

## 최적 모델추종 제어기법을 이용한 유연 구조물 진동 억제에 관한 연구

양철호, 김유단  
서울대학교 항공우주공학과

## Vibration Suppression of Flexible Structures Using Optimal Model Following Control Scheme

Chulho Yang and Youdan Kim  
Department of Aerospace Engineering, Seoul National University

### Abstract

Optimal model following control scheme is to design the controller which makes the response of real system follow that of desirable model. This kind of design scheme is developed for first order system. We extends the scheme for second order system regarding the characteristics of mechanical second order system for vibration suppression of flexible structures. The model of mechanical second order system is obtained using suitable damping ratios and natural frequencies. Using this scheme, we can design the good controller which uses the characteristic of second order system. Numerical examples are presented which were used optimal model following control scheme.

### 1 서론

모델추종 제어기법은 모델을 설정한 후 원하는 시스템이 이 모델을 따라 가도록 만듭니다. 제어 목적을 달성하려고 하는 것이다. 이 때의 모델은 일반적으로 선형 상태방정식으로 표현된다. 시스템의 상태변수와 모델의 상태변수의 차이를 줄이기 위해서 모델의 상태변수는 앞면임(feedforward)하고 시스템의 상태변수는 뒤면임(feedback)한다. 두 상태변수의 차이값이 없어지면 시스템은 모델의 상태를 따라가는 것이다. 제어 목적을 달성되는 것이다.

타일러[1]는 최적제어기법을 이용하여 두 가지 유형의 모델 추종방식을 정식화하였다. 내재성(Explicit) 모델 추종방식과 외연성(Explicit) 모델 추종방식이 그것인데, 두 방식은 모델의 방정식이 설계과정후에 사용되느냐 안되느냐에 따라 구분된다. 내재성 모델 추종 방식은 모델의 방정식이 포함되어 있어서 설계후에는 사용되지 않는 반면에, 외연성 모델 추종 방식은 모델의 방정식이 실제 제어계에 사용된다. 크라인더와 로스월트[2]는 이 두 방식을 비교하였는데, 내재성 모델 추종 방식은 계산된 제어이득의 크기가 작은 장점이 있고, 외연성 모델 추종 방식은 내재성 모델 추종 방식보다 큰 이득이 필요한 반면, 시스템 매개변수의 변화에 덜 민감한 특성이 있다. 트란클과 브라이슨[3]은 이제까지의 모델 추종 방식보다 모델을 더 잘 추종하게 하는 제어법칙을 개발하였다. 이 제어법칙은 모델 상태변수를 앞면임(feedforward)하고 플랜트 상태변수는 뒤면임(feedback)시키는 방식을 취하는데, 앞면임 이득은 리아프노프 형태의 선형 대수 행렬식으로부터

구해지고, 뒤면임 이득은 최적제어 기법에서 구해진다.

모델추종 제어기법은 적용 시스템이 일차일 때에 한해서 정식화되어 있다. 많은 기계 시스템은 이차계로 표현되는데 모델 추종제어 기법을 적용하기 위해서는 일차의 상태변수 미분방정식을 구해야 한다. 이 과정에서 시스템의 크기가 커지게 되어, 수치연산에서 단점으로 작용되고, 일차시스템으로 변환되는 과정에서 이차시스템의 물리적 의미를 상실하게 되어 모델설정이 용이하지 않게 된다.

본 논문에서는 기계적 이차시스템에서 모델추종 제어기법을 정식화하여 이를 유연 구조물의 진동억제에 적용한다. 시스템의 매개변수 값들이 변화했을 경우에 강건한 제어기로 알려져 있는 LQR(Linear Quadratic Regulator)로 구성된 제어기와 제어 결과를 비교하여 모델추종 제어기법의 강건성을 보인다.

### 2 일차계의 최적모델 추종제어 계의 설계

일반적으로 외란과 측정잡음이 없는 선형 시불변 완전 가제어의 시스템은 다음과 같은 벡터 미분방정식으로 나타낸다.

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \quad (1)$$

$$y(t) = Hx(t) \quad (2)$$

여기서  $x(t)$ :  $n$ 차원 상태 벡터,

$u(t)$ :  $m$ 차원 입력 벡터,

$y(t)$ :  $q$ 차원 출력 벡터,

$A$ :  $n \times n$  시스템 행렬,

$B$ :  $n \times m$  제어입력 행렬,

$H$ :  $q \times n$  출력 행렬이다.

주어진 시스템의 몇 개 혹은 모든 상태변수가 따라가고자 하는 모델의 상태 미분방정식을 다음과 같이 표현한다.

$$\dot{x}_m(t) = A_m x_m(t) \quad (3)$$

$$y_m(t) = H_m x_m(t) \quad (4)$$

시스템의 출력변수가 모델의 출력변수에 가능한 한 접근하도록, 시스템의 변수와 모델의 변수들은 다음과 같은 관계식을 갖는다고 가정한다.[3] 즉, 플랜트의 상태변수와 제어입력이 추종해야 할 모델의 그것들보다  $\delta x$  와  $\delta u$ 만큼 차이가 있다고 한다.

$$u(t) = U^*x_m(t) + \delta u(t) \quad (5)$$

$$x(t) = X^*x_m(t) + \delta x(t) \quad (6)$$

$$y(t) = y_m(t) + \delta y(t) \quad (7)$$

여기서 계수행렬  $U^*$  와  $X^*$ 는  $\delta y(t)$ 가 충분히 빠른 속도로 영이 되도록 결정되는 상수행렬이다. 위 식들을 시스템 상태방정식과 출력식에 대입하여 정리하면

$$[X^*A_m - AX^* - BU^*]x_m(t) + \delta \dot{x}(t) = A\delta x(t) + B\delta u(t) \quad (8)$$

$$[H_m - HX^*]x_m(t) + \delta y(t) = H\delta x(t). \quad (9)$$

위의 두 식에서

$$HX^* = H_m \quad (10)$$

$$AX^* + BU^* = X^*A_m \quad (11)$$

이 되도록  $X^*$ 와  $U^*$ 를 결정해 주면 다음과 같은 오차에 관한 식들을 얻을 수 있다.

$$\delta \dot{x}(t) = A\delta x(t) + B\delta u(t) \quad (12)$$

$$\delta y(t) = H\delta x(t) \quad (13)$$

$$\delta x(0) = x(0) - X^*x_m(0) \quad (14)$$

식 (10)과 식 (11)을 이용하여 앞먹임 이득  $X^*$ 와  $U^*$ 를 결정할 수 있고, 출력의 오차  $\delta y(t)$ 를 영으로 줄이기 위해서 최적제어 설계법을 사용한다. 이때의 되먹임 이득  $G$ 는 다음의 평가함수를 최소화하도록 한다.

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty [\delta x^T(t)Q\delta x(t) + \delta u^T(t)R\delta u(t)] dt \quad (15)$$

여기서  $Q$ 는 정준정(positive semidefinite)인 출력 상태변수 가중행렬이고,  $R$ 은 정정(positive definite)인 제어입력 가중행렬이다. 최적제어 이론을 적용하여 얻은 제어법칙은 다음과 같다.

$$\delta u(t) = -G\delta x(t) \quad (16)$$

식(6)과 식(16)을 식(5)에 대입하여, 제어입력을 시스템과 모델의 상태변수로 표현하면, 다음의 제어법칙을 얻을 수 있다.

$$u(t) = U^*x_m(t) - G[x(t) - X^*x_m(t)]. \quad (17)$$

위 제어입력은 시스템의 상태변수가 모델의 상태변수를 따라가도록 설계된 제어입력이다.

### 3 이차계 모델추종 제어이론

본 절에서는 일차계에서 유도된 모델추종 제어이론을 기계적 이차 시스템에 적용하기 위해서 이차계에 적합한 식을 유도한다. 이차계에서 모델의 방정식은 제어 대상계의 물리적 성질을 고려해서 쉽게 잡을 수 있다. 즉, 원하는 감쇠계수와 고유진동수만으로 모델의 방정식을 세울 수 있다.

다음과 같은 기계적 이차시스템을 생각한다.

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = Du \quad (18)$$

$$y = Hx \quad (19)$$

이때  $x \in R^n$ ,  $u \in R^m$ ,  $y \in R^r$  이다. 이 시스템을 모달(modal) 좌표계로 변환한다.

$$x = \Phi\eta \quad (20)$$

여기서  $\Phi$ 는 질량행렬  $M$ 과 강성행렬  $K$ 를 사용하여 고유치 문제를 풀었을 때 얻어진 고유벡터 행렬이며, 정규화 조건으로는  $\phi_i^T M \phi_i = 1$ 을 사용한다.

모달좌표계를 사용하여 식(18)과 식(19)를 다시 표현하면 다음과 같다.

$$\tilde{M}\ddot{\eta} + \tilde{C}\dot{\eta} + \tilde{K}\eta = \tilde{D}u \quad (21)$$

$$y = \tilde{H}\eta. \quad (22)$$

여기서  $\tilde{M} = \Phi^T M \Phi$ ,  $\tilde{C} = \Phi^T C \Phi$ ,  $\tilde{K} = \Phi^T K \Phi$ ,  $\tilde{D} = \Phi^T D$ ,  $\tilde{H} = H\Phi$ 이다.

모달 좌표계에서 모델 지배방정식은 이차계의 바람직한 감쇠계수와 고유진동수를 이용하여 다음과 같이 선택한다.

$$\tilde{\eta}_m + C_m\dot{\eta}_m + K_m\eta_m = 0 \quad (23)$$

$$y_m = H_m\eta_m \quad (24)$$

여기서  $C_m = \text{diag}(2\zeta_i\omega_i)$ ,  $K_m = \text{diag}(\omega_i^2)$ ,  $H_m = \tilde{H}$ 이다. 전절에서 유도한 모델추종 제어이론에 근거하여, 이차계 시스템에 대한 제어입력과 모달 상태변수, 출력변수를 다음과 같이 가정한다.

$$u = U_v^*\dot{\eta}_m + U_d^*\eta_m + \delta u \quad (25)$$

$$\eta = N^*\eta_m + \delta\eta \quad (26)$$

$$y = y_m + \delta y \quad (27)$$

여기서  $U_v^*, U_d^*, N^*$ 가 앞먹임 이득이 되며, 식(18) – (19)를 식(25) – (27)과 함께 정리하면 다음과 같이 앞먹임 이득을 구할 때 사용하는 식을 얻을 수 있다.

$$N^* = I \quad (28)$$

$$U_v^* = \tilde{D}^\dagger (\tilde{C} - C_m) \quad (29)$$

$$U_d^* = \tilde{D}^\dagger (\tilde{K} - K_m) \quad (30)$$

이때  $\dagger$ 는 의사 역행렬을 의미한다.

시스템 식(21)과 (22), 모델 상태방정식 (23), (24), 그리고 가정한 시스템 변수과 모델 변수 관계식 (25)–(27)을 사용하여 오차의 상태방정식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\delta\ddot{\eta} + \tilde{C}\delta\dot{\eta} + \tilde{K}\delta\eta = \tilde{D}\delta u \quad (31)$$

$$\delta y = \tilde{H}\delta\eta \quad (32)$$

오차를 줄이기 위해서 최적제어 이론을 사용할 수 있고, 이를 위해서 오차 방정식을 일차계로 변환시킨다.

$$\delta\dot{z} = A\delta z + B\delta u \quad (33)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\tilde{K} & -\tilde{C} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{D} \end{bmatrix}, \delta z = \begin{Bmatrix} \delta\eta \\ \delta\dot{\eta} \end{Bmatrix} \quad (34)$$

이때 평가함수는 다음과 같다.

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty [\delta z^T Q \delta z + \delta u^T R \delta u] dt \quad (35)$$

$$Q = \begin{bmatrix} \tilde{K} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, R = I \quad (36)$$

제어입력은 다음과 같은 리카티 방정식에서 구한다.

$$-\dot{P} = PA + A^T P + Q - PBR^{-1}B^T P \quad (37)$$

$$G = R^{-1}B^T P = [G_1 \ G_2] \quad (38)$$

$$\delta u = -G\delta z \quad (39)$$

식(25)-(27), (34),(39)를 정리하면, 앞먹임 이득과 되먹임 이득을 이용한 제어법칙을 다음과 같이 구하게 된다.

$$u = (U_d^* + G_1)\eta_m + (U_v^* + G_2)\dot{\eta}_m - G_1\Phi^T Mx - G_2\Phi^T M\dot{x} \quad (40)$$

제어대상의 여러 모드중에서 중요한 몇개의 모드만을 제어하려고 한다면 모달 절단법(modal truncation)을 이용해서 모델의 차수를 줄여서 사용해야 한다. 모달 행렬을 이용하여 저차원 모델을 설계하는데, 시스템의  $n$  차원중  $n_r$  차원을 이용해서 모델을 만든다.

$$\begin{aligned} x &= \Phi\eta = [\Phi_1 \Phi_2] \begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{Bmatrix} \\ &\cong \Phi_1\eta_1 \end{aligned} \quad (41)$$

여기서  $\eta_1 : n_r \times 1$  이다.  $\Phi$  대신에  $\Phi_1$ 을 사용하여 시스템 상태변수 방정식을 모달 좌표계로 변환하고 모델의 방정식도 여기에 맞추어서 잡는다. 중간 유도과정중 의사 역행렬을 구하는 부분이 있기 때문에 제어입력은 제어하고자 하는 모드수만큼 있어야 하며, 모델의 차수가 줄면 제어입력은 증가하나 의사 역행렬 과정의 오차가 줄어들기 때문에 반응은 좋아진다.

## 4 수치 예

모델추종 제어기법을 이용한 제어기의 유효성을 알아보기 위하여 3 질량계와 유연 구조물에 대하여 제어기를 설계한다. 제어기의 강건성을 보이기 위해 유연 구조물 시스템이 변화한 경우를 살펴보았으며, 기존의 제어기와 비교를 위해서 LQR 제어기를 선택하였다.

### 4.1 3 질량계

그림 1.과 같이 3개의 질량을 가진 시스템의 상태 방정식을 생각한다. 제어입력은 각 질량의 위치에 존재한다.

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = Du$$

$$y = Hx$$

$$x = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$$

$$u = [u_1 \ u_2 \ u_3]^T$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 20 & -10 & 0 \\ -10 & 30 & -20 \\ 0 & -20 & 20 \end{bmatrix},$$

$$D = H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

이 때 구조감쇠 행렬은  $C = 0.001(M + K)$ 로 가정한다. 이 시스템의 개회로 고유 진동수와 감쇠계수는 표 1.과 같다.

모델의 상태 방정식은 다음과 같이 잡는다.

$$\begin{aligned} \dot{\eta} + C_m\dot{\eta} + K_m\eta &= 0 \\ C_m &= \begin{bmatrix} 1.7666 & 0 & 0 \\ 0 & 2.1144 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0642 \end{bmatrix} \\ K_m &= \begin{bmatrix} 2.0872 & 0 & 0 \\ 0 & 19.9997 & 0 \\ 0 & 0 & 46.0661 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

모델 추종 제어기를 설계하여 구한 폐회로의 고유진동수와 감쇠계수는 표 2.와 같다.

그림 2.는 초기조건에 대한 상태변수  $x_3$ 의 시간반응을 보여주고 있다. 모델추종 제어기법을 이용한 폐회로 반응이 모델을 잘 따라가고 있음을 볼 수 있다. 그림 3.은 이 때의 제어입력을 보여준다.

## 4.2 유연 구조물

유연 구조물로 그림 4.와 같은 의팔보의 수직진동 문제를 생각한다. 본 논문의 경우 유한요소법을 이용하여 시스템 상태변수 방정식을 얻었으며, 네 개의 요소를 사용하였다.

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = Du$$

$$x^T = [w_1 \ \theta_1 \ w_2 \ \theta_2 \ w_3 \ \theta_3 \ w_4 \ \theta_4]$$

$$u^T = [u_1 \ u_2]$$

이 시스템의 개회로 고유진동수와 감쇠계수는 표 3.과 같다. 모델의 차수를 제어입력의 수와 맞추는 것이 가장 좋은 제어 결과를 가져 오는데, 이는 제어법칙 설계 과정중 의사 역행렬이 존재하기 때문이다. 즉, 제어입력의 수가 모델의 차수와 같아지면 의사 역행렬이 역행렬로 대치되어 모달행렬의 전치행렬을 사용하여 계산이 정확해진다. 그러므로; 설계목적에 따라서 적합한 모델의 차수를 결정할 수 있다.

본 논문에서는 모델의 차수를 제어입력의 수와 같이 잡고 감쇠계수 0.707, 고유 진동수는 개회로일때의 값을 사용하였다. 모델 추종 제어기를 설계하여 구한 폐회로의 고유진동수와 감쇠계수는 표 4.와 같다.

그림 5.는 모델의 차수를 매개변수로 하였을 때, 제어기를 설계한 뒤 폐회로 반응을 보여주고 있다. 앞에서 설명된 바와 같이 모델의 차수가 제어입력의 수와 같을 때, 가장 좋은 결과를 보여주고 있다. 그러나, 그림 6.에서 보듯이 모델의 변수를 정확히 따라가기 위해서 제어입력의 크기가 증가함을 알 수 있다. 그림 7.은 모델의 차수를 이차로 했을 때 개회로와 폐회로의 반응을 보여주고 있다.

## 4.3 강건성

시스템의 모델링에서 오차가 있거나 몇가지 매개변수값이 변화하면 시스템 상태방정식이 달라진다. 설계된 제어기가 얼마나 강건하냐는 문제는 이 변화된 시스템의 반응을 살펴봄으로써 알 수 있다.

그림 8-10.은 유연 구조물의 질량 행렬과 강성 행렬의 값을 변화시킨 경우의 상태변수와 제어입력의 시간반응을 보여준다. LQR 제어기를 이용한 시간반응과 비교하여 볼 때 모델 추종 제어기법도 강건함을 알 수 있다.

그림 11-13.은 유연 구조물의 유한 요소법 모델에서 첫 번째 요소의 EI값을 15% 변화시킨 경우이다. 이는 질량 행렬에는 영향을 주지 않고 강성 행렬에만 영향을 준다. 역시 LQR 제어기의 경우와 비교해 보았을 때 강건함을 알 수 있다.

## 5 결론

본 논문에서는 유연 구조물의 진동의제를 위하여 모델추종 제어기법을 이용하였다. 일차 시스템에 대해서 개발되어 있는 법칙을 이차 시스템에 적용하기 위하여 물리적 특성을 고려한 확장된 제어법칙을 구하였다. 모델의 방정식은 이차계의 바람직한 감쇠계수와 고유 진동수를 이용하여 얻을 수 있었다. 3 질량계와 유연 구조물에 대한 수치 예에서 모델추종 제어기법의 유용성을 알아보았고, 시스템의 변화시 제어기의 강건성을 조사한 결과, 바람직한 성능을 가짐을 알 수 있었다.

## References

- [1] Tyler, J.S.Jr., "The Characteristic of Model Following Systems as Synthesized by Optimal Control," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-9, October 1964, pp. 485-498
- [2] Kreinder, E. and Rothschild, D., "Model Following in Linear Quadratic Optimization," *AIAA Journal*, Vol. 14, No. 7, July 1976, pp. 835-842
- [3] Trankle, T.L., and Bryson, A.E.Jr., "Control Logic to Track the Outputs of a Command Generator or Randomly Forced Target," *Journal of Guidance and Control*, Vol. 1, No. 2, March-April 1978, pp. 130-135
- [4] Kim, Y.D., and Wie, S.K., "Application of Stochastic Optimal Model Following Control System to Airplane Automatic Landing in Wind Disturbances," *Journal of the Korean Society for Aeronautical & Space Sciences*, Vol. 13, No.1, April 1985, pp. 54-66

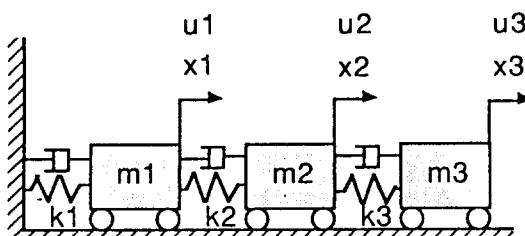


Fig. 1 Diagram of 3 mass system

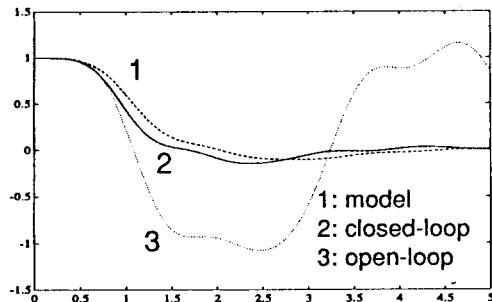


Fig. 2 State variable  $x_3$  (3 mass system)

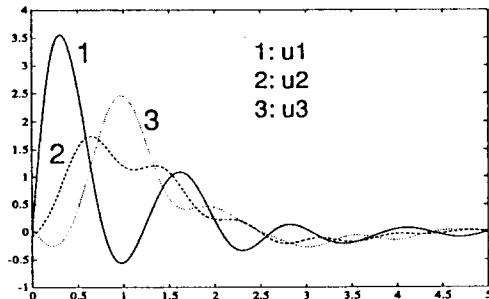


Fig. 3 Control input of 3 mass system

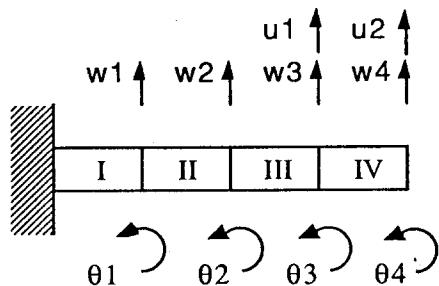


Fig. 4 FEM model of flexible structure

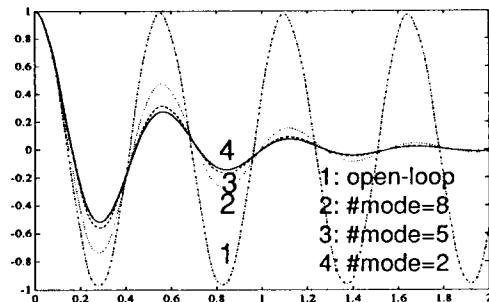


Fig. 5 Tip displacement of beam

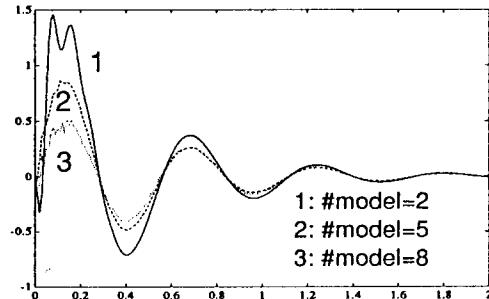


Fig. 6 Control input  $u_1$  of beam

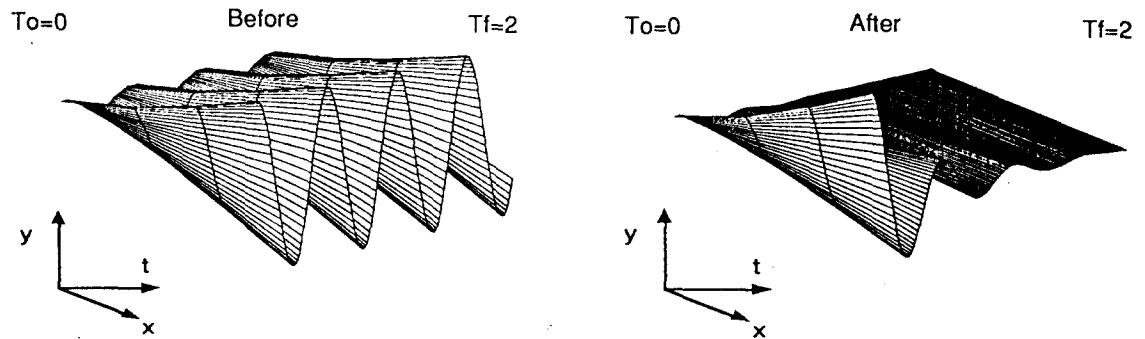


Fig. 7 Before control vs. After control

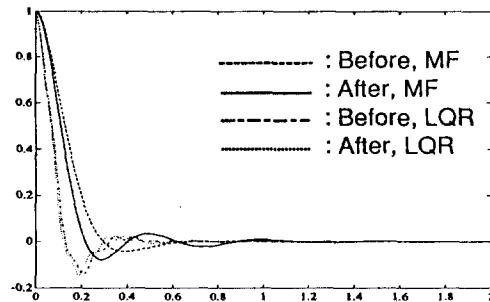


Fig. 8 Tip displacement of M, K's varying

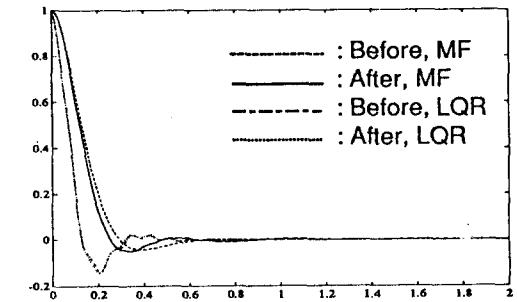


Fig. 11 Tip displacement of EI's varying

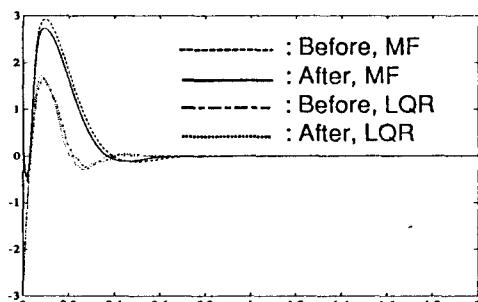


Fig. 9 Control input u1 of M, K's varying

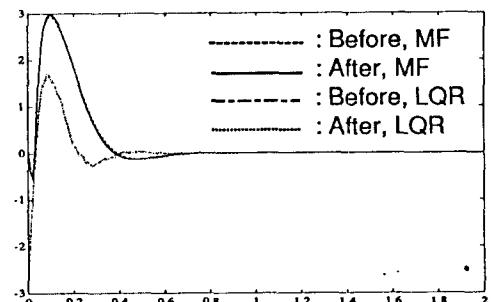


Fig. 12 Control input u1 of EI's varying

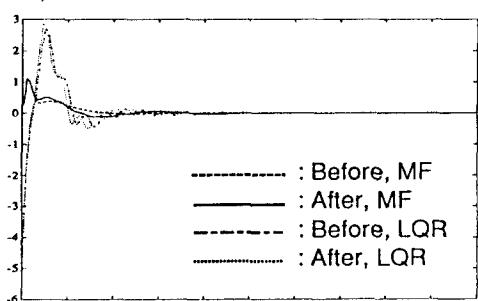


Fig. 10 Control input u2 of M, K's varying

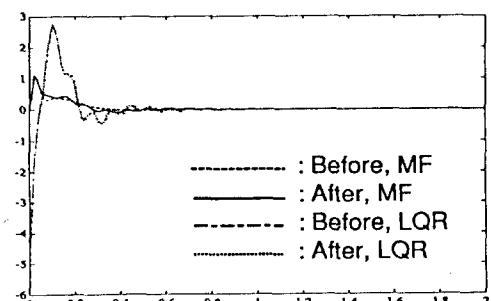


Fig. 13 Control input u2 of EI's varying

Table 1: Natural Frequencies and Damping Ratios of  
Open-loop 3 Mass System, \*(rad/sec)

| Mode | $\omega_n^*$ | $\zeta$ |
|------|--------------|---------|
| 1    | 1.4447       | 0.0011  |
| 2    | 4.4721       | 0.0023  |
| 3    | 6.9219       | 0.0035  |

Table 2: Natural Frequencies and Damping Ratios of  
Closed-loop 3 Mass System, \*(rad/sec)

| Mode | $\omega_n^*$ | $\zeta$ |
|------|--------------|---------|
| 1    | 1.5213       | 0.3964  |
| 2    | 4.4749       | 0.1145  |
| 3    | 6.9227       | 0.0731  |

Table 3: Natural Frequencies and Damping Ratios of  
Open-loop Flexible Structure, \*(rad/sec)

| Mode | $\omega_n^*$ | $\zeta$ |
|------|--------------|---------|
| 1    | 11.5         | 0.001   |
| 2    | 72.2         | 0.001   |
| 3    | 203.6        | 0.001   |
| 4    | 401.6        | 0.001   |
| 5    | 746.9        | 0.001   |
| 6    | 1199.5       | 0.001   |
| 7    | 1901.6       | 0.001   |
| 8    | 3120.2       | 0.001   |

Table 4: Natural Frequencies and Damping Ratios of  
Closed-loop Flexible Structure, \*(rad/sec)

| Mode | $\omega_n^*$ | $\zeta$ |
|------|--------------|---------|
| 1    | 11.5         | 0.3163  |
| 2    | 72.2         | 0.0424  |
| 3    | 203.6        | 0.0010  |
| 4    | 401.6        | 0.0010  |
| 5    | 746.9        | 0.0010  |
| 6    | 199.5        | 0.0010  |
| 7    | 1901.6       | 0.0010  |
| 8    | 3120.2       | 0.0010  |