | \tag{24}$$

여기서

$$K_D = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 \\ 0 & K_{23} & K_{24} \end{bmatrix} \tag{25}$$

식(25)에서 K_D는 [4]에서 제시한 $\tilde{K}_D$의 축소된 입력이득 $K_D = \tilde{K}_D V$를 만족하고 식(24)에서 제약조건에 의하여 확장된 폐루프 시스템의 고유치는 주어진 시스템의 폐루프 고유치와 부행렬 A_{22}의 고유치로 분해됨을 알 수 있다. 즉 확장된 폐루프 시스템은 주어진 폐루프 시스템의 고유치를 포함하게 되어, 확장된 시스템의 안정성이 주어진 시스템의 안정성을 보장하게 된다. 따라서 주어진 시스템의 안정성을 중요시 하는 축소 가능 제어기에 적합한 구조임을 알 수 있다.

반면에 축약조건에 의하여 확장된 시스템의 폐루프 고유치는 식(24)와 같이 분해되지 않기 때문에 확장된 시스템의 안정성을 주어진 시스템에서 보장받지 못하게 되므로 축소 가능 제어기로는 직접 사용할 수 없다.

5. 결 론

중복 분산 제어기를 설계할 때 요구되는 확장조건은 포함원리의 특별한 경우인 제약과 축약이 사용된다. 이 두가지 조건은 정의된 공간이 다르기 때문에 조건 또한 배타적인 관계를 지니게 된다. 따라서 중복 분산 제어기를 구성하고자 할 때 구조 및 용도에 적합하도록 이 조건들을 구별해서 사용하여야 한다. 본 논문에서는 중복 분산 제어기를 구조에 따라 중복 확장 제어기와 축소 가능 제어기로 분류하고 이들을 설계하기 위한 중복 확장 시스템의 조건이 서로 상이함을 확장시스템의 제어 가능성과 폐루프 안정성을 비교함으로서 보인다. 중복 확장된 공간에서 제어기 구성을 목적으로하는 중복 확장 제어기는 확장된 시스템의 구조를 중요시 하기 때문에 확장 시스템의 제어 가능성을 지닌 축약조건이 요구되며, 주어진 시스템에서 제어기 구성을 목적으로 하는 축소 가능 제어기는 주어진 시스템의 안정성이 매우 중요하기 때문에 확장된 시스템의 폐루프 안정성이 주어진 시스템에서도 유지되기 위한 제약조건하에서 설계되어야 한다. 이러한 결과들은 지금까지 한가지 조건에 의해서만 구별없이 설계되던 중복 분산 제어기의 설계 기준을 제공한다.

참 고 문 헌

[1] M. Ikeda and D.D. Šiljak, "Overlapping Decompositions, Expansions, and Contractions of Dynamic Systems," *Large Scale Systems*, Vol.1, pp.29-38, 1980.

[2] D.D. Šiljak, *Decentralized Control of Complex Systems* ,Academic Press, New York, 1991.

[3] Y. Ohta and D. D. Šiljak, "Overlapping block diagonal dominance and existence of Liapunov functions," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 112(2), 1985, 396-410.

[4] M.Ikeda, D.D. Šiljak, and D.E.White, "An Inclusion Principle for Dynamic Systems," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol.AC-29, No.3, pp.244-249, 1984.

[5] 박찬국, 중복분산필터 설계 및 스트랩다운 관성항법시스템에의 응용, 서울대학교 대학원, 박사학위논문, 1993.

[6] M. Ikeda, D.D. Šiljak and D.E. White, "Decentralized Control with Overlapping Information Sets," *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol.34, pp.279-310, 1981.

[7] M. Hodžić, and D.D. Šiljak, "Decentralized Estimation and Control with Overlapping Information Sets," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol.AC-31, No.1, pp.83-86, 1986.

[8] K. Malinowski and M.G. Singh, "Controllability and Observability of Expanded Systems with Overlapping Decompositions," *Automatica*, Vol.21, pp.203-208, 1985.

[9] D.D.Šiljak, "Reliable Control Using Multiple Control Systems," *International Journal of Control*, Vol.31, No.2, pp.303-329, 1980.