

항공기 운동분리의 비선형 최적화를 이용한 고유공간지정법의 응용

이승재, 김유단
서울대학교 항공우주공학과

Airplane Mode Decoupling Using Eigenstructure Assignment via Non-linear Optimization

Seungjae Lee and Youdan Kim
Department of Aerospace Engineering, Seoul National University

ABSTRACT

For a multi-input, multi-output system, it is widely known that feedback control gain presents extra freedom pole placement problem. An eigenstructure assignment utilizes this freedom for assignment of all or some elements of the closed-loop eigenvectors. In this paper, a nonlinear optimization technique is adopted to obtain a small gain controller that assigns closed-loop eigenvalues and elements of eigenvectors simultaneously. To illustrate the approach, a numerical example of the Airplane mode decoupling using an advanced fighter is shown.

1 서론

제어가능한 다입력 다출력(MIMO) 시스템의 경우, 되먹임 이득을 적절히 선택함으로써 설계자가 원하는 곳에 폐루프 시스템의 고유치를 위치시킬 수 있으며, 고유벡터 또한 적절한 모습으로 지정할 수 있음이 알려져 있다. 이러한 경우, 보통 되먹임 이득이 유일하게 결정되지 않고 설계자가 사용하는 수치적 방법에 의해서 변화하게 된다.

현재까지의 고유공간 지정법들은 고유치의 위치 지정 및 고유벡터의 모습을 어떻게 지정할 것인가에 대해서 연구되어 왔으며, 근래에 들어서 고유치나 고유벡터의 위치가 유일하게 지정되지 않음을 적극적으로 이용하여, 강건성을 증가시키거나 이득을 작게 하는 방법들이 제시되고 있다.

본 논문에서는, 고유공간 지정법으로 제어를 설계할 때 여분의 자유도를 보다 효율적으로 사용하여 되먹임 이득을 작게 만들기 위해 기존의 대수적 방법과는 다른 반복적이고 점근적인 고유공간 지정법을 제안하고 있다.

2 문제의 수식화

제어가능한 다입력-다출력(MIMO) 선형시스템은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (1)$$

여기에서 A 는 $n \times n$ 시스템행렬이고 B 는 $n \times m$ 제어입력행렬이며, C 는 $r \times n$ 인 출력행렬이다. 그리고, x 는 $n \times 1$ 인 상태벡터, u 는 $m \times 1$ 인 입력벡터, y 는 $r \times 1$ 인 출력벡터이다.

위의 시스템에 출력되먹임제어(output feedback control)를 위하여 입력벡터 u 를 다음과 같이 놓을 수 있다.

$$u = -KCx \quad (2)$$

식 (1)과 (2)를 이용하면 폐루프 시스템은 다음과 같이 표현된다.

$$\dot{x} = (A - BKC)x \quad (3)$$

그리고, 폐루프 시스템의 고유치문제는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{Right: } (A - BKC)\phi_i &= \lambda_i \phi_i \\ \text{Left: } (A - BKC)^T \psi_i &= \lambda_i \psi_i, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (4)$$

여기에서 λ_i 는 고유치이며, ϕ_i, ψ_i 는 각각 λ_i 에 대응하는 우측고유벡터와 좌측고유벡터이다. 위의 고유벡터들은 편리를 위하여 다음과 같이 정규화시킨다.

$$\begin{aligned} \phi_i^T \phi_i &= 1 \\ \psi_i^T \psi_j &= \delta_{ij} \end{aligned} \quad (5)$$

주어진 시스템이 제어가능하고 관측가능하며 B, C 행렬의 차수는 각각 m, r 일때, 되먹임 이득을 조절하여 $\max(m, r)$ 의 폐루프 고유치를 지정할 수 있고, $\max(m, r)$ 의 폐루프 고유벡터가 각각 $\min(m, r)$ 만큼 부분적으로 지정될 수 있음이 밝혀져 있다.¹

일반적으로, 설계자는 고유치의 위치를 어느 곳에 놓아야 하는지를 알고 있으나, 고유벡터인 경우 전체를 결정하는 것은 정보의 부족이나 실질적인 이득이 없으므로 행하지 않고 있으므로, 되먹임 이득이 어분의 자유도를 갖는 경우가 많다. 지금까지의 고유공간지정법에서는 대수적 방법을 사용하는 관계로 어분의 자유도를 적절히 이용하기 힘든 점이 있다. 이러한 이유로 본 논문에서는 어분의 자유도를 되먹임 이득의 최소화에 적절히 이용하기 위하여 고유공간지정을 대수적 방법을 이용하지 않고, 최적화 기법을 응용한 수치반복법을 사용하였다. 이 수치반복법은 다음 절에서 설명하기로 한다.

3 고유치 및 고유벡터의 지정

3.1 되먹임 이득의 최소화 기법

고유공간지정법을 이용하여 제어기를 설계할 때 어분의 되먹임 이득행렬의 원소를 조절하여, 되먹임 이득의 원소로 이루어진 변량벡터(parameter vector)의 노름(norm)값을 최소화 시키는 문제는 다음과 같이 수식화 할 수 있다.

$$f(p) = 0 \quad (6)$$

여기에서,

$$f = \begin{bmatrix} \lambda_{1d} - \lambda_1(p) \\ \vdots \\ \lambda_{nd} - \lambda_n(p) \\ \phi_{1d} - \phi_1(p) \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$p = [K_{11} \cdots K_{1r}, K_{21} \cdots K_{mr}]^T \quad (8)$$

이며, λ_{id} 는 설계자가 위치시키고자하는 고유치값들이 되고 ϕ_{id} 는 고유벡터의 원소중 지정하고자하는 것들을 묶어서 벡터 형태로 나타낸 것이다.

어분의 자유도를 갖는 고유공간지정의 경우 식 (6)은 변수 p 의 원소의 개수가 [함수의 개수보다 많게 되며, 이러한 이유로 노름의 원소로 이루어진 변량벡터를 최소화하는 최적화 문제를 구성할 수 있다.

식 (6)의 문제에서 변량벡터의 노름의 최소값을 구하는 것은 본 문제가 상당한 비선형성을 갖고있는 관계로 전역최소값(global minimum value)을 구하는 것이 매우 어렵다. 이러한 이유로 본 논문에서는 직접적으로 변량벡터 p 의 노름값을 최소화시키는 방법을 사용하지 않고, 식 (6)을 만족시키기 위해 반복계산을 할때 사용되는 Δp 의 노름값을 최소화 시키는 방법을 사용하였다. 이 방법은 설계자가 고유치나 고유벡터를 지정할 때 그 변화하는 방향을 미리 결정하여 시스템을 많이 변화시키지 않을 수 있으며 되먹임 이득의 원소를 실수(real number)로 한정지을 수 있다. 이 방법을 간단히 살펴보면 다음과 같다.²

$$\text{Minimize : } J = \Delta p^T \Delta p \quad (9)$$

$$\text{Subject to } f(p_{old}) + F_p \Delta p = 0 \quad (10)$$

여기에서

$$F_p \equiv \left[\frac{\partial f}{\partial p} \right]_{p=p_{old}} \quad (11)$$

윗 식을 목적에 맞도록 수식화하여 Δp 에 관한 식으로 나타내면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Delta p = F_p^\dagger f(p_{old}) \quad (12)$$

여기에서 상첨자 \dagger 는 의사역행렬(pseudo inverse)를 의미하며, 특이치 분리(singular value decomposition)에 의해 계산되어진다. 식 (10)을 이용하면 반복계산에 필요한 식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$p_{new} = p_{old} + \Delta p \quad (13)$$

식 (13)은 F_p 를 계산할때 선형임을 가정하여 나온 것이므로, 최적화 문제가 선형이거나 약한 비선형이라면 수정없이 사용할 수 있다. 그러나, 일반적인 고유공간지정문제 특히, 고유벡터지정문제는 상당한 비선형성을 지니게 되므로 다음과 같이 변형된 식을 사용하여야 한다.

$$p_{new} = p_{old} + \nu \Delta p \quad (14)$$

여기에서 ν 는 수렴속도를 조절하는 역할을 하는데 보통 $0 < \nu \leq 1$ 인 값을 갖게 되며, 각 단계에서 적절히 조절해 주어야 한다.

3.2 고유치의 지정

식 (6)을 보게되면 원하는 위치의 고유치와 현재 상태의 고유치가 일치될 때, $f(p)$ 에서 고유치 부분의 조건이 만족됨을 알 수 있다. 그리고, 이를 만족하도록 반복계산을 하려면 고유치의 변량벡터에 대한 미분값이 필요함은 식 (11)에서 나타난다. 이러한 이유로 고유치의 미분값을 유도하면 다음과 같다.

식 (3), (4), (5)를 이용하고 이미 알려진 사실을 이용하면³ 다음과 같은 것을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial p_k} = \psi_i^T \frac{\partial}{\partial p_k} (A - BKC) \phi_i \quad i = 1, \dots, n \quad (15)$$

$$= -\psi_i^T B \frac{\partial K}{\partial p_k} \phi_i \quad k = 1, \dots, m \times r \quad (16)$$

여기에서, p_k 는 p 의 k 번째 요소이며 스칼라(scalar)값이다.

고유치의 위치를 변화시킬 때에는, 적절히 중간목표지점을 정하여 점근적으로 최종목표지점까지 이동시키는 것이 수치계산시 안정적이고, 고유치들을 보내고 싶은 방향으로 보내기에 편리하다.

3.3 고유벡터의 지정

고유치와 비슷한 원리로 고유벡터를 지정할 수 있는데, 실제적으로 고유벡터 전체를 지정하는 것이 아니고, 고유벡터 요소중 몇 부분만을 지정하게 된다. 그러나, 지정하고자하는 고유벡터 요소만의 변량에 대한 미분값을 따로 구할 수는 없으므로, 고유벡터의 미분값을 구하여 필요부분을 취해야한다.

고유벡터를 지정하기 위해서는 고유치의 경우와 비슷하게 고유벡터의 변량에 대한 미분값이 필요하다. 고유벡터의 미분값은 다음과 같이 정리될 수 있다.³

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial p_k} = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \phi_j \quad (17)$$

여기에서

$$\alpha_{il} = -\frac{1}{\lambda_l - \lambda_i} \left\{ \psi_l^T \frac{\partial}{\partial p_k} (A - BKC) \phi_i \right\} \quad i \neq l \quad (18)$$

$$= -\sum_{j=1, j \neq i}^n \alpha_{ij} \phi_j^T \phi_i \quad i = l \quad (19)$$

식 (19)를 정리하여 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\alpha_{il} = \frac{1}{\lambda_l - \lambda_i} \psi_l^T B \frac{\partial K}{\partial p_k} C \phi_i \quad i \neq l \quad (20)$$

본 논문에서 고유공간지정을 할때, 고유치를 먼저 목표지점에 위치시킨후 고유치와 고유벡터를 동시에 만족시키도록 다시금 반복계산을 하는 방법을 사용하였는데, 이는 고유치를 원하는 지점에 위치시키는 방법이 여러개의 중간목표지점을 갖는 이유로 중간지점에서의 고유벡터가 어떠한 모습을 갖는 것이 타당한지에 관한 자료가 부족하였고, 또한 수치계산시 불필요한 불안정성과 계산시간을 단축시키기 위해서였다.

4 수치예

본 논문에서 고유공간지정을 위해 택한 모델은, CCV특성을 알아보기 위해 만들어진 AFTI/F-16의 중운동 단주기운동이다.⁴ 이 모델의 비행상태는 고도 $h = 3000$ feet, 속도 $M = 0.6$ 의 수평비행상태이다.

식 (1)에서의 각 상태변수, 제어입력, 그리고 출력벡터는 다음과 같다.

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} \alpha \\ q \\ \gamma \\ \delta_e \\ \delta_f \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{--- AOA} \\ \text{--- pitch rate} \\ \text{--- flight path angle} \\ \text{--- elevator deflection} \\ \text{--- flaperon deflection} \end{array}$$

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} \delta_{ec} \\ \delta_{fc} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{--- elevator command} \\ \text{--- flaperon command} \end{array}$$

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} q \\ n_{zp} \\ \gamma \\ \delta_e \\ \delta_f \end{bmatrix} \quad \text{--- normal acc. at pilot's station}$$

그리고, 시스템행렬은 다음과 같다.

$$A = \begin{bmatrix} -1.341 & 0.9933 & 0 & -0.1698 & -0.2518 \\ 43.223 & -0.8693 & 0 & -17.251 & -1.5766 \\ 1.341 & 0.0067 & 0 & 0.1698 & 0.2518 \\ 0 & 0 & 0 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -20 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 20 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 47.76 & -0.268 & 0 & -4.56 & 4.45 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

위에 나타난 모델의 개루프 고유치를 구하면 아래에 나타나 있듯이 일반적인 비행기와는 다르게 모든 극점이 실축선상에 존재하고, 단주기 운동의 극점중 하나는 불안정한 모습을 보인다.

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 5.452 \\ \lambda_2 &= -7.662 \\ \lambda_3 &= 0.0 \\ \lambda_4 &= -20 \\ \lambda_5 &= -20 \end{aligned}$$

위에 나타나 있는 모델에 적용할 CCV제어모드는 피치지시모드 (Pitching Pointing Mode : α_1 mode), 또는 수직천이모드 (Vertical Translation Mode : α_2 mode)로서 AOA α 와 비행경로각 γ 의 모드를 분리하는 것이 목적이다. 그리고, 피치각, 받음각, 비행경로각의 관계는 $\gamma = \theta - \alpha$ 이므로, γ, α 또는 θ, γ 를 모드분리하면 목격하는 CCV제어모드를 구현할 수 있다. 본 논문에서는 γ, α 를 모드분리하는 방법을 선택하였다.

4.1 일반적 방법인 경우

이미 알려진 방법과 본 논문에서 제안하는 방법의 결과를 비교하기 위해 일반적 방법으로 고유공간지정을 행한 경우의 결과를 적으면 다음과 같다.⁵

원하는 고유치의 값은 다음과 같다.

$\lambda_{1,2d}$	$= -5.6 \pm j4.2$	short-period mode
λ_{3d}	$= -1.0$	pitch-attitude mode
λ_{4d}	$= -19.0$	elevator actuator mode
λ_{5d}	$= -19.5$	flaperon actuator mode

그리고, 원하는 고유치에 대응하는 고유벡터는 모드분리를 위해서 <표 1.>과 같이 구할 수 있다.

이 경우의 되먹임 이득과 그 노음은 다음과 같다.

$$K = \begin{bmatrix} -0.931 & -0.149 & -3.25 & -0.513 & 0.747 \\ 0.954 & 0.210 & 6.10 & 0.537 & -1.04 \end{bmatrix}$$

$$\|K\|_F = 7.1193$$

4.2 되먹임 이득을 억제한 경우

고유치는 앞의 예와 같게 지정하고, 고유벡터의 지정에서는 본 논문에서의 목적이 받음각과 비행경로각의 모드분리에 있으므로 원하는 고유벡터의 모습을 변형 시킨 것이 <표 2.>에 나타나 있으며, 앞에서 설명한 방법으로 되먹임이득을 억제하면서 구한 고유벡터의 모습이 역시 <표 2.>에 나타나 있다.

이 경우의 되먹임 이득과 그 노음은 다음과 같다.

$$K = \begin{bmatrix} -0.602 & -0.098 & -2.028 & -0.497 & 0.394 \\ -0.626 & -0.034 & 0.379 & 2.194 & 0.630 \end{bmatrix}$$

$$\|K\|_F = 3.2797$$

앞의 일반적인 방법에 비해서 되먹임 이득의 요소값중 최대치는 약 $\frac{1}{3}$ 정도로 줄어들었고, 전체적인 되먹임이득행렬의 노음값은 $\frac{1}{2}$ 정도로 감소된 모습을 보인다.

두 경우의 모드분리 정도를 비교하기 위해 받음각의 초기치가 0.2 rad 에서 0 rad 으로 변할때, 비행경로각 γ 의 변화정도를 살펴보았다. 그림 1.은 일반적인 방법을 사용하여 고유공간 지정을 하여 설계한 제어기를 이용했을때 받음각, 피치변화율, 그리고 비행경로각의 변화를 나타낸 것이고, 그림 2.는 같은 경우에 제어입력의 변화를 나타낸 것이다. 받음각의 변화가 최대 0.2 rad 인데 비하여 비행경로각의 최대변화는 받음각에 대해 5.76%로서 상당히 양호한 반응을 보이고 있다.

그림 3.은 되먹임이득을 억제하여 제어기를 설계했을때 각 비행상태변수의 변화를 나타내었으며, 그림 4.는 같은 경우의 제어입력의 변화를 나타내고 있다. 이 경우에는 비행경로각의 최대변화가 받음각의 변화에 대해 16.32%로서 일반적인 방법 사용된 경우에 비해 상대적으로 큰 값을 나타내고 있으나, 비행모드분리를 행함에 있어서 커다란 문제점을 야기시키지는 않고 있다. 그리고, 제어입력의 경우는 일반적 경우보다 작은 값이 필요함을 그림이 보여주고 있다.

그림 5.는 일반적인 경우와 되먹임 이득을 억제한 경우에 받음각과 비행경로각의 변화를 나타내고 있다. 되먹임이득을 억제한 경우가 성능이 약간 떨어짐을 알 수 있고, 천이시간도 약간 길어짐

이 나타나고 있다. 그러나, 성능의 차이는 허용할만한 수준이며, 천이시간의 연장은 거의 무시할 정도로 짧다.

5 결론

본 논문에서는 고유공간 지정법을 수행할 때, 일반적으로 사용되어 지는 대수적방법에 비해 되먹임 이득의 크기를 작게할 수 있는 방법을 제시하였다. 새롭게 제시된 방법을 비행운동모드 분리에 적용해본 결과, 기존의 방법과 커다란 차이가 없는 성능을 보장하면서 되먹임이득의 크기를 줄일 수 있었다.

이 방법을 이용함으로써 작은 크기의 되먹임 이득을 얻을 수 있으나, 실제적으로 계산을 수행할 때, 일반적인 방법에 비해 상당히 많은 시간이 요구되며, 앞에서 언급되지는 않았지만 되먹임 이득의 자유도가 작아질 수록 본 논문에서 제시한 방법을 적용하는데 어려움이 존재한다. 그러므로, 제어할 대상의 고유치 및 고유벡터를 지정할 때, 지정할 갯수가 되먹임이득의 요소의 수에 비해서 적정수준으로 작은 경우 본 논문에서 제시한 방법을 사용할 경우 보다 작은 크기의 되먹임이득으로 일반적 방법으로 고유공간지정을 한 경우와 비슷한 성능을 보장할 수 있을 것이다.

참고문헌

1. Andry, A.N., Shapiro, E.Y., and Chung, J.C., "Eigenstructure Assignment for Linear Systems," *IEEE Transaction on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. AES-19, Sept. 1983, pp. 711-729.
2. Junkins, J.L., and Kim, Y., "Introduction to Dynamics and Control of Flexible Structures," *AIAA Education series*, published by AIAA, New York, 1993.
3. Lim, K.B., Junkins, J.L., and Wang, B.P., "Re-examination of Eigenvector Derivatives," *Journal of Guidance and Control*, Vol. 10, No. 6, Nov.-Dec., 1987, pp. 581-587.
4. Sobel, K.M., and Shapiro, E.Y., "A Design Methodology for Pitch Pointing Flight Control System," *Journal of Guidance and Control*, Vol. 8, No. 2, March-April 1985, pp. 181-187.
5. Stevens, B.L., and Lewis, F.L., "Aircraft Control and Simulation," JOHN WILEY & SONS, INC., 1992, pp. 354-358.

Table 1: Desired and Achivable Eigenvectors

Desired Eigenvectors						
$\begin{bmatrix} 1 \\ X \\ 0 \\ X \\ X \end{bmatrix}$	$\pm j$	$\begin{bmatrix} X \\ 1 \\ 0 \\ X \\ X \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} X \\ 0 \\ 1 \\ X \\ X \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} X \\ X \\ X \\ 1 \\ X \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} X \\ X \\ X \\ X \\ 1 \end{bmatrix}$	α q γ δ_e δ_f
α/q		γ	δ_e	δ_f		
Achivable Eigenvectors						
$\begin{bmatrix} -0.93 \\ 1 \\ 0 \\ -5.13 \\ 8.36 \end{bmatrix}$	$\pm j$	$\begin{bmatrix} 1 \\ -9.5 \\ 0 \\ 0.129 \\ -5.16 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -2.8 \\ 3.23 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.051 \\ 1.07 \\ -0.006 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.06 \\ -0.014 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	α q γ δ_e δ_f
α/q		γ	δ_e	δ_f		

Table 2: Desired and Achivable Eigenvectors

Desired Eigenvectors						
$\begin{bmatrix} 1 \\ X \\ 0 \\ X \\ X \end{bmatrix}$	$\pm j$	$\begin{bmatrix} X \\ X \\ 0 \\ X \\ X \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} X \\ 0 \\ 1 \\ X \\ X \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} X \\ X \\ X \\ 1 \\ X \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} X \\ X \\ X \\ X \\ 1 \end{bmatrix}$	α q γ δ_e δ_f
α/q		γ	δ_e	δ_f		
Achivable Eigenvectors						
$\begin{bmatrix} 1 \\ -5.88 \\ 0 \\ 2.39 \\ -6.78 \end{bmatrix}$	$\pm j$	$\begin{bmatrix} 0.06 \\ 3.86 \\ 0 \\ 2.85 \\ -2.33 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.97 \\ 0 \\ 1 \\ -2.66 \\ 3.00 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.090 \\ 0.844 \\ 0.045 \\ 1 \\ -3.625 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.0228 \\ -0.208 \\ -0.012 \\ -0.260 \\ 1 \end{bmatrix}$	α q γ δ_e δ_f
α/q		γ	δ_e	δ_f		



