

## 이산시간 비선형 시스템에 대한 반복학습제어

° 안현식\*, 최종호\*\*, 김도현\*

\* 국민대학교 전자공학과, \*\* 서울대학교 제어계측공학과

### Iterative Learning Control for a Class of Discrete-Time Nonlinear Systems

° Hyun-Sik Ahn\*, Chong-Ho Choi\*\*, and Do-Hyun Kim\*

\* Dept. of Electronics Eng., Kookmin University

\*\* Dept. of Control and Instrument. Eng., Seoul National University

#### Abstract

For a class of discrete-time nonlinear systems, an iterative learning control method is proposed and a sufficient condition is derived for the convergence of the output error. The proposed method is shown to be less sensitive to modelling errors and the uniform boundedness of the output error is guaranteed even in the presence of initial state errors. It is illustrated by simulations that the actual output converges to a desired output within the tolerance bound and convergence performance is improved by the presented method.

#### 1. 서론

실제 산업공정에서 로봇트 및 수치제어 기계등에 요구되는 작업들의 특성은 일반적으로 주어진 임무를 반복적으로 수행하는 것으로서 특정한 시간구간 전체에서 실제 출력이 원하는 출력을 정밀하게 추종할 것이 요구된다. 그러나 기존의 대부분의 제어 방법들에서는 이러한 특성이 고려되지 않았으며 대부분 점근적 안정성만을 보장하기 때문에 주어진 시간구간 전체에 걸쳐서 높은 제어 정밀도를 얻기가 쉽지 않다. 이와 같이 주어진 작업을 반복적으로 수행하는 시스템을 효과적으로 제어하기 위한 방법으로서 반복학습제어 (iterative learning control) 가 제안되었다.

반복학습제어 방법은 제어대상 시스템에 대하여 유한한 시간구간에서 임의의 원하는 출력이 주어졌을 때, 실제 출력이 주어진 구간 전체에서 출력오차의 허용한계를 만족하면서 원하는 출력을 따라가도록 하는 제어입력을 찾는 방법이다. 이러한 학습제어 방법은 주로 연속시간 시스템에 대하여 연구되고 있었으나[1]-[3], 과거 시행시의 제어 시스템에 관한 정보를 저장하는 것이 필요하고 저장된 데이터를 처리

하는 과정이 요구되므로 실제로 반복학습제어를 구현할 때에는 이산형 학습제어기를 이용하는 것이 바람직하다. 이러한 관점에서 Togai와 Yamano[4], Ishihara 등[5] 이 이산시간 선형 시스템에 대한 학습제어를 연구하였는데, [4]에서는 전체 상태벡터를 출력으로 하고 원하는 성능지수를 선정한 후 최적화 기법을 이용하여 학습이득을 결정하는 방법을 제시하였으며, [5]에서는 과거 시행시의 출력오차의 조합과 시스템의 임펄스 응답을 이용한 제어 법칙을 제안하였다. 또 Geng등[6]은 선형 시불변 시스템에 대하여 전체 상태벡터를 출력으로 한 경우에 반복학습제어 시스템의 2 차원 모델을 세우고 2 차원 안정도 이론을 사용하여 시스템 출력의 수렴성을 보일 수 있음을 밝혔다. 또한 반복학습제어를 실제로 교류전동기[7] 또는 로봇트 매니플레이터[2],[8]에 적용하여 우수한 실험결과를 얻을 수 있음이 발표되고 있다.

본 논문에서는 이산시간 비선형 시스템에 대하여 반복학습제어를 적용할 때 출력오차의 수렴성을 해석하고 초기상태의 오차 및 특정한 외란의 존재시에 학습제어시스템의 강인성을 살펴보기로 한다. 또 학습제어기의 수렴성능을 향상시키기 위해서 주어진 시간구간을 짧은 구간으로 나누어 학습시킨 후 종합하는 방법을 제안한다. 임의의 비선형 시스템에 대한 시뮬레이션 결과를 통하여 반복학습제어의 효용성을 검토하고 수렴성능이 개선됨을 확인하기로 한다.

#### 2 문제정의 및 가정

다음과 같은 형태의 비선형 시스템을 고려한다.

$$\begin{aligned} x(i+1) &= f(x(i),i) + B(x(i),i)u(i) \\ y(i) &= G(i)x(i). \end{aligned} \tag{1}$$

### 3. 반복학습제어

여기서  $x(i) \in R^n$  은 상태벡터,  $u(i) \in R^m$  은 입력벡터 그리고  $y(i) \in R^p$  는 출력벡터이며  $f: R^n \times [0, N] \rightarrow R^n$ ,  $B: R^n \times [0, N] \rightarrow R^{n \times m}$  및  $G \in R^{p \times n}$  는 각각 적절한 차원을 갖는다. 본 논문에서의 제어목적은 임의의 원하는 출력과 출력오차의 허용한계가 주어졌을 때, 주어진 유한 시간 구간내에서 실제 출력이 항상 허용오차 이내로 원하는 출력을 추종하도록 하는 것이다. Hwang등[9] 은 (1) 에서  $G(i) = I$ , 즉  $y(i) = x(i)$  인 경우에 대하여, 모든 상태벡터를 이용하여 제어입력을 학습시키는 제어법칙을 제안하고 수렴성을 해석하였다. 이 경우에는 모든 상태벡터에 대하여 원하는 상태를 전부 지정해주어야 하는데 모델링 오차의 존재시에 이것은 매우 어려우므로, 본 논문에서는 출력오차만을 이용하여 제어입력을 수정하는 학습법칙을 사용하기로 한다.

본 논문에서는 시행의 반복횟수를  $k$  로 나타내고  $k$  번째 시행시의 각 변수들은 침자  $k$  를 사용하여 표시한다. 또 벡터  $f = [f_1, \dots, f_n]^T$  와 행렬  $G = [g_{ij}]$  에 대하여  $\|f\| = \max_{1 \leq i \leq n} |f_i|$ ,  $\|G\| = \max_{1 \leq i \leq n} \left( \sum_{j=1}^m |g_{ij}| \right)$  로서 각각 정의하며 벡터함수  $h(i)$  에 대한  $\lambda$ -노음을  $\|h(i)\|_\lambda = \sup_{i \in [0, N-1]} \lambda^i \|h(i)\|$  로 정의한다.

시스템 (1) 에 대하여  $(x_0, u(i), i \in [0, N-1])$  로부터  $(x(i), i \in [0, N])$  로의 사상을  $S$ ,  $(x_0, u(i), i \in [0, N-1])$  로부터  $(y(i), i \in [0, N])$  로의 사상을  $R$  로 각각 정의할 때 다음이 성립한다고 가정한다.

- A1 사상  $S$  와  $R$  은 일대일 대응이다.  
 A2 함수  $f(\cdot, \cdot)$  및  $B(\cdot, \cdot)$  는  $i \in [0, N]$  에서  $x$  에 대하여 Lipschitz 함수이다. 즉, 다음 부등식을 만족하는 상수  $f_0$  및  $b_0$  가 존재한다.

$$\begin{aligned} \|f(x_1, i) - f(x_2, i)\| &\leq f_0 \|x_1 - x_2\|, \\ \|B(x_1, i) - B(x_2, i)\| &\leq b_0 \|x_1 - x_2\|. \end{aligned} \quad (2)$$

- A3 함수  $f(\cdot, \cdot)$ ,  $B(\cdot, \cdot)$  및  $G(\cdot)$  는 모든  $k$  에 대하여 다음을 만족하는 함수이다.

$$\begin{aligned} f_k(x_k(i), i) &= f(x_k(i), i), \quad i \in [0, N], \\ B_k(x_k(i), i) &= B(x_k(i), i), \quad i \in [0, N], \\ G_k(i) &= G(i), \quad i \in [0, N]. \end{aligned} \quad (3)$$

가정 A1 은 원하는 출력과 적절한 초기조건이 주어졌을 때 그 출력을 발생시키는 입력의 유일성을 나타내며 이것은 시스템이 역변환 가능한 것을 의미한다. 또 가정 A3 은 시스템의 매개변수들이 매 시행시  $[0, N]$ 에서 동일한 패턴으로 변한다는 조건으로서 산업용 로봇 또는 수치제어 기계 등의 시스템들은 이러한 특성을 갖는다고 생각할 수 있다.

이 절에서는 (1) 과 같은 형태의 비선형 시스템에 대하여 출력오차만을 이용하는 기본적인 형태의 학습제어법칙을 사용했을 때, 주어진 시간구간에서 출력이 원하는 출력에 완전히 수렴하기 위한 조건을 구하고, 외란의 존재시나 초기상태의 오차가 발생했을 때에도 출력오차는 유계임을 보이기로 한다. 여기서의 외란은 매 시행시 특정한 시간구간에서 반복적으로 인가되는 것으로서 그 크기 및 형태에 관한 사전지식이 없어도 학습 제어를 적용함으로써 이러한 외란의 영향을 완전히 제거할 수 있음을 보인다.

#### 3.1 수렴성 해석

시스템 (1) 에 대하여  $k$  번째 시행시의 출력오차를

$$e_k(i) = y_d(i) - y_k(i), \quad i \in [0, N]$$

라고 정의하고 다음과 같은 학습제어법칙을 적용하기로 한다.

$$u_{k+1}(i) = u_k(i) + L_1(i)e_k(i+1) + L_0(i)e_k(i), \quad i \in [0, N]. \quad (4)$$

위의 제어법칙은  $k+1$  번째 시행시의 입력을 결정하기 위하여  $k$  번째 시행시에서 얻은 출력오차만을 이용하는 것으로서  $L_1(i)$ ,  $L_0(i)$  는 각각 적절한 차원의 이득함수들이다.

다음의 정리에서 제어대상 시스템에 대하여 원하는 출력이 주어졌을 때 위와 같은 제어법칙을 반복적으로 사용함에 따라서 주어진 시간구간  $[0, N]$  내의 모든 시간에서 시스템의 출력이 원하는 출력에 수렴함을 보이기로 한다.

#### 정리

시스템 (1) 에 대하여 A1 - A3 이 성립한다고 가정한다. 학습제어법칙 (4) 를 적용하고, 이득함수  $L_1(i)$  를

$$\|I - L_1(i)G(i+1)B(x_k, i)\| \leq \rho < 1, \quad i \in [0, N] \quad (5)$$

가 만족되도록 선정할 수 있으면, 모든  $k$  에 대하여  $x_0(0) = x_k(0)$  일 때, 반복 시행을 계속함에 따라 출력오차는 영으로 수렴한다. 즉,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|e_k(i)\| = 0, \quad i \in [0, N]. \quad (6)$$

#### 증명

$y_d(i)$  를 발생시키는 입력과 그때의 상태변수를 각각  $u_d(i)$ ,  $x_d(i)$  라고 하면,  $e_k(i+1)$  은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$e_k(i+1) = G(i+1)x_d(i+1) - G(i+1)x_k(i+1)$$

$$= G(i+1)[(f(x_d, i) - f(x_k, i)) + (B(x_d, i) - B(x_k, i))u_d(i) + B(x_k, i)(u_d(i) - u_k(i))] \quad (7)$$

$$\left( \sup_{j \in [0, N]} \lambda^j \|\delta u_k(j)\| \right) \quad (14)$$

제어법칙 (4)를 (1)에 대입하고 (7)을 이용하면,  $\delta u_k(i) = u_d(i) - u_k(i)$  라고 정의할 때  $i \in [0, N]$ 에서

$$\begin{aligned} \delta u_{k+1}(i) &= [I - L_1(i)G(i+1)B(x_k, i)]\delta u_k(i) \\ &\quad - L_1(i)G(i+1)[(f(x_d, i) - f(x_k, i)) + (B(x_d, i) \\ &\quad - B(x_k, i))u_d(i)] - L_0(i)G(i)(x_d(i) - x_k(i)) \end{aligned} \quad (8)$$

이 성립함을 알 수 있다. 또 (8)의 양변에 노음을 취하고  $\delta x_k = x_d - x_k$  라고 정의한 후, 가정 A 2와 (5)를 이용하면

$$\begin{aligned} \|\delta u_{k+1}(i)\| &\leq \|I - L_1(i)G(i+1)B(x_k, i)\| \|\delta u_k(i)\| + b_{L_0} b_G \|\delta x_k(i)\| \\ &\quad + b_{L_1} b_G [f_0 \|\delta x_k(i)\| + b_0 b_{ud} \|\delta x_k(i)\|] \\ &\leq \rho \|\delta u_k(i)\| + (b_{L_1} b_G f_0 + b_{L_1} b_G b_0 b_{ud} + b_{L_0} b_G) \|\delta x_k(i)\| \end{aligned} \quad (9)$$

가 얻어지고, 여기서  $b_i$ 는 각 변수의 상한으로서  $i \in [0, N]$ 에서  $b_{L_1} = \sup_{i \in [0, N]} \|L_1(i)\|$ ,  $b_{L_0} = \sup_{i \in [0, N]} \|L_0(i)\|$ ,  $b_G = \sup_{i \in [0, N]} \|G(i)\|$ ,  $b_{ud} = \sup_{i \in [0, N]} \|u_d(i)\|$ ,  $b_1 = \sup_{i \in [0, N]} \|B(x_k, i)\|$ 이다. 또 시스템 (1)로부터 다음 관계식이 성립하고

$$\begin{aligned} x_d(i+1) - x_k(i+1) &= f(x_d(i), i) - f(x_k(i), i) + (B(x_d(i), i) \\ &\quad - B(x_k(i), i))u_d(i) + B(x_k(i), i)(u_d(i) - u_k(i)), \end{aligned} \quad (10)$$

따라서 (10)의 양변에 노음을 취하면

$$\|\delta x_k(i+1)\| \leq (f_0 + b_0 b_{ud}) \|\delta x_k(i)\| + b_1 \|\delta u_k(i)\| \quad (11)$$

가 된다. (11)과 모든  $k$ 에 대하여  $x_d(0) = x_k(0)$ 임을 이용하면

$$\|\delta x_k(i)\| \leq \sum_{j=0}^{i-1} (f_0 + b_0 b_{ud})^{i-j-1} (b_1 \|\delta u_k(j)\|) \quad (12)$$

이 성립하며,  $k_1 = b_{L_1} b_G f_0 + b_{L_1} b_G b_0 b_{ud} + b_{L_0} b_G$ ,  $k_2 = f_0 + b_0 b_{ud}$ 라고 각각 정의하면 (9)와 (12)로부터

$$\|\delta u_{k+1}(i)\| \leq \rho \|\delta u_k(i)\| + \sum_{j=0}^{i-1} k_1 k_2^{i-j-1} (b_1 \|\delta u_k(j)\|) \quad (13)$$

이 얻어진다. 위 (13)의 양변에  $\lambda^i$  ( $0 < \lambda < 1$ )를 곱하면 다음 식이 성립하며

$$\lambda^i \|\delta u_{k+1}(i)\| \leq \rho \lambda^i \|\delta u_k(i)\| + k_3 b_1 \sup_{i \in [0, N]} \left\{ \sum_{j=0}^{i-1} \lambda^{i-j} \right.$$

여기서  $k_3 = k_1 \sup_{i, j \in [0, N]} (k_2^{i-j-1})$ 이다. 또한 (14)에 대하여  $\lambda$ -노음의 정의를 적용하면 다음식이 얻어지고

$$\begin{aligned} \|\delta u_{k+1}(i)\|_\lambda &\leq [\rho + k_3 b_1 \frac{\lambda(1-\lambda^N)}{1-\lambda}] \|\delta u_k(i)\|_\lambda \\ &\leq \rho_1 \|\delta u_k(i)\|_\lambda, \end{aligned} \quad (15)$$

따라서 (5)로부터  $\rho < 1$ 인 것을 고려하면  $\lambda$ 를 충분히 작게 함으로써  $\rho_1 < 1$  되도록 할 수 있다. 따라서  $k \rightarrow \infty$ 일 때  $\|\delta u_k(i)\| \rightarrow 0, i \in [0, N]$ 가 되고  $\lambda$ -노음의 정의로부터

$$\lambda^{-N} \|\delta u_k(i)\|_\lambda \geq \sup_{i \in [0, N]} \|\delta u_k(i)\| \quad (16)$$

이므로  $k \rightarrow \infty$ 일 때  $\sup_{i \in [0, N]} \|\delta u_k(i)\| \rightarrow 0$ 이며, 또 (12)로부터  $k \rightarrow \infty$ 일 때  $\sup_{i \in [0, N]} \|\delta x_k(i)\| \rightarrow 0$ 이 되고, 따라서 (1)로부터 (6)이 얻어진다.

(증명끝)

위의 정리의 증명으로부터 알 수 있는 바와 같이 출력오차의 수렴성에 직접적인 영향을 미치는 것은  $e_k(i+1)$ 에 곱해지는 이득함수  $L_1(i)$  뿐이고  $L_0(i)$ 의 선정이 수렴성 여부를 좌우하지는 않는다. 이러한 사실은 모든  $k$ 에 대하여  $e_k(i+1)$ 이 항상 입력의 직접적인 영향을 전달해 주는 역할을 하고 있기 때문이다. 즉,  $e_k(i+1) = y_d(i+1) - y_k(i+1)$ 이고 여기서  $y_k(i+1) = G(i)f(x_k(i), i) + G(i)B(x_k(i), i)u_k(i)$ 이므로, 연속시간 시스템에서 출력오차의 도함수가 필요하듯이 [10] 이산시간 시스템에서는  $u_{k+1}(i)$ 를 적절히 수정시키기 위해서  $e_k(i+1)$ 의 사용이 요구됨을 알 수 있다. 그러나 적절한 이득함수  $L_1(i)$ 의 선정을 위해서는 시스템의 모든 상태들의 측정이 필요한 것을 시스템의 수렴조건 (5)로부터 알 수 있으며 이 때 이득함수  $L_1(i)$ 을  $[G(i+1)B(x_k(i), i)]^+$ 로서 선정하면 (5)에서  $\rho = 0$ 가 된다. 여기서  $x_k(i)$ 는 이미 실행된 시행에서의 상태 변수값이므로 메모리에 저장시켜서 이용할 수 있다. 여기서의 제어방법과 모든 상태벡터의 오차를 이용하여 제어입력을 수정해 나가는 [3], [9] 등의 방법을 비교해보면 [3], [9] 등에서는 상태들의 측정외에 모든 상태들의 제어가능성이 필요하며 또한 그들에 대해 추종가능한 원하는 상태들을 지정해주어야 하는데 비선형 시스템과 같이 일반적으로 정확한 모델링이 어려운 시스템에 대해서 이것은 매우 힘든 일이다.

### 3.2 강인성 해석

위의 정리에서는 시스템의 초기 상태가 원하는

초기상태와 항상 같다는 가정하에서 수렴성을 해석하였는데 실제로는 매 시행시 초기상태의 오차가 발생할 수 있다. 또한 미지의 외란이 반복적으로 인가되는 경우도 존재하므로 이러한 경우들에 대하여 출력오차의 거동을 고려할 필요가 있다. 다음의 따름정리에서는 이러한 문제를 다루기로 한다.

### 따름정리 1.

시스템 (1) 에 대하여 가정 A 1 - A 3 이 성립한다. 학습 제어기 (4) 를 적용하고 이득함수  $L_1(i)$  를

$$\|I - L_1(i)G(i+1)B(x_k, i)\| \leq \rho < 1, i \in [0, N] \quad (5)$$

가 성립하도록 선정할 수 있으면, 모든  $k$  에 대하여  $\|x_d(0) - x_k(0)\| \leq M$  를 만족하는 상수  $M > 0$  이 존재할 때 출력오차는 유계이다.

### 증명

정리의 증명중 (11) 에서  $\|\delta x_k(0)\| = \|x_d(0) - x_k(0)\| \leq M$  을 이용하여 진행해 나가면 (14) 에 대응하여

$$\lambda^i \|\delta u_{k+1}(i)\| \leq \rho \lambda^i \|\delta u_k(i)\| + k_3 b_1 \sup_{i \in [0, N]} \left\{ \sum_{j=0}^{i-1} \lambda^{i-j} \left( \sup_{j \in [0, N]} \lambda^j \|\delta u_k(j)\| \right) \right\} + k_1 k_2 \lambda^i M \quad (17)$$

이 얻어지고 여기서 상수  $k_1, k_2, k_3$  및  $b_1$  은 정리의 증명에서와 같다. 또  $\lambda$ -노음의 정의를 적용하면,  $\lambda < 1/k_2$  에 대하여

$$\|\delta u_{k+1}(i)\|_\lambda \leq \rho_1 \|\delta u_k(i)\|_\lambda + \epsilon_1 \quad (18)$$

이 되며, 여기서  $\rho_1$  은 정리에서와 동일하고  $\epsilon_1 = k_1 M$  이다. 따라서 (5) 에서  $\rho < 1$  이고,  $\lambda$  를 충분히 작게 함으로써  $\rho_1 < 1$  이 성립한다. 또한 (18) 은 다음과 같이 쓸 수 있으므로

$$\|\delta u_k(i)\|_\lambda \leq \frac{1 - \rho_1^k}{1 - \rho_1} \epsilon_1 \quad (19)$$

따라서  $k \rightarrow \infty$  일때  $\|\delta u_k(i)\|_\lambda$  는  $i \in [0, N]$  에서 유계임을 알 수 있다.  $\lambda$ -노음의 정의를 이용하면  $k \rightarrow \infty$  일 때  $\sup_{i \in [0, N]} \|\delta u_k(i)\|$  가 유계이며 또 (11) 로부터  $k \rightarrow \infty$  일 때  $\sup_{i \in [0, N]} \|\delta x_k(i)\|$  이 유계이므로, 따라서  $\|c_k(i)\|, i \in [0, N]$  도 유계이다.

(증명끝)

위의 따름정리의 결과로부터 기존의 반복학습제어에서 요구되고있는 초기상태에 대한 가정이 만족되지 않는 경우에도 출력오차는 평등 유계임을 알 수 있으며 그 상한은 초기상태 오차에 대한 상한에 비례하는 것을 알 수 있다. 다음에는 학습제어를 시스

템에 적용할 때 미지의 외란이 각 시행마다 동일한 패턴으로 인가되는 경우를 고려하기 위하여 아래와 같은 형태의 시스템을 생각한다.

$$\begin{aligned} x(i+1) &= f(x(i), i) + B(x(i), i) u(i) + v(i) \\ y(i) &= G(i)x(i). \end{aligned} \quad (20)$$

여기서  $v(i)$ 는 모든  $k$  에 대하여  $v_k(i) = v(i), i \in [0, N]$  를 만족한다. 이와 같은 특성의 외란이 인가되는 경우에는 그 형태 및 크기에 관한 사전지식이 없어도 반복학습 제어를 이용함으로써  $i \in [0, N]$  에서 이러한 외란의 영향을 완전히 제거할 수 있음을 다음과 같이 쉽게 보일 수 있다.

### 따름정리 2.

시스템 (20) 에 대하여 가정 A 1 - A 3 이 성립한다. 학습제어법칙 (4) 를 적용하고, 이득함수  $L_1(i)$  를

$$\|I - L_1(i)G(i+1)B(x_k, i)\| \leq \rho < 1, i \in [0, N] \quad (5)$$

가 성립하도록 선정할 수 있으면, 모든  $k$  에 대하여  $x_d(0) = x_k(0)$  가 성립하고  $k \rightarrow \infty$  일 때 출력오차는 영으로 수렴한다.

### 증명

정리의 증명에서 (10) 이 다음과 같이 성립하므로

$$\begin{aligned} x_d(i+1) - x_k(i+1) &= (f(x_d(i), i) + B(x_d(i), i) u_d(i) + v(i)) \\ &\quad - (f(x_k(i), i) + B(x_k(i), i) u_k(i) + v(i))) \\ &= f(x_d(i), i) - f(x_k(i), i) + (B(x_d(i), i) - B(x_k(i), i)) u_d(i) \\ &\quad + B(x_k(i), i)(u_d(i) - u_k(i)), \end{aligned} \quad (21)$$

정리에서와 동일한 증명 과정을 통하여 이 따름정리를 증명할 수 있다.

(증명끝)

### 3.3 수렴성능의 개선방법

주어진 시스템을 고정된 유한시간구간에서 정밀하게 제어하려고 할 때, 유도된 충분조건하에서 반복학습제어를 적용함으로써 실제 출력이 원하는 출력을 완전하게 추종할 수 있는 것은 앞의 3.1절에서 보인 바와 같다. 그러나 출력의 수렴성이외에 반복시행시 출력오차가 빠르게 줄어들 것 과 학습과정에서 출력오차의 크기가 과도하게 커지지 않도록 하는 것이 일반적으로 요구되며, 실제로 충분조건을 만족하는 이득함수를 사용하더라도 학습과정에서 매우 큰 출력오차가 발생할 수 있다.

위와 같은 실제적인 요구에 대응하기 위하여 주어진 유한시간구간을 연속적으로 인접된 짧은 시간

구간으로 나누고 각 구간에 대하여 학습제어를 적용함으로써 원하는 제어입력을 구하는 방법을 생각할 수 있다. 즉, 주어진 시간구간  $[0, T]$  를  $N$  개의 연속된 구간  $[0, T_1], [T_1, T_2], \dots, [T_{N-1}, T_N]$  ( $T_N = T$ ) 으로 나누고, 우선 첫번째 구간  $[0, T_1]$  에 대하여 제시된 학습제어법칙을 반복적으로 시스템에 적용한다. 이 구간에서 출력오차가 항상 허용한계이내로 들어가게 되면 그 때의 제어입력  $u(i), i \in [0, T_1]$  를 기억시킨 후 다음 구간에서의 학습을 시작한다. 두번째 구간에서의 초기 제어입력은 첫번째 구간에서의 원하는 입력의 최종치 즉,  $u(T_1)$  으로서 사용하기로 하고, 이전 구간에서의와 마찬가지로 제어법칙을 반복적으로 적용한다. 이러한 방법으로 학습을 수행할 때 첫번째 구간의 초기 상태를 원하는 초기 상태와 완전히 일치시킬 수 있다고 가정하더라도 두번째 이후의 구간에서는 각 초기 상태를 그 시간에서의 원하는 상태에 일치시키는 것은 실제적으로 매우 힘들다. 이것은 특정한 시간 구간에서 실제 출력이 원하는 출력에 완전히 수렴되기 위해서는 이론적으로 무한번의 반복시행을 필요로 하기 때문이다.

따름정리 1과 따름정리 2 에서 유계의 초기상태 오차가 존재할 때 충분한 반복시행이 수행되면 출력오차도 유계임이 보여졌으며 특히, 출력오차에 대한 유계의 크기가 항상 그 구간의 초기상태오차의 크기보다 크지 않게 되는 것을 알 수 있다. 따라서 위에서 설명한 바와 같이 원하는 제어입력을 구하게 되면 나누어진 모든 구간에 있어서 상태벡터 오차의 크기가 첫번째 구간의 초기상태 오차의 크기보다 작거나 같게 할 수 있다.

#### IV. 시뮬레이션 결과

앞절에서 제시된 반복학습제어 방법들을 임의의 비선형 시스템에 적용하고 고정된 유한시간에서의 추종문제에 대하여 제시된 방법들이 효과적으로 사용될 수 있음을 보이기로 한다.

다음과 같은 비선형 시스템을 고려한다.

$$\begin{bmatrix} x_1(i+1) \\ x_2(i+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(i) \\ \frac{x_1(i)x_2(i)(x_2(i)+2.5)}{1+x_1^2(i)+x_2^2(i)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(i) \quad (22)$$

$$y(i) = x_2(i).$$

원하는 출력이  $y_d(i) = \sin(2\pi i / 25), i \in [0, 25]$  로 주어지고 허용오차의 한계를  $\epsilon = 0.001$  으로 하였으며 시스템의 모든 초기치를 0, 초기입력을  $u_0(i) = 0, i \in [0, 25]$  로 하였다. 시스템 (22) 에서  $f(x), B(x)$  는 모두  $x$  에 대하여 연속이며  $B(x), G(i)$  가 유계이므로 학습제어법칙 (4) 를 사용할 때 수렴조건 (5) 를 만족시

키기 위한 이득함수  $L_1(i)$  는 상수로서 충분함을 알 수 있고 이것을 1 로 하였을 때 출력이 원하는 출력에 수렴하는 경향은 그림 1 과 같다. 그러나 시스템이 모델링 오차를 가질 때에는 (5) 에서 정확히  $\rho = 0$  이 되도록 하기 어려우므로 이 경우를 고려하여  $L_1 = 0.8$  ( $\rho = 0.2$ ) 로 선택된 경우에 대하여 시뮬레이션한 결과를 그림 2 에 나타내었다. 이 결과로부터 모델링 오차를 포함하더라도 수렴조건만 만족되면 항상 출력의 수렴성을 보장할 수 있음을 확인할 수 있다.

다음에는 제시된 개선방법을 통하여 제어입력을 학습시켰을 경우에 학습의 과도기에서 오차의 크기가 현저하게 줄어들고 수렴속도 역시 향상되는 것을 시뮬레이션을 통하여 확인해보기로 한다. 주어진 시스템 (22) 를 대상으로 하여, 주어진 시간구간을 5 구간으로 나누고 앞 절에서 설명한 과정에 따라 구간별로 학습을 시킨 후 각 구간에서의 최종적인 입력을 종합하여 원하는 입력으로서 사용하기로 한다. 먼저 이득함수  $L_1(i) = 1$  로 하고 전 구간에 걸쳐서 학습을 수행하였을 때 반복지수에 따른 출력오차의 노음은 그림 3 과 같으며 동일한 이득함수를 나누어진 5 구간에서 사용하고 각 구간의 초기입력은 직전 구간의 최종입력으로서 하였을 때의 결과는 그림 4 에 나타낸 바와 같다. 그림 3 으로부터 출력오차가 허용한계를 만족할 때까지 17 회의 반복시행이 필요한 것에 비하여 그림 4 에 나타낸 바와 같이 첫번째 구간 및 두번째 구간 (그림 4(a)에서는 5 번의 반복시행으로써, 나머지 구간 (그림 4(b)에서는 각각 4 번의 반복시행으로써 출력이 원하는 출력을 허용한계이내로 추종함을 볼 수 있다. 따라서 학습과정에서 과도기 오차의 크기가 크게 줄어들며 수렴속도도 향상되는 것을 확인할 수 있다.

#### V. 결론

본 논문에서는 이산시간 비선형 시스템에 대하여 반복학습제어를 적용하였을 때 출력오차의 수렴성 보장을 위한 충분조건을 유도하였다. 또 초기 상태오차가 존재하는 경우나 반복적인 형태의 외란이 인가되는 경우에도 동일한 충분조건하에서 출력오차가 유계임을 보였다. 학습제어 시스템의 수렴성능을 향상시키기 위한 방법을 제안하였으며 시뮬레이션 결과를 통하여 제안된 학습제어방법이 반복적인 시스템에 대하여 매우 효과적임을 확인하였다.

#### 참고 문헌

- [1] S. Arimoto, S. Kawamura, and F. Miyazaki, "Bettering operation of robots by learning," *J. Rootic System*, vol. 1, pp. 123-140, 1984.

- [2] S. Kawamura, F. Miyazaki, and S. Arimoto, "Realizations of robot motion based on a learning method," *IEEE Trans. Syst., Man, Cyber.*, vol. 18, pp. 126-134, 1988.
- [3] S.-R. Oh, Z. Bien, and I.H. Suh, "An iterative learning control method with application for robot manipulators," *IEEE J. Robotics Autom.*, vol. 4, pp. 508-514, 1988.
- [4] M. Togai and O. Yamano, "Analysis and design of an optimal control scheme for industrial robots: A Discrete system approach," in *Proc. 24th IEEE Conf. Decision Contr.*, Ft. Lauderdale, FL, pp. 1399-1404, 1985.
- [5] T. Ishihara, K. Abe and H. Takeda, "A Design of discrete-time repetitive control systems," *Trans. Soc. Instrum. Contr. Eng.*, vol. 21, pp. 43-49, 1986.
- [6] Z. Geng, R. Carroll and J. Xie, "Two-dimensional model and algorithm analysis for a class of iterative learning control systems," *Int. J. Contr.*, vol. 52, pp. 833-862, 1990.
- [7] H. S. Ahn, S. - R. Oh, I. Choy, K. B. Kim, and M. S. Ko, "Design and implementation of a high precision servo system," in *Proc. Korean Autom. Contr. Conf.*, Seoul, pp. 1415-1419, 1990.
- [8] D. S. Yoo, M. J. Chung, and Z. Bien, "Real-time implementation and evaluation of dynamic control algorithms for industrial manipulators," *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 38, pp. 26-31, 1991.
- [9] D. H. Hwang, Z. Bien, and S.-R. Oh, "Iterative learning control method for discrete-time dynamic systems," *IEE Proc. Pt. D*, vol. 138, pp. 139-144, 1991.
- [10] T. Sugie and T. Ono, "An iterative learning control law for dynamical systems," *Automatica*, vol.27, pp. 729-732, 1991.

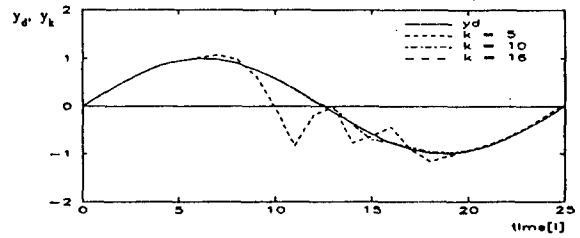


그림 2.  $L_1 = 0.8$  인 경우의 시스템 출력

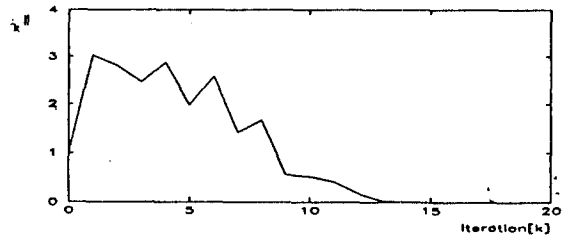


그림 3. 출력오차의 노름

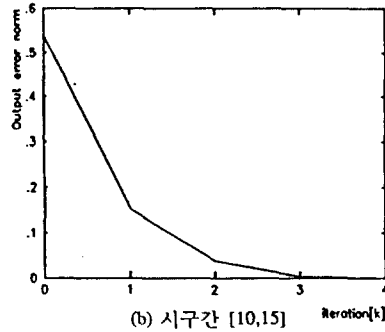
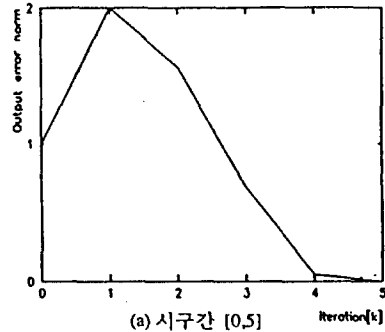


그림 4. 개선 방법에 의한 출력오차의 노름

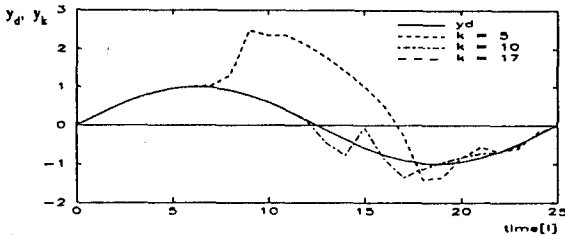


그림 1.  $L_1 = 1$  인 경우의 시스템 출력